De Slinger van Foucault

Gert Heckman
IMAPP, Radboud Universiteit, Nijmegen
G.Heckman@math.ru.nl

14 juni 2011

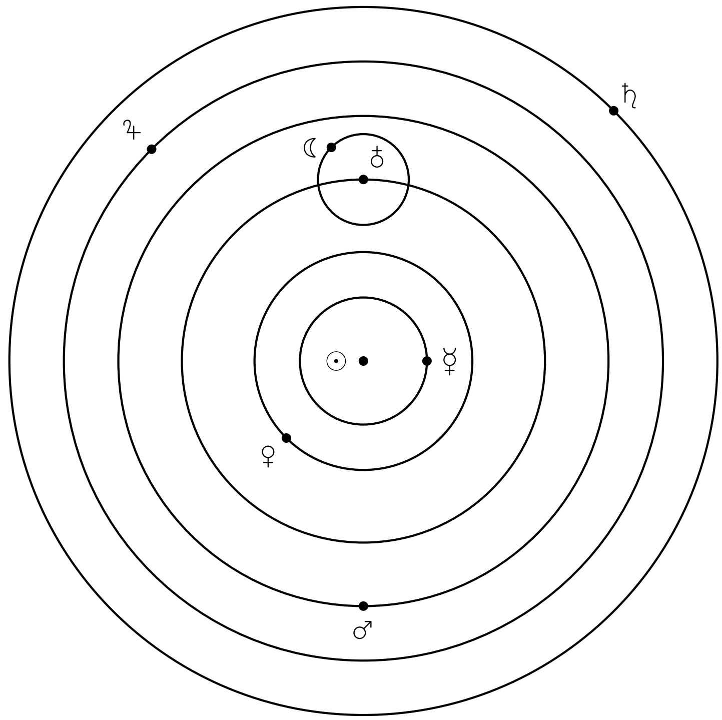
Samenvatting

In 1851 ontdekte Léon Foucault de beroemde slingerproef, waarmee hij de rotatie van de aarde om haar as kon bewijzen. Preciezer, bij een nauwkeurige uitvoering van deze slingerproef vindt men, naast een bewijs van de draaiing van de aarde om zijn as, ook nog de breedtegraad alwaar de proef wordt uitgevoerd. In de onderstaande tekst zullen we de wiskunde hierachter uitleggen.

1 Schijnbewegingen bij Copernicus

Nikolaus Copernicus verwoordt in het fundamentele werk „Over de Omwentelingen van de Hemellichamen", gepubliceerd in zijn sterfjaar 1543, twee kerngedachten [2]. De meest bekende hiervan zegt dat planeten eenparig in cirkelbanen bewegen met niet de aarde maar de zon in het onveranderlijk middelpunt van ons zonnestelsel. De aarde is slechts een van de zes toen bekende planeten in ons zonnestelsel, naast de binnenplaneten Mercurius, Venus en de buitenplaneten Mars, Jupiter en Saturnus.

Pas geruime tijd later werden ook nog de overige buitenplaneten Uranus en Neptunus ontdekt, en zeer recentelijk weten we dat in het buitenste deel van ons zonnestelsel, de zogenaamde Kuipergordel, nog vele andere planeetachtige objecten (waaronder Pluto) hun banen doorlopen. Na rijp beraad onder de astronomen noemt men deze objecten in de Kuipergordel geen planeten, maar slechts dwergplaneten. We kennen dus sedert een paar eeuwen acht planeten in ons zonnestelsel, en daarmee basta. Al deze planeten draaien in cirkelbanen in een en hetzelfde vlak (de Ecliptica) in een en dezelfde richting om de zon, en deze cirkelbanen worden eenparig doorlopen.



Het blijkt dat hoe dichter een planeet bij de zon staat, hoe groter zijn snelheid is. Dit heeft een verrassend gevolg. Bekijken we de relatieve beweging van Mars gezien vanaf de aarde, dan zien we Mars vooruitlopen als de zon tussen de aarde en Mars in staat. Daarentegen loopt Mars schijnbaar achteruit als de aarde tussen de zon en Mars doorloopt. Inderdaad, de aarde haalt Mars in de binnenbocht in. Denk maar aan een schaatswedstrijd, en het voordeel van de rijder in de binnenbocht. Dit verschijnsel van prograde en retrograde beweging zien we bij alle planeten, en het wereldbeeld van Copernicus verklaarde dit fenomeen op een eenvoudige en natuurlijke wijze.

De tweede kerngedachte van Copernicus zegt dat de aarde in 24 uur om haar as draait. De beweging van zon, maan en zeker die van de sterren is een schijnbeweging. De sterren staan ver van ons verwijderd en onveranderlijk, en hun schijnbare beweging is een gevolg van het feit dat de aarde in één etmaal één rondje om haar as draait. Zoals Copernicus in zijn boek opmerkt was deze tweede kerngedachte reeds uitgesproken in de Griekse oudheid, door Heraklides en Ekphantus uit de school van Pythagoras.

Een zonnedag is de tijd die de aarde nodig heeft om één omwenteling te maken om haar as ten opzichte van de zon. Een sterrendag is de tijd die de aarde nodig heeft om één omwenteling te maken om haar as ten opzichte van de verre sterren. In ongeveer 365 zonnedagen beschrijft de aarde door haar baan om de zon nog een extra omwenteling ten opzichte van de verre sterren. Dus 365 zonnedagen is hetzelfde als 366 sterrendagen. Aangezien

$$\frac{24 \times 60}{366} \approx 4$$

is een sterrendag ongeveer 4 minuten korter dan een zonnedag. Het onderscheid tussen zonnedag en sterrendag laat zich eenvoudig begrijpen vanuit het wereldbeeld van Copernicus.

Het gedachtengoed van Copernicus raakte aan het begin van de 17de eeuw binnen de kring van natuurwetenschappers algemeen geaccepteerd, met name door het experimenteel astronomische werk van Tycho Brahe en de theoretische uitleg ervan door Johannes Kepler. Echter de buitenwereld, en in het bijzonder de Katholieke Kerk, bleef nog lang vasthouden aan het geocentrisch beeld van een onveranderlijke aarde in het centrum van ons heelal. Galileo Galilei heeft in zijn licht satirisch geschreven boek „Dialoog over de Twee Wereldbeelden" uit 1632 getracht dit geocentrisch beeld eens en voor altijd de wereld uit te helpen, met als dramatisch gevolg een veroordeling door de inquisitie het jaar erna [6]. Pas zo'n 15 jaar geleden heeft de Katholieke Kerk onder paus Johannes Paulus II een schrijven doen uitgaan, waarin deze veroordeling werd betreurd, en haar toenmalig standpunt werd herroepen.

2 De slinger van Foucault

Het zou echter tot 1851 duren voordat Léon Foucault met zijn slingerproef een bewijs gaf van de draaiing van de aarde om haar as, dat onafhankelijk was van astronomische metingen. We stellen ons een slinger voor, waarvan het gewicht in iedere richting kan bewegen, onder invloed van het verticaal naar beneden gericht constant zwaartekrachtveld. In ons wiskundig model stellen we de aarde voor als een perfect boloppervlak, en in elk punt van dit boloppervlak is de zwaartekracht gericht naar het middelpunt van de bol. De zwaartekracht staat dus in ieder punt loodrecht op het boloppervlak en is naar binnen gericht. Als we deze proef uitvoeren op een plaats op noorderbreedte β, dan blijkt de slingerrichting één volledige omwenteling te maken met een periode van

$$T = \frac{24}{\sin \beta}$$

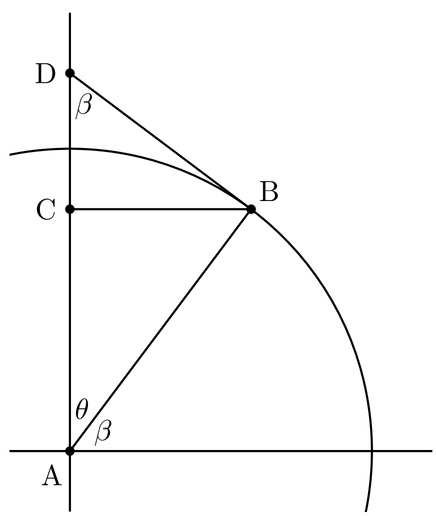
in uren. Hoe kunnen we dit begrijpen?

Inderdaad, als de proef uitgevoerd wordt op de noordpool, met $\beta = \pi/2$ (ofwel 90° noorderbreedte) en dus $\sin\beta = 1$, dan beschrijft de slingerrichting één volledige omwenteling in dezelfde 24 uur, die de aarde nodig heeft om onder de slinger door te draaien. Het essentiele punt is dat de slingerrichting constant blijft ten opzichte van de verre sterren. Dit verschijnsel, om zonder uitwendige krachten te volharden in een eenmaal ingeslagen richting van beweging, wordt wel de traagheidswet genoemd. Zo moet bijvoorbeeld een schaatser bij hoge snelheid in de bocht voldoende naar binnen hangen om de natuurlijke neiging om rechtdoor te blijven gaan te overwinnen.

Eenzelfde argument werkt op de zuidpool, met de kanttekening dat de draairichting van het slingervlak tegengesteld is aan die op de noordpool. De bovenstaande formule blijft juist, want op de zuidpool is $\beta = -\pi/2$ en $\sin\beta = -1$, en dus $T = -24$.

Uitgevoerd op de evenaar, met $\beta = 0$ en dus $\sin\beta = 0$, verandert de slingerrichting niet, zodat $T = \infty$, in overeenstemming met bovenstaande formule. Inderdaad, als de slingerrichting bijvoorbeeld loodrecht op de evenaar is gekozen, dan blijft dit onveranderlijk het geval, niet beïnvloed door de draaiing van de aarde om haar as.

Wat gebeurt er echter op een plaats tussen noordpool en evenaar, dus op noorderbreedte β met $0 < \beta < \pi/2$?



Bovenstaande figuur is een vlakke doorsnede van de aarde door de verticale rotatieas en de positie B waar we ons op de aarde bevinden. Als we voor positie B de plaats Nijmegen nemen, dan is de breedtegraad ongeveer 51 graden en 50 minuten.

De complementaire hoek van de breedtehoek β noteren we met θ. In de rechthoekige driehoek ABD is hoek ADB complementair met θ en dus gelijk aan β. Maar dan is hoek BDC ook gelijk aan β, zodat

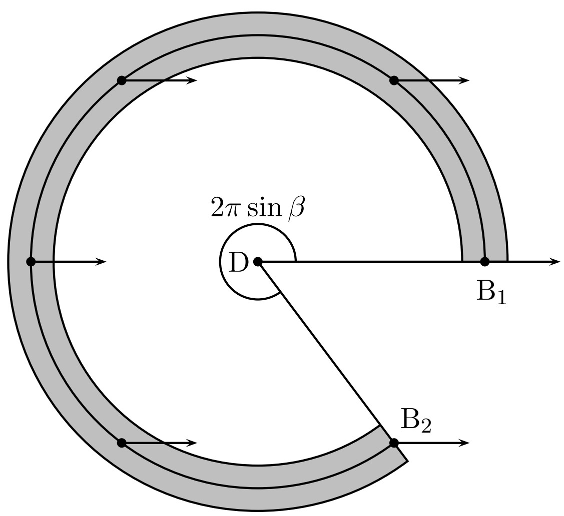
$$\sin \beta = \mathrm{BC} : \mathrm{BD}$$

als verhouding van overstaande en schuine zijde in rechthoekige driehoek BCD.

Wentelen we het lijnstuk BD om de rotatieas AD, dan krijgen we een kegel als omwentelingsoppervlak. Knippen we dit kegeloppervlak open langs BD, dan kunnen we deze kegel zonder vervorming openvouwen tot een vlakke cirkelvormige sector met hoek

$$\frac{2\pi \mathrm{BC}}{BD} = 2\pi \sin \beta$$

en krijgen dan de onderstaande figuur.



Een smalle strook van het boloppervlak van de aarde om de breedtecirkel door B gaat hierdoor zonder noemenswaardige vervorming over in de grijze strook rond de cirkelboog van B_1 naar B_2. In 24 uur maakt de plaats B een volledige rotatie over 2π langs de breedtecirkel door B. We mogen ons evengoed voorstellen dat de bol stilstaat, terwijl een waarnemer te B de slinger over één volledige breedtecirkel op de bol parallel verplaatst. Op het uitgevouwde kegeloppervlak beweegt de waarnemer op plaats B dan over de cirkelboog van B_1 naar B_2, dus draait zelf tegen de wijzers van de klok in over een hoek $2\pi \sin\beta$ ten opzichte van de noordpool te D, terwijl het vlak van de meebewegende slinger niet van richting verandert. Gezien vanuit de waarnemer verdraait het slingervlak dus over een hoek $2\pi \sin\beta$ met de wijzers van de klok mee. De tijd T die de slinger van Foucault nodig heeft voor een plaats op breedtegraad β om één volledige omwenteling van 2π te maken wordt dus

$$T = \frac{24}{\sin\beta}$$

in uren. Dit eenvoudige argument verklaart de formule van Foucault [5]. Voor de Foucaultslinger in dit Huygens gebouw komen we op een periode T van ongeveer 30 uur en 30 minuten.

3 Opdracht: Richting van de afwijking

Beargumenteer waarom een waarnemer op de noordpool de Foucaultslinger met de wijzers van de klok mee ziet draaien. Concludeer dat een toeschouwer van de Foucaultslinger, kijkend in de richting van de slingerbeweging, op het noordelijk halfrond een afwijking naar rechts en op het zuidelijk halfrond een afwijking naar links waarneemt.

4 Experimentele kanttekeningen

Alhoewel de theoretische verklaring van de Foucaultslinger uiteindelijk eenvoudig blijkt, is de werkelijkheid soms weerbarstig. Bij de oorspronkelijke slingerproef door Foucault in 1851 in Parijs was na zo'n 6 uur vanwege demping door de luchtweerstand de slingeruitwijking zo klein geworden, dat verdraaiing van het slingervlak niet meer goed waarneembaar was, en moest de proef opnieuw worden opgestart.

Het gewicht van de messing slinger in ons Huygensgebouw is met 110 kg aanzienlijk meer dan de 28 kg van de oorspronkelijke slinger die Foucault gebruikte. Dit grotere gewicht geeft slechts een paar uur respijt, dat als volgt is te ondervangen. Boven in het ophangpunt is een perfect cirkelvormige spoel om de stalen slingerkabel aangebracht, die aanstaat en daardoor de kabel een klein beetje aantrekt gedurende de tijd van het laagste centrale punt tot aan het punt van de maximale uitwijking. Bij teruggang vanuit maximale uitwijking naar het laagste centrale punt staat de spoel uit. Doen we dit steeds opnieuw bij elke slingerbeweging een voldoende klein beetje, dan kunnen we ervoor zorgen, dat ondanks de luchtweerstand de uitwijking steeds gelijk blijft. Het is natuurlijk van belang dat de spoel perfect cirkelvormig is, met als nauwkeurig middelpunt de kabel in ruststand.

Er is nog een tweede probleem, dat door kleine luchtwervelingen de slinger niet in een vlak blijft bewegen, maar uiteindelijk een ellipsvormige of een achtvormige baan zal gaan beschrijven. Om deze zijwaartse beweging vanuit het slingervlak te niet te doen, is een rubberen ring bij de spoel aangebracht, waar de stalen slingerkabel bij maximale uitwijking net even tegenaan komt. Dit doet de dwarse beweging teniet, zodat de slinger keurig in een vlak blijft lopen, zoals gewenst. Echter al deze kleine aanrakingen met de rubber ring zijn een rem op het draaieffect in de Foucaultslinger, met als gevolg dat onze Foucaultslinger er ruim anderhalf etmaal over doet om een volledige omwenteling te maken in plaats van de theoretische ruim 30 uren. Een opmerkelijk verschil, dat de onschuldige kijker bij onze slingeropstelling natuurlijk zal ontgaan, tenzij hij een aantal dagen er zelf aan meet!

De slingerproef van Foucault werd in het Parijs van 1851 het gesprek van de dag. In de eigen huiskamer kon men een proef doen om de aarde om haar as te zien draaien! In onze huidige tijd staan er over de hele wereld tientallen (wellicht honderden) opstellingen van de Foucaultslinger, in universiteitsgebouwen, musea of anderszins.

Heike Kamerlingh Onnes promoveerde in 1879 op een proefschrift met als titel „Nieuwe bewijzen voor de aswenteling der Aarde". Het was een diepgaande studie naar de technische aspecten van een goed ophangpunt voor de slinger van Foucault. Na zijn promotie ging Kamerlingh Onnes naar Amsterdam, om als assistent te werken bij de eminente fysicus Johannes van der Waals (Nobelprijs 1910), hetgeen uiteindelijk leidde tot zijn beroemde ontdekking van vloeibaar Helium (Nobelprijs 1913). Destijds grossierde de Nederlandse Natuurkunde in Nobelprijzen: Hendrik Lorenz en Pieter Zeeman (1902).

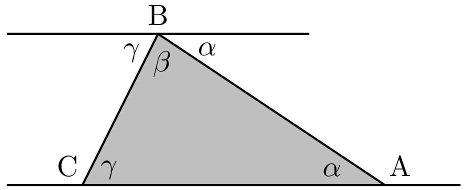
Algemeen wordt de HBS, de Hogere Burger School, opgericht in 1863 door Thorbecke en afgeschoten in 1968 bij de invoering van de Mammoetwet, gezien als de onderwijsvorm, waardoor deze bijzondere talenten uit de gewone burgerklasse zich zo konden ontplooien. Even terzijde, meisjes mochten vanaf 1871 naar de HBS, maar tot aan 1906 alleen na speciale toestemming door de minister.

5 Bolmeetkunde

Het is een bekende stelling uit de Euclidische meetkunde dat

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

voor de som van de hoeken van een driehoek ABC in het Euclidische vlak.



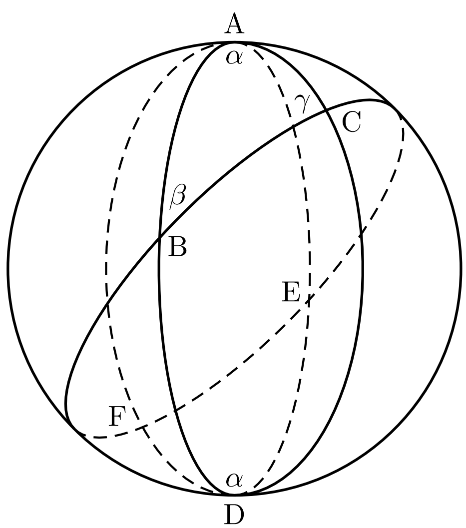
Trekken we door B een lijn parallel aan AC, dan zien we bij B de hoeken α en γ terug, waarmee de bovenstaande formule volgt.

We beschouwen een bol met straal 1 (in zekere eenheden). Een grote cirkel is de doorsnede van de bol met een vlak door het middelpunt van de bol. Op de aarde zijn de meridianen halve grote cirkels, maar de enige breedtecirkel die een grote cirkel is, is de evenaar. Een boldriehoek is een deel van de bol begrensd door drie grote cirkelbogen. Deze drie cirkelbogen heten de zijden van de boldriehoek, en de drie punten waar twee cirkelbogen elkaar snijden heten de hoekpunten van de boldriehoek.

Beschouw nu een boldriehoek ABC met bijbehorende hoeken α te A, β te B en γ te C. De sferisch exces formule zegt nu dat de oppervlakte Δ van boldriehoek ABC gelijk is aan

$$\Delta = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

met als gevolg dat de som van de hoeken van een boldriehoek altijd groter is dan π. Deze formule werd ontdekt door Albert Girard in 1629 [4].



De sferisch exces formule van Girard kan als volgt worden bewezen. We herinneren ons eerst dat de totale oppervlakte van de bol gelijk is aan 4π. We merken vervolgens op dat de oppervlakte van de „tweehoek" AD met twee hoeken α gelijk is aan $4\pi \times (\alpha/2\pi) = 2\alpha$, en evenzo van tweehoek BE met twee hoeken β gelijk is aan 2β, en van tweehoek CF met twee hoeken γ gelijk is aan 2γ. Strikt genomen zijn er twee tweehoeken AD, namelijk een aan de voorkant en een aan de achterkant van de bol. Evenzo zijn er twee tweehoeken BE en twee tweehoeken CF. Merk nu op dat deze zes tweehoeken de bol bedekken, waarbij de twee driehoeken ABC en DEF beide driemaal worden bedekt, en de rest van de bol eenmaal. We concluderen dat

$$4\alpha + 4\beta + 4\gamma = 4\pi + 4\Delta$$

waarmee de Girard formule is bewezen.

Meer algemeen kunnen we ook een n-hoek op de bol beschouwen met als zijden n grote cirkelbogen, met n hoekpunten en n bijbehorende hoeken ter grootte $\beta_1, \cdots, \beta_n$. De oppervlakte Δ van deze n-hoek wordt dan

$$\Delta = \beta_1 + \cdots + \beta_n - (n-2)\pi = 2\pi - ((\pi - \beta_1) + \cdots + (\pi - \beta_n))$$

hetgeen voor n=3 met de Girard formule overeenstemt.

We doen nu het volgende gedachtenexperiment. De bol staat onveranderlijk stil. We rijden met een vrachtauto op de bol over de rand van de n-hoek, met de n-hoek steeds aan onze linkerhand, en maken één volledig rondje om de n-hoek. In de afgesloten laadbak van de vrachtauto bevindt zich een slinger, en een bijrijder meet hoe het slingervlak verdraait bij één omloop om de n-hoek. Omdat de zijden grote cirkels zijn, meet de bijrijder daar geen verdraaiing. Echter in het i-de hoekpunt maakt de vrachtauto een draai van $\pi - \beta_i$ linksom (in positieve zin), zodat de bijrijder de slinger een draai $\pi - \beta_i$ rechtsom (in negatieve zin) ziet maken. De term

$$-((\pi - \beta_1) + \cdots + (\pi - \beta_n))$$

is de grootte van de totale verdraaiing van de slinger na één omloop om de n-hoek, zoals de bijrijder die meet. Het getal

$$\delta = 2\pi - ((\pi - \beta_1) + \cdots + (\pi - \beta_n))$$

heet de geometrische fase bij „parallelverplaatsing" om de n-hoek. We concluderen dan de stelling, die zegt dat de oppervlakte van een n-hoek en de geometrische fase bij parallelverplaatsing om de n-hoek, gelijk zijn. In formule $\Delta = \delta$. Dit resultaat is afkomstig van Carl Friedrich Gauss [7].

Nemen we nu een willekeurige weg op de eenheidsbol, die een zeker land omsluit, dan kunnen we de oppervlakte Δ van dat land berekenen, door de geometrisch fase δ te meten bij omloop om dat land, met het land aan de linkerhand. Inderdaad, zoals Gauss al opmerkte, kunnen we het land wel benaderen door een n-hoek op de bol, en steeds beter naarmate we n groter nemen. Daarom blijft de formule $\Delta = \delta$ waar voor willekeurige landen.

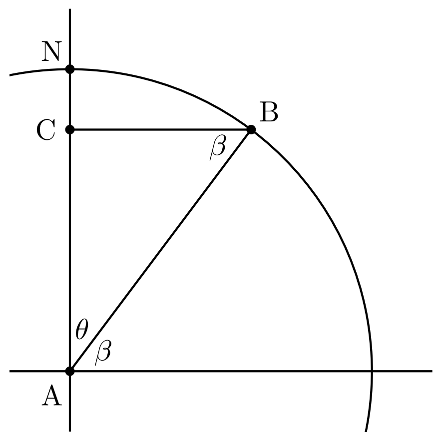
Bijvoorbeeld, bij één omloop over een breedtecirkel op breedtegraad β zegt de Foucault formule dat de geometrische fase gegeven wordt door

$$\delta = 2\pi - 2\pi \sin\beta = 2\pi(1 - \sin\beta) \ .$$

Reeds Archimedes wist dat de oppervlakte Δ van de poolkap van een bol met straal 1 boven breedtegraad β gelijk is aan

$$\Delta = 2\pi \mathrm{CN}$$

met CN de hoogte van het centrum C van de breedtecirkel tot aan de noordpool N.



Uit deze figuur volgt eenvoudig dat

$$\mathrm{CN} = 1 - \sin\beta$$

zodat inderdaad de Gauss formule $\Delta = \delta$ geldt in het voorbeeld van deze poolkap.

6 De Coriolis Kracht

De schijnkracht, die ten grondslag ligt aan de slinger van Foucault, werd al in 1835 theoretisch beschreven door de Fransman Gaspard Gustave Coriolis [3], en men noemt deze schijnkracht dan ook wel de Coriolis kracht. Een andere toepassing van het Coriolis effect is de wet van Buys Ballot, geformuleerd door de Utrechtse meteoroloog Christophorus Buys Ballot in 1857 [1]:

> „De wind waait van een hogedrukgebied naar een lagedrukgebied, met op het noordelijk halfrond een afwijking naar rechts en op het zuidelijk halfrond een afwijking naar links."

Dit verklaart waarom de spriraalvorm van een depressie op het noordelijk halfrond tegen de wijzers van de klok in gaat, terwijl op het zuidelijk halfrond dit met de wijzers van de klok mee gaat. De uitspraak „Meteorologen vertrouw ik alleen maar als ze het weer van gisteren voorspellen" mag juist zijn voor de weerman op het journaal, maar de wet van Buys Ballot staat als een huis.

7 Opdracht: Wet van Buys Ballot

Verklaar de wet van Buys Ballot.

8 Het laatste woord aan Copernicus

We besluiten met een citaat van de eerste paar regels uit het boek van Copernicus [2].

> „Van de vele literaire en kunstzinnige studies, waar de mens zijn natuurlijke talenten mee laaft, moeten bovenal op de meest liefdevolle wijze diegenen worden omarmd en voortgezet, die te maken hebben met dingen, die heel erg mooi zijn en erg de moeite van het weten waard zijn. Zulke studies gaan over de goddelijke cirkelvormige beweging van de wereld en de loop van de sterren, hun grootte en afstanden, hun opkomst en ondergang, en de oorzaak van andere verschijnselen aan het gewelf, en die uiteindelijk hun gehele vorm uitleggen. Want wat zou er mooier kunnen zijn dan het hemelgewelf, dat alleen maar mooie dingen bevat. Hun namen maken het al duidelijk. Hemel (caelum) betekent prachtig gewelfd, en wereld (mundus) betekent zuiverheid en elegantie."

Het mag duidelijk zijn dat hier een mens aan het woord is, voor wie schoonheid de belangrijkste drijfveer was bij zijn langdurige en moeizame werk. Veel moderne wetenschappers denken hier nog steeds zo over. Natuurlijk, de relevantie en de toepasbaarheid zijn van essentieel belang, maar uiteindelijk is de schoonheid van de ons omringende werkelijkheid en het begrijpen ervan wellicht nog steeds de belangrijkste drijfveer voor veel onderzoekers, ook voor wiskundigen met hun wereld van abstracte ideeën.

Israel Gelfand, een van de grootste Russische wiskundigen van de afgelopen eeuw, formuleerde het in 2003 op een feestje voor zijn negentigste verjaardig te Harvard, als volgt: „De wezenlijke kenmerken van wiskunde zijn Schoonheid, Exactheid, Eenvoud en een paar Gekke Ideeën”.

Referenties

[1] Christophorus Buys Ballot, Note sur le rapport de l'intensité et de la direction du vent avec les écarts simultanés du baromètre, Académie des sciences, 1857.

[2] Nikolaus Copernicus, The Revolutions of the Heavenly Spheres, 1543.

[3] Coriolis, G.G.: Mémoire sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps. Journal de l'école Polytechnique, 1835.

[4] Donald Coxeter, Introduction to Geometry, 1961.

[5] Léon Foucault, Démonstration expérimentale du mouvement de la Terre, Journal des Débats, 1851.

[6] Galileo Galilei, Dialoga Sopra i Due Massimi Sistemi del Mondo, 1632.

[7] Carl Friedrich Gauss, Disquisitiones generales circa superficies, 1827.

[8] Heike Kamerlingh Onnes, Nieuwe bewijzen voor de aswenteling der Aarde, Proefschrift, Groningen, 1879.