De vele bewijzen van Kepler's wet over ellipsbanen: een nieuwe voor "het Boek"?

Maris van Haandel*
RSG Pantarijn, Wageningen
marisvanhaandel@wanadoo.nl

Gert Heckman
IMAPP, Radboud Universiteit, Nijmegen
G.Heckman@math.ru.nl

19 augustus 2014

Samenvatting

De wiskundige Paul Erdös stelde zich voor dat God een boek had waarin Hij de meest elegante en mooiste bewijzen opschreef. Vele illustere natuurkundigen hebben bewijzen gegeven voor de Keplerwetten, uitgaande van de wetten van Newton. In dit verhaal voegen we er nog een aan toe, waarin de mysterieuze Lenzvector op natuurlijke wijze uit de geometrie volgt. Mogelijk een bewijs voor "het Boek"?

1 Inleiding.

Een van de hoogtepunten van de klassieke mechanica is de wiskundige afleiding van de drie door Kepler experimenteel gevonden wetten over planetaire beweging uit Newton's bewegingsvergelijking

$$\mathbf{F} = \mu\mathbf{a}$$

(waarbij $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$ de versnelling) en gravitatiewet

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -k\mathbf{r}/r^3$$

*Ondersteund door NWO als Leraar in Onderzoek.

(waarbij $\mathbf{r}$ de positie). In het geval van gravitationele aantrekking tussen twee massa's m en M is μ de gereduceerde massa

$$\mu = mM/(m+M)$$

en k de koppelingsconstante

$$k = GmM$$

met G de universele gravitatieconstante van Newton.

Newton publiceerde zijn theorie van zwaartekracht in 1687 in de Principia Mathematica [1]. Na twee korte inleidingen, een met definities en een ander met axiomas, bespreekt Newton in de eerste drie paragrafen van Boek 1 de drie wetten van Kepler (in zo'n 40 paginas, waarin hij het overigens weet te vermijden op enige plek de naam Kepler te noemen!).

Kepler's tweede wet (de beweging is vlak en in gelijke tijden worden gelijke perken doorlopen) is een direct gevolg van behoud van impulsmoment

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

waarbij $\mathbf{p} = \mu\dot{\mathbf{r}}$ de impuls. Deze wet geldt in grotere algemeenheid voor ieder centraal krachtveld. Newton legt dit netjes uit in Proposities 1 en 2.

Kepler's eerste wet (planeetbanen zijn ellipsen met het centrum van het krachtveld in een brandpunt) daarentegen is specifiek voor het geval van een aantrekkend $1/r^2$ krachtveld. Newton leidt in Propositie 11 met behulp van Euclidische meetkunde af dat de Kepler's eerste wet slechts kan gelden voor een aantrekkend $1/r^2$ krachtveld. De omkering dat een aantrekkend $1/r^2$ krachtveld aanleiding geeft tot ellipsbanen concludeert hij in Gevolg 1 van Propositie 13. Stilzwijgend neemt hij hierbij aan dat zijn bewegingsvergelijking $\mathbf{F} = \mu\mathbf{a}$ een unieke oplossing heeft voor gegeven beginpositie en beginsnelheid. Stellingen over existentie en eenduidigheid van oplossingen voor dergelijke differentiaalvergelijkingen zijn echter pas gesteld en wiskundig rigoureus bewezen in de 19^{de} eeuw. Er kan echter weinig twijfel over bestaan dat Newton deze eigenschappen van zijn vergelijking $\mathbf{F} = \mu\mathbf{a}$ heeft aangevoeld [2].

In 1710 vonden Jakob Hermann en Johann Bernoulli een correct bewijs dat nog steeds het standaard bewijs is voor moderne tekstboeken over klassieke mechanica [3]. Men schrijft de positievector $\mathbf{r}$ in het vlak van beweging in poolcoordinaten r en θ. De truc is om de bewegingsvergelijking $\mu\ddot{\mathbf{r}} = -k\mathbf{r}/r^3$ met variabele de tijd t te transformeren in een tweede orde differentiaalvergelijking voor de scalaire functie $u = 1/r$ met variabele de hoek θ. Deze differentiaalvergelijking laat zich exact oplossen, en geeft de vergelijking van de ellips in poolcoordinaten [4]. Dit bewijs laat de argeloze lezer achter met een gevoel van black magic.

Een ander populair bewijs gaat door de zogenaamde Lenzvector

$$\mathbf{K} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - k\mu\mathbf{r}/r$$

neer te schrijven. Een kleine berekening leert dat de Lenzvector $\mathbf{K}$ behouden blijft, en uitwerken van de gelijkheid

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{K} = rK\cos\theta$$

geeft de vergelijking van een ellips in poolcoördinaten [4]. De betekenis van de Lenzvector wordt slechts a posteriori duidelijk als een vector in de richting van de lange as van de ellips. Maar de start van het bewijs om de Lenzvector neer te schrijven blijft een algebraïsche truc. Voor een historische bespreking van de Lenzvector verwijzen we naar [5].

Het bewijs met de Lenzvector heeft aan populariteit gewonnen nadat Pauli in het najaar van 1925 in een gequantiseerde vorm het spectrum van het waterstofatoom ermee had berekend. Dit bewijs van Pauli blijft superieur aan het meer gebruikelijke bewijs om Schrödinger's eigenwaardevergelijking in bolcoördinaten te herschrijven, omdat hiermee de natuurlijke ontaarding van het waterstofspectrum verklaard wordt met de Lenzvector als verborgen symmetrie [6].

Wij willen in dit stukje een (naar wij menen nieuw) bewijs van de eerste wet van Kepler geven, dat a priori goed gemotiveerd is in zowel fysische als meetkundige termen.

2 Kepler's eerste wet in termen van Euclidische meetkunde.

We zullen inwendig product $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ en uitwendig product $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ van vectoren $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ in de driedimensionale Euclidische ruimte gebruiken met de compatibiliteitsrelaties

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$$

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$$

en de Leibniz product regels

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^{\cdot} = \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{v}}$$

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v})^{\cdot} = \dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \dot{\mathbf{v}}$$

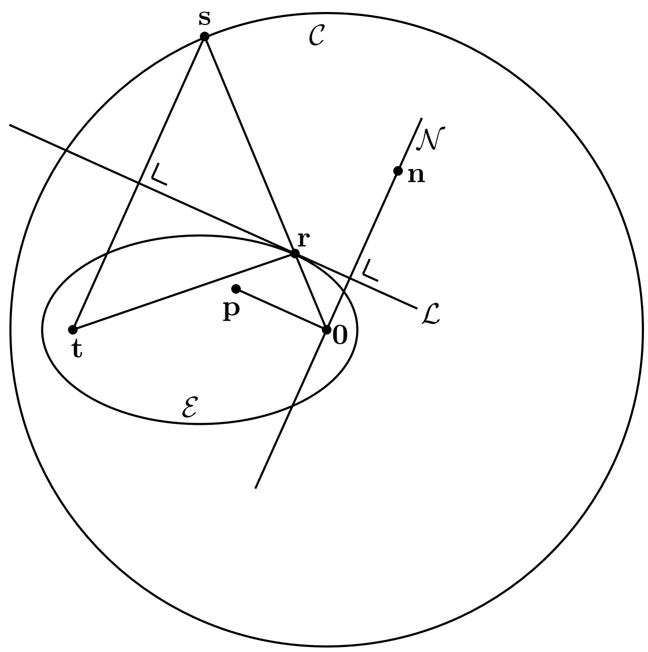
zonder verdere uitleg.

Zoals reeds gezegd is $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ behouden vanwege Newton's bewegingsvergelijking voor een centraal krachtveld $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})\mathbf{r}/r$. Dit leidt tot de perkenwet, ook wel Kepler's tweede wet genaamd, alhoewel Kepler zijn tweede wet drie eerder ontdekte dan wat nu zijn eerste wet heet. Voor een bolsymmetrisch centraal krachtveld $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r)\mathbf{r}/r$ is de som van de kinetische en potentiële energie

$$H = p^2/2\mu + V(r) \ , \ V(r) = -\int f(r)\, dr$$

ook behouden. Dit zijn twee initiële opmerkingen zoals in ieder leerboek over mechanica te vinden.

Vanaf nu zullen we ons beperken tot het Keplerprobleem met $f(r) = -k/r^2$ en $V(r) = -k/r$. Voor vaste energie $H < 0$ is vanwege energiebehoud de beweging begrensd binnen een bol met centrum $\mathbf{0}$ en straal $-k/H$. Inderdaad $H = p^2/2\mu - k/r \geq -k/r$ zodat $k/r \geq -H > 0$ en dus $r \leq -k/H$. Bekijk het onderstaande plaatje van het vlak loodrecht op $\mathbf{L}$.



De cirkel $\mathcal{C}$ met centrum $\mathbf{0}$ en straal $-k/H$ is de rand van de schijf waarbinnen beweging met energie $H < 0$ plaats kan vinden. Deze cirkel wordt wel de valcirkel genoemd, omdat een object met energie H vanuit plaats $\mathbf{r}$ op $\mathcal{C}$ recht naar de oorpsrong zal vallen.

Laat $\mathbf{s} = -k\mathbf{r}/rH$ de projectie zijn van $\mathbf{r}$ vanuit het centrum $\mathbf{0}$ op deze cirkel $\mathcal{C}$. De lijn $\mathcal{L}$ door $\mathbf{r}$ met richtingsvector $\mathbf{p}$ is de raaklijn aan de baan $\mathcal{E}$ in het punt $\mathbf{r}$. Laat $\mathbf{t}$ de orthogonale spiegeling zijn van het punt $\mathbf{s}$ ten opzichte van de lijn $\mathcal{L}$. Als $\mathbf{r}$ loopt in de tijd over de baan $\mathcal{E}$ dan loopt $\mathbf{s}$ over de cirkel $\mathcal{C}$. Het is een goede vraag te onderzoeken hoe het punt $\mathbf{t}$ dan loopt.

Stelling. *Het punt* $\mathbf{t}$ *is gelijk aan* $\mathbf{K}/\mu H$ *en blijft dus behouden.*

Om de lijn van ons argument helder te houden, kan het raadzaam zijn bij eerste lezing onderstaand bewijs even over te slaan, en eerst het Gevolg te begrijpen.

Bewijs. De lijn $\mathcal{N}$ opgespannen door $\mathbf{n} = \mathbf{p} \times \mathbf{L}$ staat loodrecht op $\mathcal{L}$. Het punt $\mathbf{t}$ wordt verkregen door van $\mathbf{s}$ tweemaal de orthogonale projectie van $\mathbf{s} - \mathbf{r}$ op de lijn $\mathcal{N}$ af te trekken, dus

$$\mathbf{t} = \mathbf{s} - 2((\mathbf{s} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}/n^2.$$

Nu hebben we

$$\begin{gathered} \mathbf{s} = -k\mathbf{r}/rH \\ (\mathbf{s} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} = -(H + k/r)\mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{L})/H = -(H + k/r)L^2/H \\ n^2 = p^2L^2 = 2\mu(H + k/r)L^2 \end{gathered}$$

zodat inderdaad

$$\mathbf{t} = -k\mathbf{r}/rH + \mathbf{n}/\mu H = \mathbf{K}/\mu H$$

met $\mathbf{K} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - k\mu\mathbf{r}/r$ de Lenzvector. □

Gevolg. *De baan* $\mathcal{E}$ *is een ellips met brandpunten* $\mathbf{0}$ *en* $\mathbf{t}$, *en lange as gelijk aan* $2a = -k/H$.

Bewijs. Inderdaad geldt

$$|\mathbf{t} - \mathbf{r}| + |\mathbf{r} - \mathbf{0}| = |\mathbf{s} - \mathbf{r}| + |\mathbf{r} - \mathbf{0}| = |\mathbf{s} - \mathbf{0}| = -k/H.$$

Dus is $\mathcal{E}$ een ellips met brandpunten $\mathbf{0}$ en $\mathbf{t}$, en lange as $2a = -k/H$. □

Het bovenstaand bewijs heeft twee voordelen boven de twee eerder genoemde bestaande bewijzen van Kepler's eerste wet. Allereerst is de behouden grootheid $\mathbf{t} = \mathbf{K}/\mu H$ (en daarmee dus ook de Lenzvector $\mathbf{K}$) wel gemotiveerd in fysisch meetkundige zin. Daarnaast gebruiken we de tuinmandefinitie van de ellips (zo genoemd omdat tuinlieden deze constructie ook gebruiken voor de aanleg van ovale bloemperken), als meetkundige plaats van punten waarvoor de som van de afstanden tot twee gegeven (brand)punten constant is.

In de literatuur zijn nog diverse andere bewijzen van de eerste wet van Kepler te vinden, onder andere een meetkundig bewijs van Feynman in een "Lost Lecture"[7] uit 1964. Voor een bespreking hiervan verwijzen we naar een uitgebreidere Engelstalige versie van dit artikel [8].

Voor de volledigheid leiden we Kepler's derde wet af op de standaard manier [4]. De ellips $\mathcal{E}$ heeft numerieke parameters (de lange as is $2a$, de korte as $2b$ en $a^2 = b^2 + c^2$) $a, b, c > 0$ gegeven door $2a = -k/H$, $4c^2 = K^2/\mu^2 H^2 = (2\mu H L^2 + \mu^2 k^2)/\mu^2 H^2$ en $4b^2 = 2HL^2/\mu H^2$. De oppervlakte van het gebied begrensd door $\mathcal{E}$ is gelijk aan

$$\pi ab = LT/2\mu$$

met T de periode van de baan. Inderdaad, $L/2\mu$ is de oppervlakte van de sector uitgeveegd door $\mathbf{r}$ per tijdseenheid. Een directe berekening geeft dan

$$T^2/a^3 = 4\pi^2\mu/k = 4\pi^2/G(m + M).$$

Indien $m \ll M$ vinden we Kepler's derde (harmonische) wet, die zegt dat T^2/a^3 bij benadering hetzelfde is voor alle planeten.

Referenties

[1] I. Newton, Principia Mathematica, New translation by I.B. Cohen and A. Whitman, University of California Press, Berkeley, 1999.

[2] V.I. Arnold, Huygens and Barrow, Newton and Hooke, Birkhauser, Boston, 1990.

[3] D. Speiser, The Kepler problem from Newton to Johann Bernoulli, Archive for History of Exact Sciences 50 (2), August 1996, pp 103-116.

[4] H. Goldstein, Classical Mechanics, Addison-Wesley, 1980 (2nd edition).

[5] H. Goldstein, Prehistory of the "Runge-Lenz"vector, Am. J. Phys. 43 (8), August 1975, pp 737-738.

H. Goldstein, More on the prehistory of the Laplace or Runge-Lenz vector, Am. J. Phys. 44 (11), November 1976, pp 1123-1124.

[6] M.J.G. Veltman, B.Q.P.J. de Wit en G. 't Hooft, Liegroepen in de Fysica, Homepage Gerard 't Hooft: www.phys.uu.nl/ thooft/lectures/lieg.ps

[7] D.L. Goodstein and J.R. Goodstein, Feynman's Lost Lecture: The motion of planets around the sun, Norton, 1996.

[8] Maris van Haandel and Gert Heckman, Teaching the Kepler Laws for Freshman, The Mathematical Intelligencer 31:2 (2009), pp 40-44.