Tentamen	**Lineaire Algebra 4**	4 juli 2005
Examenzaal		9.00–12.00

1. Laat $\mathbf{F}_3$ het lichaam van orde 3 zijn (met elementen $0, 1, 2$). Zij ϕ_3 de lineaire transformatie van $\mathbf{F}_3^4$ gegeven door

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ten opzichte van de standaardbasis.

(i) Bereken het karakteristieke polynoom van ϕ_3.

(ii) Bereken de eigenwaarden en eigenvectoren van ϕ_3.

(iii) Bewijs dat ϕ_3 niet diagonaliseerbaar is.

(iv) Laat M een matrix met coëfficiënten uit $\mathbf{Z}$ zijn, met de eigenschap dat we M_3 krijgen wanneer we de coëfficiënten van M modulo 3 reduceren. Beargumenteer of het mogelijk is dat M diagonaliseerbaar is.

2. Bewijs of weerleg (bijvoorbeeld met een tegenvoorbeeld) de volgende beweringen.

(i) Als U en W lineaire deelruimten zijn van de vectorruimte V, dan is de dimensie van $U \oplus W$ gelijk aan $\dim U + \dim W$.

(ii) De enige mogelijkheden voor de eigenwaarden van een orthogonale transformatie zijn $\lambda = 1$ en $\lambda = -1$.

(iii) Als f het polynoom $x^2 - 1$ is in $R[x]$, waar R een commutatieve ring met 1 is, dan heeft f altijd precies twee nulpunten in R.

(iv) Als van een vierkante $n \times n$ matrix M met coëfficiënten uit een lichaam K het karakteristieke polynoom p_M over K irreducibel is, dan is is n de kleinste graad van een niet-nul polynoom P over K met de eigenschap dat $P(M) = 0$.

3. Gegeven zijn de kwadratische vormen Q_1 en Q_2 in 4 variabelen over $\mathbf{R}$:

$$Q_1 = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + 6x_3^2 - 2x_3x_4 + 4x_4^2,$$
$$Q_2 = x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + 5x_2^2 - 2x_2x_3 - 2x_2x_4 + 3x_3^2 + 10x_3x_4 + 11x_4^2.$$

(i) Wat zijn de bij Q_1 en Q_2 behorende symmetrische bilineaire vormen B_1 en B_2?
(ii) Bereken de invarianten n_0, n_+, n_- van Q_1 en Q_2. Zijn Q_1 en Q_2 equivalent?
(iii) Laat Q_3 kwadratische vorm

$$Q_3 = x_1^2 + 2x_1x_4 - 2x_2^2 + 4x_2x_3 - 8x_2x_4 - x_3^2 + 4x_3x_4$$

zijn. Bereken $Q_3(x)$ als $x = (1, 1, 0, 0) \in \mathbf{R}^4$, en gebruik dit om te laten zien dat Q_3 niet equivalent is met Q_1 en ook niet met Q_2.
(iv) Bewijs dat B_3, de symmetrische bilineaire vorm bij Q_3, geen reëel inproduct op $\mathbf{R}^4$ geeft, en idem voor B_2, maar dat B_1 dat wel doet.

4. In deze opgave is V een complexe inproductruimte met inproduct $< \, , \, >$, en T is lineaire transformatie van V.
(i) Bewijs de volgende twee beweringen:
(a) de nulvector is de enige vector v uit V met $< w, v >= 0$ voor elke w uit V.
(b) als v en v' vectoren uit V zijn met $< w, v >=< w, v' >$ voor alle w uit V dan moet $v = v'$.
(ii) Veronderstel dat voor elke vector v uit V geldt dat $< Tv, v >= 0$. Bekijk dit inproduct voor de vectoren $v = x + y$ en $v = x + \mathrm{i}y$ (met $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$), waar x, y willekeurige vectoren uit V zijn, en leid hieruit af dat T dan wel de nulafbeelding moet zijn.

De *geadjungeerde* T^* van T is de unieke transformatie van V waarvoor

$$< Tv, w >=< v, T^*w >$$

voor alle v en w uit V.
(iii) Gebruik (i) om te bewijzen dat voor een Hermitese transformatie T moet gelden dat $T^* = T$.
(iv) Bewijs ook dat $T^* = T$ als gegeven is dat $< Tv, v > \in \mathbf{R}$ voor alle $v \in V$.