Escher en de wiskunde van betegelingen

Gert Heckman
IMAPP, Radboud Universiteit, Nijmegen
G.Heckman@math.ru.nl

12 november 2012

1 Euclidische meetkunde

De Euclidische meetkunde bestudeert configuraties van punten, lijnen en cirkels in het vlak. Voorts is er het begrip afstand tussen ieder tweetal punten A en B in het vlak, genoteerd $d(A,B) \geq 0$. De afstandsfunctie voldoet aan de driehoeksongelijkheid

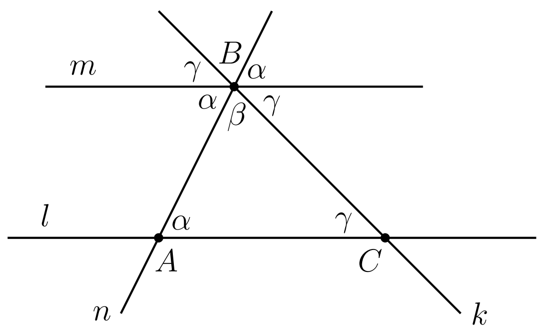
$$d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$$

voor elk drietal punten A, B, C in het vlak. Een kromme of weg in het vlak is de figuur afgelegd door een denkbeeldige wandelaar in het vlak. Lijnen zijn precies die krommen waarvoor geldt dat

$$d(A,C) = d(A,B) + d(B,C)$$

voor elk drietal punten A, B, C op de weg, die de wandelaar (zonder teruglopen) achtereenvolgens passeert. Anders gezegd, de kortste weg tussen twee punten wordt gerealiseerd als de wandelaar de lijn door die twee punten bewandelt. Een cirkel is die kromme, waarvoor de wandelaar steeds een vaste afstand ("de straal") tot een gegeven punt ("het middelpunt") heeft.

Een belangrijk axioma in de Euclidische meetkunde is het "parallellenpostulaat". Voor elke lijn l en ieder punt B buiten l is er een unieke lijn m door B parallel aan l. Is A een punt op l, dan wordt m verkregen door l parallel te verplaatsen van A naar B. Voorts snijdt de lijn n door A en B de parallelle lijnen l en m onder gelijke hoeken. Met dit parallellenpostulaat volgt de bekende stelling uit de Euclidische meetkunde dat de som van de hoeken van een driehoek gelijk is aan een gestrekte hoek (ter grootte π in radialen). Het bewijs wordt gegeven met onderstaande figuur: $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.



Een klassieke vraag was of het parallellenpostulaat een axioma was dat onafhankelijk is van de overige axioma's van Euclides? Het bevestigende antwoord werd in 1828 gevonden door Gauss, door het vinden van een andere meetkunde, waarin alle axioma's van Euclides geldig bleven behalve het parallellenpostulaat. Deze andere meetkunde, waarin het parallellenpostulaat niet langer geldig is, wordt wel niet-Euclidische meetkunde genoemd.

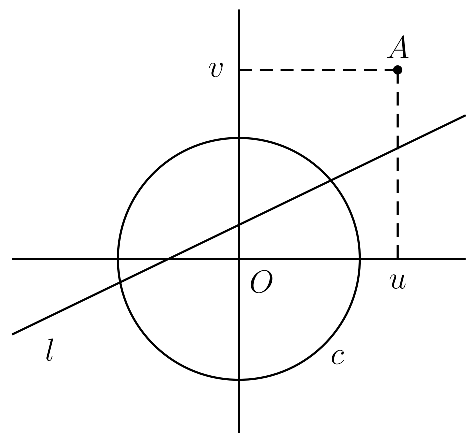
In het Euclidische vlak $\mathbb{E}^2$ heeft de lijn m door B parallel aan l de volgende eigenschap: Voor elk punt D op l snijdt de loodlijn op l door D de lijn m in een punt E. Als D varieert over l dan varieert E over m, en in de Euclidische meetkunde blijft de afstand $d = d(D, E)$ tussen D en E constant. In de niet-Euclidische meetkunde kunnen we nog steeds voor iedere lijn l en ieder punt D op l de loodlijn op l door D nemen, en daar twee punten E en F op vaste afstand $d > 0$ nemen. Variëren we D over l dan varieren E en F over twee krommen m en n, die we equidistante krommen aan l noemen. De pointe van niet-Euclidische meetkunde is dat de equidistante krommen m en n geen lijnen behoeven te zijn. Het parallellenpostulaat is dus niet langer geldig.

Het eenvoudigste voorbeeld van een niet-Euclidische meetkunde is een boloppervlak $\mathbb{S}^2$ met straal $r > 0$. De lijnen op $\mathbb{S}^2$ zijn de grootcirkels: doorsneden van $\mathbb{S}^2$ met een vlak door het middelpunt van $\mathbb{S}^2$. Een wandelaar over een grootcirkel neemt inderdaad de kortste weg tussen ieder tweetal (nabijgelegen) punten op die grootcirkel. De parallelle krommen aan een grootcirkel, bijvoorbeeld de evenaar op het aardoppervlak, zijn de twee breedtecirkels met vaste noorder- en zuiderbreedte $d > 0$. Dit zijn inderdaad geen grootcirkels!

Alvorens niet-Euclidische meetkunde verder te bespreken moeten we eerst een belangrijke stap uitleggen, gemaakt door de Franse wiskundige Descartes in zijn werk Géometrie uit 1637: het werken met coördinaten. Meetkunde vertaalt zich dan in algebra.

2 Cartesische meetkunde

Descartes stelde voor om in het Euclidische vlak $\mathbb{E}^2$ een tweetal loodrecht op elkaar staande lijnen te kiezen, een zogenaamd assenkruis. De eerste lijn denken we horizontaal, en noemen we de u-as. De tweede verticale lijn noemen we de v-as. Het snijpunt van deze twee assen noemen we de oorsprong, genoteerd O.



Een punt op de u-as kunnen we eenduidig vastleggen door een reële coördinaat: rechts van O is dit de afstand tot O, en links van O is dit minus de afstand tot O. We spreken van de reële getallenrechte. Netzo voor de v-as: positief naar boven, en negatief naar beneden. Een punt A in het Euclidische vlak wordt nu gerepresenteerd door een getallenpaar (u, v). Het punt u is de loodrechte projectie van A op de u-as, en evenzo is v de loodrechte projectie van A op de v-as.

Krommen kunnen we dan representeren door vergelijkingen. Bijvoorbeeld $v = mu + n$ met m, n getallen stelt een lijn l voor, niet parallel aan de v-as. Een cirkel c met middelpunt de oorsprong O en staal $r > 0$ heeft vergelijking $u^2 + v^2 = r^2$, vanwege de stelling van Pythagoras. De snijpunten van l en c kunnen we uitrekenen door $v = mu + n$ te elimeren uit $u^2 + v^2 = r^2$.

Eliminatie van v leidt tot de kwadratische vergelijking

$$(m^2+1)u^2 + 2mnu + (n^2 - r^2) = 0$$

in u met oplossingen $u_\pm = (-2mn \pm \sqrt{D})/2(m^2+1)$. De discriminant

$$D = b^2 - 4ac = 4(m^2+1)r^2 - 4n^2$$

is positief precies dan als de lijn l de cirkel c in twee punten snijdt.

We noteren met $\mathbb{R}^2$ de verzameling van paren (u, v) met u, v twee reële getallen, en noemen $\mathbb{R}^2$ het Cartesisch vlak. Noteren we als tevoren het Euclidisch vlak met $\mathbb{E}^2$ dan laat het kernidee van Descartes zich vertalen in

$$\mathbb{E}^2 \simeq \mathbb{R}^2$$

of in woorden: het abstracte Euclidische vlak $\mathbb{E}^2$ en het concrete Cartesische vlak $\mathbb{R}^2$ zijn equivalent na keuze van cöordinaatassen. Hierbij betekent het symbool $\simeq$ dat er een brug is tussen de meetkundige wereld $\mathbb{E}^2$ van Euclides en de algebraïsche wereld $\mathbb{R}^2$ van Descartes. Dit verband tussen meetkunde en algebra is zeer vruchtbaar gebleken, tot op de dag van vandaag.

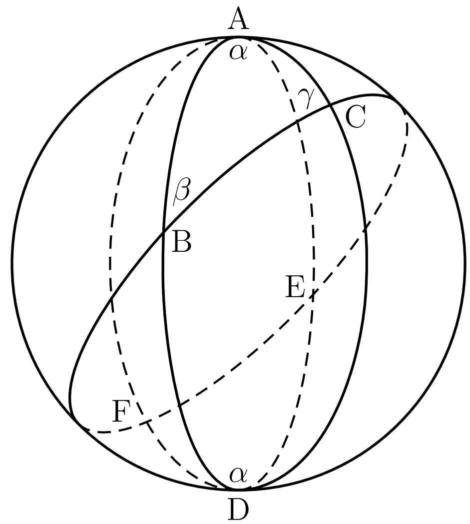
3 Meetkunde op de bol

We beschouwen een bol met straal $r > 0$. Een grootcirkel is de doorsnede van de bol met een vlak door het middelpunt van de bol. Op de aarde zijn de meridianen halve grootcirkels, maar de enige breedtecirkel die een grootcirkel is, is de evenaar. Een boldriehoek is een deel van de bol begrensd door drie grootcirkelbogen. Deze drie cirkelbogen heten de zijden van de boldriehoek, en de drie punten waar twee cirkelbogen elkaar snijden heten de hoekpunten van de boldriehoek.

Beschouw nu een boldriehoek ABC met bijbehorende hoeken α te A, β te B en γ te C. De sferisch exces formule zegt nu dat de oppervlakte Δ van boldriehoek ABC gelijk is aan

$$\Delta = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)r^2$$

met als gevolg dat de som van de hoeken van een boldriehoek altijd groter is dan π. Deze formule werd ontdekt door Albert Girard in 1629. Een octant is een boldriehoek met alle drie de hoeken gelijk aan $\pi/2$. Volgens de Girard formule is de oppervlakte van een octant gelijk aan $\pi r^2/2$, en dat is inderdaad een achtste deel van de totale boloppervlakte $4\pi r^2$.



De sferisch exces formule van Girard kan als volgt worden bewezen. We herinneren ons eerst dat de totale oppervlakte van de bol gelijk is aan $4\pi r^2$. We merken vervolgens op dat de oppervlakte van de „tweehoek" AD met twee hoeken α gelijk is aan $4\pi r^2 \times (\alpha/2\pi) = 2\alpha r^2$, en evenzo van tweehoek BE met twee hoeken β gelijk is aan $2\beta r^2$, en van tweehoek CF met twee hoeken γ gelijk is aan $2\gamma r^2$. Strikt genomen zijn er twee tweehoeken AD, namelijk één aan de voorkant en één aan de achterkant van de bol. Evenzo zijn er twee tweehoeken BE en twee tweehoeken CF. Merk nu op dat deze zes tweehoeken de bol bedekken, waarbij de twee driehoeken ABC en DEF beide driemaal worden bedekt, en de rest van de bol eenmaal. We concluderen dat

$$(4\alpha + 4\beta + 4\gamma)r^2 = 4\pi r^2 + 4\Delta$$

waarmee de Girard formule is bewezen.

4 Cartografie

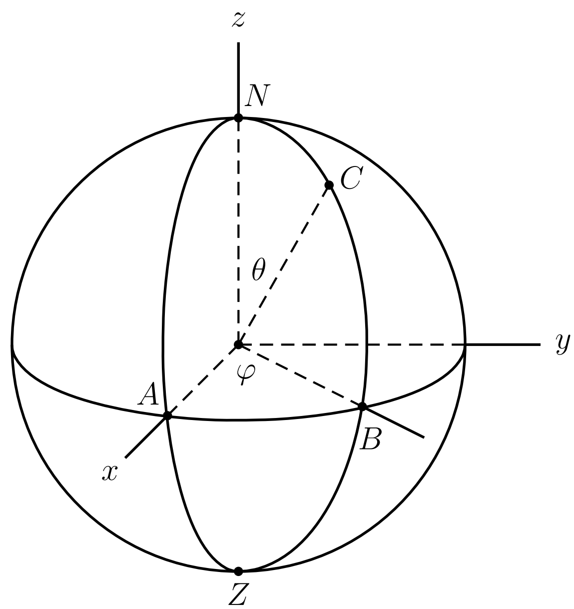
In de Cartesische ruimte $\mathbb{R}^3$ met coordinaten (x, y, z) wordt de bol met middelpunt de oorsprong $(0, 0, 0)$ en straal $r > 0$ gegeven door de vergelijking

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

omdat de afstand van (x, y, z) tot de oorsprong gelijk is aan $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ vanwege de stelling van Pythagoras. Een punt (x, y, z) op deze bol wordt in bolcoördinaten gegeven door

$$x = r\cos\varphi\sin\theta,\ y = r\sin\varphi\sin\theta,\ z = r\cos\theta$$

met φ de lengtehoek (lopend van 0 tot 2π) en $(\pi/2 - \theta)$ de breedtehoek (lopend van $-\pi/2$ voor de zuidpool tot $\pi/2$ voor de noordpool). De krommen, waarvoor φ constant is, zijn grootcirkels en heten de meridianen, terwijl de breedtecirkels gegeven worden door θ is constant. Breedtecirkels zijn alleen voor breedtehoek 0 een grootcirkel, namelijk de evenaar.

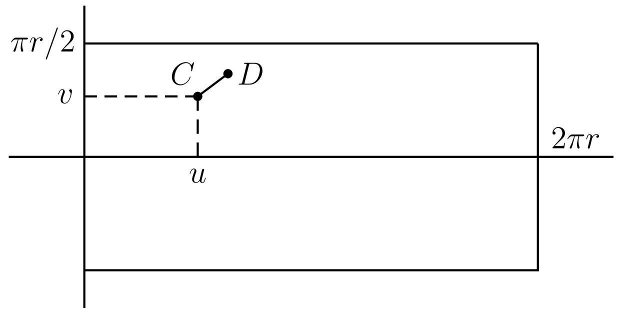


Laat A het snijpunt zijn van de bol met de positieve x-as. Zij C een algemeen punt op de bol, en B het snijpunt van de meridiaan door C met de evenaar. De equirectangulaire kaart geeft het punt C op de bol de coordinaten

$$u = r\varphi,\ v = r(\pi/2 - \theta)$$

met de hoek φ de oosterlengte en (mits positief) de hoek $(\pi/2-\theta)$ de noorderbreedte van het punt C op de bol. Merk op dat u de lengte is van de grootcirkelboog AB, en (mits positief) v de lengte is de grootcirkelboog BC.

We kunnen nu de punten van het boloppervlak (met weglating van noordpool N en zuidpool Z) eenduidig vastleggen in een rechthoekige kaart met coordinaten (u, v) met $0 \le u < 2\pi r$ en $-\pi r/2 < v < \pi r/2$.



Nemen we op de kaart het punt C met coördinaten (u, v) en een nabij gelegen punt D met coördinaten $(u+du, v+dv)$ dan is volgens de stelling van Pythagoras het kwadraat van de Euclidische afstand tussen C en D gelijk aan du^2+dv^2. Echter dit is niet de afstand op de bol tussen de corresponderende nabijgelegen punten C en D. Noteren we deze afstand op de bol met ds, dan geldt

$$ds^2 = \cos^2(v/r)du^2 + dv^2$$

althans wanneer du en dv infinitesimaal klein worden. De afstand op de bol gemeten langs de evenaar ($v = dv = 0$) of langs meridianen ($du = 0$) valt samen met de Euclidische afstand op de kaart.

In de keuze van kaarten zijn vele variaties mogelijk. Een klassieke variatie is de Archimedes projectie (in de cartografie ook wel Gall–Peters projectie genoemd), gegeven door

$$u = r\varphi,\ v = r\cos\theta$$

met $0 \leq u < 2\pi r$ en $-r < v < r$. De analoge formule voor de afstand op de bol wordt nu

$$ds^2 = (1 - v^2/r^2)du^2 + (1 - v^2/r^2)^{-1}dv^2$$

zodat alleen nog maar de afstand gemeten langs de evenaar ($v = dv = 0$) gelijk is aan de Euclidische afstand in deze kaart. Het bijzondere van de Archimedes projectie is dat deze oppervlakte bewarend is. Bijvoorbeeld, de oppervlakte van de totale bol met straal $r > 0$ is gelijk aan $2\pi r \times 2r = 4\pi r^2$, het klassieke argument van Archimedes.

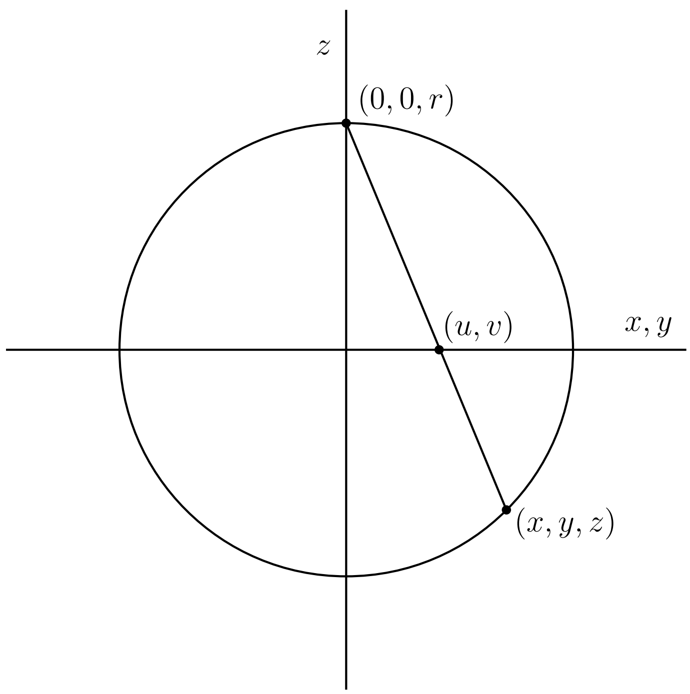
Een derde variatie is de stereografische projectie, die aan een punt (x, y, z) op de bol met vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ het snijpunt toevoegt van de lijn door de noordpool $(0, 0, r)$ en het betreffende punt (x, y, z) met het vlak $z = 0$. Dit snijpunt heeft coördinaten $(u, v, 0)$ met

$$u = \frac{rx}{r-z},\ v = \frac{ry}{r-z}$$

want $(x, y, z) = (1-\lambda)(0, 0, r)+\lambda(u, v, 0)$ met $\lambda = r/(r-z)$. Als (x, y, z) over alle punten van de bol loopt verschillend van de noordpool, want daar is de stereografische projectie niet gedefinieerd, dan loopt (u, v) over alle punten van het Cartesische vlak $\mathbb{R}^2$. Het afstandsbegrip op de bol vertaalt zich in deze kaart door de formule

$$ds^2 = \frac{4(du^2 + dv^2)}{(1 + (u^2 + v^2)/r^2)^2}$$

zodat in deze kaart alleen de afstand gemeten langs de evenaar (gegeven als doorsnede van de bol $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ met het vlak $z = 0$) gelijk is aan de Euclidische afstand gemeten langs $u^2+v^2 = r^2$. Het bijzondere van de stereografische projectie is dat deze hoektrouw is. De hoek tussen twee krommen op de bol en de Euclidische hoek tussen de twee corresponderende krommen in $\mathbb{R}^2$ zijn steeds gelijk. Een schematische voorstelling van de stereografische projetie wordt gegeven in de volgende figuur



die men zich omgewenteld om de verticale z-as moet denken. Men kan nu narekenen dat de doorsnede van de bol $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ met een vlak $z = mx + n$ (voor zekere constanten m en n), mits deze doorsnede niet leeg is, onder stereografische projectie overgaat in een cirkel met vergelijking

$$r(u^2 - 2mru + v^2 - r^2) - n(u^2 + v^2 + r^2) = 0$$

hetgeen voor $n = 0$ (als beeld van een grootcirkel op de bol) een cirkel in $\mathbb{R}^2$ is met middelpunt $(mr, 0)$ en straal $r\sqrt{m^2 + 1}$. Deze cirkel met vergelijking

$$(u - mr)^2 + v^2 = r^2(m^2 + 1)$$

snijdt de evenaar $u^2 + v^2 = r^2$ in de twee tegenoverliggende punten $(0, \pm r)$. Dit geldt algemeen: onder stereografische projectie gaan de grootcirkels op de bol over in cirkels of lijnen in het Cartesisch vlak $\mathbb{R}^2$, die de evenaar $u^2 + v^2 = r^2$ in een antipodaal puntenpaar snijdt.

5 Oppervlakken volgens Gauss

Gauss introduceerde de naar hem genoemde Gauss kromming K voor een oppervlak in de Cartesische ruimte $\mathbb{R}^3$ gegeven door een grafiek $z = f(x, y)$. Veronderstel dat de oorsprong op dit oppervlak ligt, en voorts dat het raakvlak aan het oppervlak in de oorsprong $(0, 0, 0)$ gelijk is aan het horizontale vlak $z = 0$. Dit betekent dat voor kleine x en y geldt dat

$$f(x, y) = (Lx^2 + 2Mxy + Ny^2)/2 + \cdots$$

voor zekere getallen L, M, N en $\cdots$ staat voor derde en hogere orde kleine termen. Gauss definieerde de Gauss kromming van dit oppervlak in de oorsprong door

$$K = LN - M^2$$

en voor een willekeurig ander punt op het oppervlak kunnen we na geschikte verschuiving en draaiing weer een soortgelijke berekening uitvoeren.

Voor het Euclidische vlak $z = f(x, y)$ met $f(x, y) = 0$ vinden we $K = 0$ in ieder punt van $\mathbb{R}^2$. Voor de bol met vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ verschuiven we de noordpool $(0, 0, r)$ naar de oorsprong $(0, 0, 0)$, en krijgen de vergelijking $z = f(x, y)$ met

$$f(x, y) = -r + \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} = -(x^2 + y^2)/(2r) + \cdots$$

zodat $L = N = 1/r$ en $M = 0$. De Gauss kromming van de bol in de noordpool wordt dus $K = 1/r^2$. Uit symmetrie overweging heeft de bol constante Gauss kromming $K = 1/r^2$ in ieder punt van de bol.

De definitie van de Gauss kromming is vrij eenvoudig te geven, maar het „Theorema Egregium" van Gauss, wat betekent „voortreffelijke stelling", is een subtiel en niet eenvoudig te bewijzen resultaat. Het Theorema Egregium zegt dat de Gauss kromming van een oppervlak niet verandert, als we het oppervlak star (met behoud van afstanden) vervormen. Bijvoorbeeld, een cylinder of een Möbius band hebben Gauss kromming $K = 0$ als starre vervorming van een strook uit het Euclidische vlak.

Het Theorema Egregium heeft een belangrijk gevolg, dat al geruime tijd door de cartografen werd vermoed: er bestaat geen ideale kaart van een land op de bol, waarvoor de afstand op de bol overgaat in de Euclidische afstand op de kaart. Inderdaad, het is niet mogelijk om het betreffende deel van de bol star te vervormen, zodat het vlak wordt. Het verschil in Gauss kromming $K = 1/r^2$ voor de bol en $K = 0$ voor het Euclidisch vlak is daarvoor een obstructie, vanwege het Theorema Egregium van Gauss.

6 De Riemann schijf

We hebben gezien dat een kaart voor een meetkunde met constante positieve Gauss kromming $K = 1/r^2 > 0$ wordt gegeven door een vlak $\mathbb{R}^2$ met coördinaten (u, v) en de uitdrukking

$$ds^2 = \frac{4(du^2 + dv^2)}{(1 + K(u^2 + v^2))^2}$$

voor de afstand op de bol in deze coördinaten.

Bernhard Riemann was een briljante leerling van Gauss, die in wiskundige diepgang zijn leermeester wellicht zelfs overtrof. In zijn Habilitationsvortrag van 1854 getiteld „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen" postuleerde Riemann dat een meetkunde van constante negatieve kromming $K = -1/r^2 < 0$ wordt gegeven op de schijf

$$u^2 + v^2 < r^2$$

met straal $r > 0$ met als afstandsbegrip

$$ds^2 = \frac{4(du^2 + dv^2)}{(1 - (u^2 + v^2)/r^2)^2}$$

door simpelweg $K = -1/r^2$ in bovenstaande formule te substitueren. Het is duidelijk uit deze formule dat dit afstandsbegrip opblaast op de rand

$$u^2 + v^2 = r^2$$

van de schijf, waardoor Riemann zich wel tot de schijf moest beperken. Op deze Riemann schijf neemt het oneindig veel tijd om startend binnen de schijf met constante snelheid naar de rand toe te lopen.

Wat zijn nu de geodeten of kortste verbindingslijnen voor de meetkunde op de Riemann schijf? Dit blijken cirkelbogen te zijn, die de randcirkel $u^2 + v^2 = r^2$ loodrecht snijden. Het formeel algebraische argument is dat de meetkunde van constante negatieve kromming $K = -1/r^2$ ontstaat uit de meetkunde van constante positieve kromming $K = 1/r^2$ door de substituties

$$r \mapsto \sqrt{-1}r,\ z \mapsto \sqrt{-1}z,\ m \mapsto \sqrt{-1}m,\ n \mapsto \sqrt{-1}n,$$

terwijl x, y, u, v onveranderd blijven. Hierbij is $\sqrt{-1}$ een denkbeeldig getal waarvan het kwadraat gelijk is aan -1. De geodeet

$$(u - rm)^2 + v^2 = r^2(m^2 + 1)$$

in de bolmeetkunde met positieve kromming $K = 1/r^2$ gaat middels deze substituties over in de geodeet

$$(u + rm)^2 + v^2 = r^2(m^2 - 1)$$

voor de meetkunde met negatieve kromming $K = -1/r^2$. Klaarblijkelijk moet men $m^2 > 1$ nemen, in welk geval een kleine berekening leert dat deze cirkel de randcirkel $u^2 + v^2 = r^2$ loodrecht snijdt. Inderdaad, de snijpunten zijn

$$(-r/m, \pm r\sqrt{m^2 - 1}/m)$$

en voorts geldt

$$r^2/m^2 + r^2(m^2 - 1)/m^2 + r^2(m - 1/m)^2 + r^2(m^2 - 1)/m^2 = r^2m^2$$

waaruit de bewering volgt vanwege de stelling van Pythagoras.

Op dezelfde manier gaat de eerder gevonden equidistante cirkel (met parameter n)

$$r(u^2 - 2mru + v^2 - r^2) - n(u^2 + v^2 + r^2) = 0$$

uit de bolmeetkunde over in de equidistante cirkel (met parameter n)

$$r(u^2 + 2mru + v^2 + r^2) - n(u^2 + v^2 - r^2) = 0$$

in de schijfmeetkunde. Binnen de Riemann schijf geeft dit voor alle n een cirkelboog door de vaste snijpunten $(-r/m, \pm r\sqrt{m^2-1}/m)$. De conclusie is dat voor een geodetische cirkelboog, die de randcirkel van de Riemann schijf loodrecht snijdt, alle cirkelbogen door die snijpunten equidistante cirkels zijn voor die gegeven geodeet.

Met eenzelfde argument kan men de sferische exces formule van Girard van de bol naar de schijf omzetten. Hebben we in de schijf een driehoek ABC met geodeten als zijden, dan noemen we zo'n driehoek een schijfdriehoek. Stel de inwendige hoek bij A heeft grootte α, bij B grootte β en bij C grootte γ. Dan is voor elke schijfdriehoek de hoekensom $\alpha + \beta + \gamma$ kleiner dan π, en de oppervlakte Δ van de schijfdriehoek ABC wordt gegeven door

$$\Delta = (\pi - \alpha - \beta - \gamma)r^2$$

vanwege de substitutie $r \mapsto \sqrt{-1}r$ in de oorspronkelijke Girard formule. Zo heeft een ideale schijfdriehoek met drie hoekpunten op de rand van de schijf alle drie de hoeken gelijk aan 0, zodat de oppervlakte πr^2 wordt.

7 De onmogelijkheidsstelling van Hilbert

De belangrijke stap van Riemann was om een oppervlak als een vlaklander te bestuderen door middel van een kaart met coordinaten (u, v), waarvoor de afstand gegeven wordt door een uitdrukking van de vorm

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

met E, F, G *willekeurige* functies van (u, v) met de beperking $EG - F^2 > 0$ en $E > 0$. Indien dit een kaart is voor een oppervlak $z = f(x, y)$ in $\mathbb{R}^3$ dan kan men (moeizaam) narekenen dat de Gauss kromming K voldoet aan

$$K(EG - F^2)^2 = (-G_{uu}/2 + F_{uv} - E_{vv}/2)(EG - F)+$$

$$\begin{vmatrix} 0 & E_u/2 & F_u - E_v/2 \\ F_v - G_u/2 & E & F \\ G_v/2 & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & E_v/2 & G_u/2 \\ E_v/2 & E & F \\ G_u/2 & F & G \end{vmatrix}$$

Dit bewijst het Theorema Egregium, omdat K zich expliciet laat uitdrukken in termen van de afstand op het oppervlak.

Riemann nam deze formule als definitie van de Gauss kromming, en liet daarbij in het midden of het gegeven oppervlak zich al dan niet in $\mathbb{R}^3$ laat realiseren als de grafiek $z = f(x, y)$ van een functie. Hiermee zette Riemann de eerste stappen op weg naar een intrinsieke of absolute meetkunde voor de studie van oppervlakken, terwijl Gauss zich juist bediende van extrinsieke of relatieve meetkunde.

De vraag of er een oppervlak in $\mathbb{R}^3$ is dat locaal wordt gegeven door vergelijkingen $z = f(x, y)$ en dat de schijfmeetkunde als kaart heeft, bleef bij Riemann onbeantwoord. In 1901 bewees Hilbert dat zo'n oppervlak in $\mathbb{R}^3$ niet kan bestaan, waarmee duidelijk werd dat de Riemannse absolute meetkunde een echte uitbreiding is van de Gaussische relatieve meetkunde.

Noteren we met $\mathbb{R}^{2,1}$ de ruimte $\mathbb{R}^3$ met coördinaten (x, y, z), waarbij de Euclidische afstand $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ wordt vervangen door de Lorentz (pseudo) afstand

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$$

dan leert de formele algebraïsche berekening van Riemann, dat de Riemann schijf kan worden verkregen via stereografische projectie van het oppervlak

$$z = -\sqrt{r^2 + x^2 + y^2}$$

in $\mathbb{R}^{2,1}$ vanuit de noordpool $(0, 0, r)$. Dit oppervlak is het zuidelijk blad van de tweebladige hyperboloïde met vergelijking

$$x^2 + y^2 - z^2 = -r^2$$

verkregen uit de bol met vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ via de substituties $z \mapsto \sqrt{-1}z$ en $r \mapsto \sqrt{-1}r$. Het lijkt zeer aannemelijk dat Riemann met zijn diepe meetkundige inzicht dit in gedachten moet hebben gehad.

Riemann heeft echter niet kunnen bevroeden, dat zijn absolute meetkunde voor (vierdimensionale) ruimten met een Lorentz afstand ruim 60 jaar later de wiskundige basis zou vormen voor de algemene relativiteitstheorie van Einstein.

8 Escher en Coxeter

Geinspireerd door islamitische betegelingen en een overzichtsartikel van de wiskundige Polya over de 17 mogelijke behangpatronen (een stelling van de

Rus Fedorov) maakte Escher (1898-1972) in de periode 1937-1941 een aantal tekeningen van regelmatige vlakvullingen.

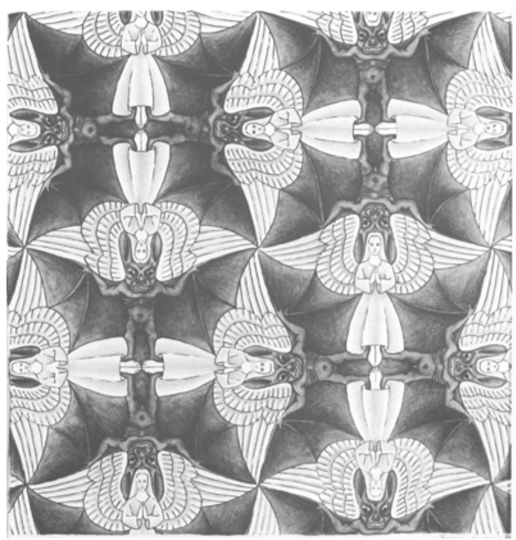
Wiskundigen versimpelen graag, en ik wil dat hier ook doen door mij te beperken tot regelmatige betegelingen, waarbij de tegels driehoeken zijn, en de vlakvulling ontstaat door herhaald te spiegelen in de zijden van een basistegel. Voorts hebben we zwarte en witte tegels, die elkaars gespiegelde zijn, en de regel is dat iedere zwarte tegel langs de zijden wordt begrensd door witte tegels, en evenzo iedere witte tegel langs de zijden wordt begerensd door zwarte tegels. De drie hoeken van de driehoek zijn dan noodzakelijkerwijs een geheel deel van π, dat wil zeggen $\pi/k, \pi/l, \pi/m$ met $k, l, m = 2, 3, \cdots$. Inderdaad, in het eerste hoekpunt komen $2k$ tegels samen, waarvan k zwart en k wit. Omdat de som van de drie hoeken π is vinden we

$$1/k + 1/l + 1/m = 1$$

en onder de aanname $2 \leq k \leq l \leq m$ is het eenvoudig na te gaan dat

$$(k, l, m) = (2, 3, 6),\ (2, 4, 4),\ (3, 3, 3)$$

de enige drie mogelijkheden zijn.



Figuur 1: Studie van regelmatige vlakvulling met Engelen en Duivels

Voor de Euclidische vlakvulling Engelen en Duivels, gemaakt tijdens Kerstmis 1941, is de engel of duivel een driehoek van type $(2, 4, 4)$. Inderdaad komen bij de voeten steeds 2 engelen samen, en bij punten van beide vleugels komen steeds 4 engelen samen.

Het jaar erna maakte Escher een bolvariatie van Engelen en Duivels. De wiskundige mogelijkheden, die Escher daartoe had, moeten voldoen aan

$$1/k + 1/l + 1/m > 1$$

vanwege de Girard formule. Onder de aanname $k = 2$ en $3 \leq l \leq m$ is het weer eenvoudig na te gaan dat

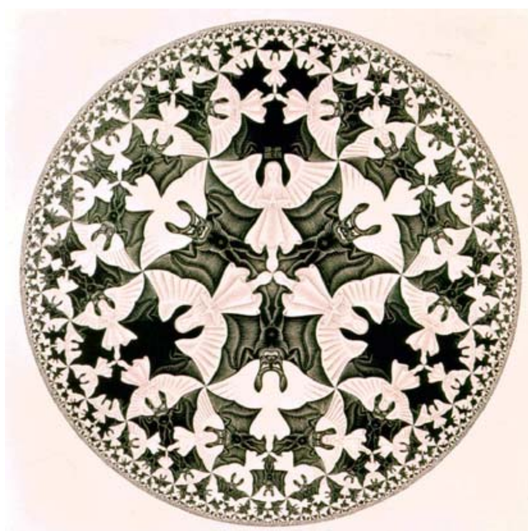
$$(k, l, m) = (2, 3, 3),\ (2, 3, 4),\ (2, 3, 5)$$

de enige drie mogelijkheden zijn. Dit heten ook wel de Platonische betegelingen van de bol, vanwege hun samenhang met de tetraëder, de octaëder en de icosaëder. Escher koos voor de variant van type $(2, 3, 3)$. Inderdaad komen er bij de voeten weer 2 engelen samen, maar bij punten van beide vleugels komen nu 3 engelen samen.

Figuur 2: Bol met Engelen en Duivels

De volgende stap werd gezet op het ICM (International Congres of Mathematics) van 1954 dat in Amsterdam werd gehouden. Escher was door de organisatie gevraagd daar een expositie te houden. Zijn werk is immers zeer in trek bij wiskundigen. Via deze expositie raakte de Canadese wiskundige

Coxeter (1907-2003) in contact met Escher. Coxeter had in de jaren 30 een uitvoerige studie gemaakt van betegelingen, niet alleen in dimensie 2 maar in willekeurige dimensie $n \geq 2$. De tegel in het werk van Coxeter was een zogenaamd n-simplex. Een 2-simplex is een driehoek, een 3-simplex is een viervlak, en een n-simplex is een n-dimensionale figuur (ook wel „kamer" genaamd), begrensd door $(n+1)$ zijvlakken (genaamd „wanden"), die ieder op hun beurt weer $(n-1)$-simplices zijn. De doorsnede van twee wanden is een $(n-2)$-simplex, genaamd een „plint". We hebben weer kamers in twee kleuren wit en zwart, waarbij de witte kamers de gespiegelden zijn van de zwarte kamers. Opdat de kamers netjes aansluiten tot een groot „gebouw", is het noodzakelijk dat de interne hoek loodrecht op een plint steeds een geheel deel van π is. Coxeter classificeerde welke mogelijke regelmatige gebouwen er zijn, niet alleen in het geval van de vlakke Euclidische ruimte $\mathbb{R}^n$, maar ook voor het geval van de bol $\mathbb{S}^n$ van dimensie n, en de Riemann bal $\mathbb{B}^n$ van dimensie n. De classificatie van Coxeter is een zeer fundamentele classificatie, die in diverse soorten wiskunde opduikt.



Figuur 3: Cirkellimiet IV

Coxeter moet instantaan gedacht hebben, toen hij de regelmatige vlakbetegelingen en bolbetegelingen van Escher zag, dat dit spel ook mogelijk was voor de Riemann schijf. De wiskundige beperking op het tripel (k, l, m) wordt nu

$$1/k + 1/l + 1/m < 1$$

vanwege de Girard formule. De Riemann schijf heeft in deze de grootste flexibiliteit, want er zijn nu oneindig veel oplossingen. Voor zijn cirkellimiet IV met engelen en duivels uit 1960 koos Escher $(3, 4, 4)$. Bij de voeten komen nu 3 engelen samen, terwijl bij de punten van de vleugels weer 4 engelen samenkomen als in zijn eerste vlakke versie.

Het aardige van deze keuze $(3, 4, 4)$ van Escher is dat

$$\pi(1/2 + 1/3 + 1/3 - 1)r^2 = \pi r^2/6 = \pi(1 - 1/3 - 1/4 - 1/4)r^2$$

zodat vanwege de Girard formule voor bol en schijf (met tegengestelde Gauss krommingen) zijn boltegel en zijn schijftegel precies gelijke oppervlakte hebben. Een ander argument is dat zijn tripels $(2, 3, 3)$ voor de bol en $(3, 4, 4)$ voor de schijf beiden slechts weinig afwijken van zijn tripel $(2, 4, 4)$ voor het Euclidische vlak. Kennelijk zocht Escher in de twee gekromde variaties minimale afwijkingen van zijn eerste vlakke versie. Op internet (google: Escher, Angels and Devils) kan men een variatie zien van Cirkellimiet IV uitgaande van het tripel $(2, 5, 5)$, maar deze engelen en duivels zijn te dikke wezens. De keuze van Escher voor $(3, 4, 4)$ lijkt daarom ook met oog voor proporties optimaal.

9 Gebroken symmetrie

Een passie voor symmetrie was Escher - en is ook ons wiskundigen - niet vreemd. Echter het kan esthetisch juist beter worden als met kleine nuanceringen een deel van de symmetrie wordt gebroken. Een mooi gelaat is liefst spiegelsymmetrisch, maar veelal wordt de haardracht juist gebruikt om deze spiegelsymmetrie te breken. Een schone dame zet haar hoed een beetje scheef op haar hoofd, en prikkelt daarmee onze esthetische gevoelens.

In de eerste vlakke versie uit 1941 is er nog geen sprake van symmetriebreking, in tegenstelling tot zijn latere gekromde variaties. Het was Kerstmis 1941 in een wereld, die verscheurd werd door een afschuwelijke oorlog. Was er nog goed temidden van al het kwaad? Wellicht bepaalde dit soort gedachten mede de keuze van Escher bij zijn eerste versie van Engelen en Duivels?

Bij de bolversie uit 1942 is er een subtiele mooie symmetriebreking. Niet alle 12 engelen en 12 duivels liggen allemaal even hoog op de bol. Er is een hemelse zijde waar de engelen wat hoger liggen, en een helse zijde waar de duivels het winnen. Escher heeft duidelijk verder nagedacht over deze betegeling, en voegt deze fraaie symmetriebeking toe. Heeft hij gedacht dat soms het goede wint, en soms het kwade?

Bij de schijfversie uit 1960 kijkt de toeschouwer 3 van de 4 engelen en duivels in het gezicht, maar 1 op de 4 kijkt hij op de rug. Opnieuw een subtiele fraaie vorm van symmetriebreking. Zou Escher hiermee aangeven terug te kijken door de nieuwe bril van de schijfmeetkunde naar een thema wat hem een kleine 20 jaar daarvoor inspireerde? Het zijn zo maar losse gedachten, die bij me opkomen bij het zien van deze drie schitterende variaties van Escher op het thema Engelen en Duivels.

Figuur 4: Escher in bespiegeling over zijn Engelen en Duivels

Ik wil Noud Aldenhoven en Leon van den Broek bedanken voor hulp en kritisch commentaar bij de voorbereiding van deze tekst.

Referenties

[1] Marcel Berger, A Panoramic View of Riemannian Geometry, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[2] John Conway, Heidi Burgiel and Chaim Goodman–Strauss, The Symmetries of Things, Wellesley, Massachusetts, 2008.

[3] H.S.M. Coxeter, Introduction to Geometry, Second Edition, John Wiley and Sons, New York, 1980.

[4] H.S.M. Coxeter, The Non-Euclidean Symmetry of Escher's Picture „Circle Limit III", Leonardo, Volume 12 (1979), 19-25. ,

[5] C.F. Gauss, Disquisitiones generales circa superficies curvas (General Investigations on Curved Surfaces), Comm. Soc. Göttingen, Band 6, 1828.

[6] G.F.B. Riemann, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, Habilitationsvortrag Göttingen, 1854.

[7] J.J. Stoker, Differential Geometry, Wiley-Interscience, New York, 1969.