De Regenboog

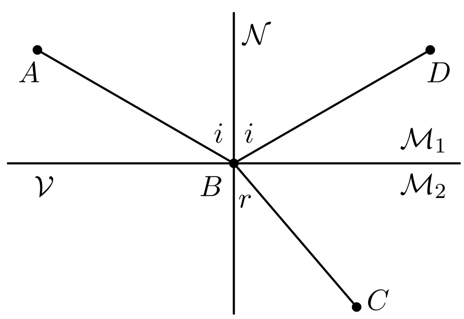
Gert Heckman
IMAPP, Radboud Universiteit, Nijmegen
G.Heckman@math.ru.nl

Voor Jozef Steenbrink, ter gelegenheid van zijn afscheid van de Radboud Universiteit op 17 Februari 2012

1 Wet van Snellius

In 1616 formuleerde de Nederlandse wiskundige Willebrord Snellius de naar hem genoemde wet over breking van licht bij overgang van het ene homogeen optisch medium $\mathcal{M}_1$ naar het andere homogeen optisch medium $\mathcal{M}_2$, gescheiden door een vlak $\mathcal{V}$.

Veronderstel dat een lichtstraal vertrekt vanuit A, en op het grensvlak $\mathcal{V}$ invalt te B. Een deel van het licht breekt te B en komt aan in C. Een ander deel weerkaatst op $\mathcal{V}$ en komt aan te D. De hoek van inval i en de hoek van refractie r zijn de hoeken tussen de invallende lichtstraal en de normaal $\mathcal{N}$ en tussen de gebroken lichtstraal en de normaal $\mathcal{N}$ respectievelijk. De weerkaatste lichtstraal vertrekt te B onder dezelfde hoek i.



De brekingswet van Snellius zegt dat

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n$$

met n een constant getal, de zogenaamde brekingsindex bij overgang van medium $\mathcal{M}_1$ naar medium $\mathcal{M}_2$.

Als $n > 1$ dan is $r < i$ en breekt het licht dus naar de normaal toe. We zeggen in dat geval dat medium $\mathcal{M}_2$ optisch dichter is dan medium $\mathcal{M}_1$. Bijvoorbeeld water is optisch dichter dan lucht, want de brekingsindex van lucht naar water is bij benadering 4/3.

2 Variationeel principe van Fermat

De Franse wiskundige Pierre de Fermat gaf in 1662 een elegante verklaring voor de wet van Snellius. Veronderstel dat het licht in medium $\mathcal{M}_1$ een snelheid v_1 en in medium $\mathcal{M}_2$ een snelheid v_2 heeft. De veronderstelling van een eindige lichtsnelheid was in die tijd geen sinecure. Het variationeel principe van Fermat zegt dat het licht om van A naar C te komen precies die weg kiest, waarvoor de benodigde tijd t, ook wel de optische lengte van die weg genaamd, minimaal is onder alle wegen van A naar C.

Het bewijs van dit principe is eenvoudig door geschikte coordinaten te kiezen. We kiezen $\mathcal{V}$ als de x-as en $A = (x_1, y_1)$, $C = (x_2, y_2)$ voor zekere $x_1 < x_2$, $y_1 > 0$ en $y_2 < 0$. Het punt $B = (x, 0)$ is een variabel punt op $\mathcal{V}$. Zij s_1 de afstand van A tot B, en s_2 de afstand van B tot C. Als t_1 de optische lengte is van A naar B, en evenzo t_2 van B naar C, dan is $v_1 = s_1/t_1$ en $v_2 = s_2/t_2$. De optische lengte t vanuit A via B naar C wordt dus gegeven door

$$t = t_1 + t_2 = s_1/v_1 + s_2/v_2 = \frac{\sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x - x_2)^2 + y_2^2}}{v_2}$$

als functie van x. Met behulp van de kettingregel volgt

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{(x - x_1)}{v_1\sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2}} - \frac{(x_2 - x)}{v_2\sqrt{(x - x_2)^2 + y_2^2}} = \frac{\sin i}{v_1} - \frac{\sin r}{v_2}$$

voor de afgeleide van t naar x. Hierbij dient men voor $x < x_1$ de hoek i negatief te nemen, en evenzo voor $x > x_2$ de hoek r negatief te nemen.

De optische lengte t als functie van x is dus minimaal precies dan als

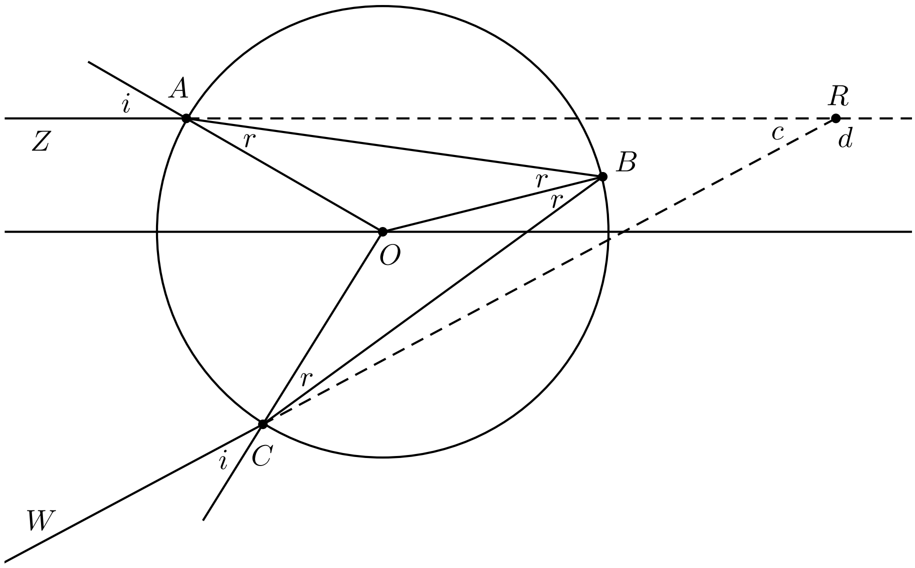
$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2}$$

en dus als de breking verloopt volgens de wet van Snellius met $n = v_1/v_2$. Het nulpunt van de afgeleide van $x \mapsto t(x)$ geeft inderdaad een minimum omdat voor $|x|$ groot ook $t(x)$ groot wordt. Als bonus bij dit bewijs van de wet van Snellius uit het variationeel principe van Fermat vinden we voor de brekingsindex n de verhouding v_1/v_2 van de twee snelheden van het licht in de media $\mathcal{M}_1$ en $\mathcal{M}_2$.

Beredeneer of reken na dat het principe van Fermat ook geldt voor weerkaatsing van een lichtstraal.

3 Verklaring van Descartes

De methode om geschikte coördinaten te kiezen, en dan een meetkundig gesteld probleem op te lossen met rekenen, is afkomstig van Descartes in zijn boek Discours de la Méthode uit 1637. Hierbij werden constructies en redeneringen van de Euclidische meetkunde vervangen door algebra, en het zou enige tijd vergen voordat deze methode universeel geaccepteerd werd. Descartes gaf als eerste de correcte verklaring voor de monochromatische werking van de regenboog.



In bovenstaande figuur is een centrale dwarse doorsnede getekend van een regendruppel. Een lichtstraal vanaf de zon Z breekt op de regendruppel te A, weerkaatst vervolgens tegen de binnenwand van de regendruppel te B, en verlaat tenslotte de regendruppel na breking te C, en wordt opgevangen door een waarnemer W. Een deel van het licht zal te A weerspiegelen op de regendruppel, een ander deel zal na breking te B de druppel verlaten, en weer een ander deel zal te C weerspiegelen op de binnenwand, maar de verklaring van de regenboog zal volgen uit dat deel van het licht wat de in de figuur aangegeven weg verkiest. De brekingen te A en C gaan volgens de wet van Snellius met brekingsindex $n = 4/3$ bij overgang van lucht naar water. De waarnemer ziet de zon virtueel staan in de richting van het punt R. De deviatie of verdraaiingshoek d te R wordt gegeven door

$$d = 2i - 4r + 180^\circ$$

als som van de deviaties $(i-r)$ te A, $(180^\circ - 2r)$ te B en $(i-r)$ te C. Kiezen we onze eenheden zo dat de straal van de regendruppel gelijk aan 1 is, dan geldt voor een invallende lichstraal op hoogte $0 \leq h \leq 1$ van de centrale as

$$h = \sin i = n \sin r$$

volgens de wet van Snellius. In radialen vinden we dus

$$d(h) = 2 \arcsin(h) - 4 \arcsin(h/n) + \pi$$

voor de deviatie $d(h)$ als functie van de hoogte h. Differentiëren van d naar h geeft

$$\frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}h} = \frac{2}{\sqrt{1-h^2}} - \frac{4}{\sqrt{n^2-h^2}}$$

zodat de deviatie als functie van de hoogte een extremum heeft voor

$$h = \sqrt{(4-n^2)/3} = 0.8607$$

vanwege $n = 4/3$. Dit extremum van $h \mapsto d(h)$ is een minimum, want voor $h = 0$ is de afgeleide $\mathrm{d}d/\mathrm{d}h = -1$. De conclusie is dat het complement van de deviatiehoek

$$c = (180^\circ - d) = (4r - 2i)$$

een maximale waarde van 42.03° heeft. De conlusie dat de complementaire deviatiehoek $c = c(h)$ een uniek maximum c_n heeft voor een bepaalde hoogte $0 < h < 1$ blijft geldig zolang de brekingsindex n voldoet aan $1 < n < 2$. Voorts kan men narekenen dat dit maximum c_n als functie van n een dalende functie is.

We tabelleren nu de complementaire hoek $c = 4 \arcsin(3h/4) - 2 \arcsin(h)$ voor hoogte h tussen 0.0 en 1.0.

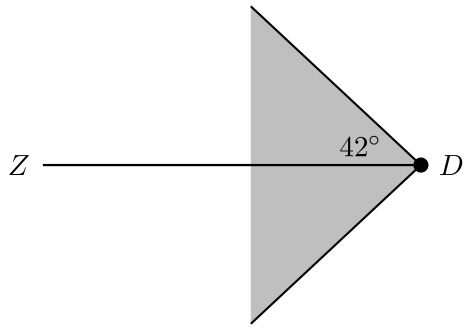
h	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
c	0.00°	5.73°	11.43°	17.10°	22.67°	28.10°

h	0.6	0.7	0.8	0.86	0.9	1.0
c	33.23°	37.82°	41.22°	42.03°	41.50°	14.36°

Uit deze tabel is duidelijk dat de intensiteit van de uittredende lichtwaaier sterk verhoogd is rond het maximum $c = 42.03°$. Aangenomen dat een vaste proportie van de invallende bundel na één interne reflectie uittreedt volgt dat de intensiteit van de uittredende lichtwaaier als functie van de hoek c evenredig is met

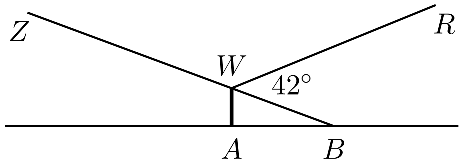
$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}c} = \frac{1}{\mathrm{d}c/\mathrm{d}h}$$

en dus sterk verhoogd is dicht nabij de maximale waarde van $h \mapsto c(h)$.



Een invallende lichtbundel van de zon Z op een regendruppel D wordt naar het bovenstaande argument verstrooid in de richting van de zon binnen een kegel met een hoek van 42°. Het voorstrooide licht heeft een sterk verhoogde intensiteit op de rand van deze kegel.

We concluderen dat we de regenboog slechts kunnen zien als we met onze rug naar de zon staan, en wel onder een hoek van 42° ten opzichte van de richting van de zonnestralen. De lucht onder de regenboog zien we een beetje lichter en boven de regenboog een beetje donkerder. Voorts is het duidelijk dat een waarnemer W te A (met schaduw AB) de regenboog R slechts kan zien, als de zon Z onder een lagere hoek dan 42° staat, dus bij voorkeur aan het begin van de ochtend of het einde van de middag.



Inderdaad, de waarnemer W ziet geen verstrooid licht van regendruppels die onder een grotere hoek dan 42° staan. De regendruppels onder een hoek van 42° zorgen ervoor dat we de regenboog zien onder deze hoek. De regendruppels die voor de waarnemer onder een kleinere hoek dan 42° staan zorgen ervoor dat de waarnemer het binnengebied van de regenboog helderder ziet dan het buitengebied.

Het is natuurlijk ook mogelijk dat het licht binnen de regendruppel niet één maal spiegelt maar vaker, zeg k keer. De deviatie d_k in radialen wordt dan gegeven door

$$d_k = 2(i - r) + k(\pi - 2r) = k\pi + 2i - 2(k + 1)r$$

en dus vinden we

$$d_k(h) = k\pi + 2\arcsin(h) - 2(k + 1)\arcsin(h/n)$$

voor de k-de deviatiehoek als functie van de hoogte h. De afgeleide wordt dus

$$\frac{\mathrm{d}d_k}{\mathrm{d}h} = \frac{2}{\sqrt{1 - h^2}} - \frac{2(k + 1)}{\sqrt{n^2 - h^2}}$$

en deze wordt nul als

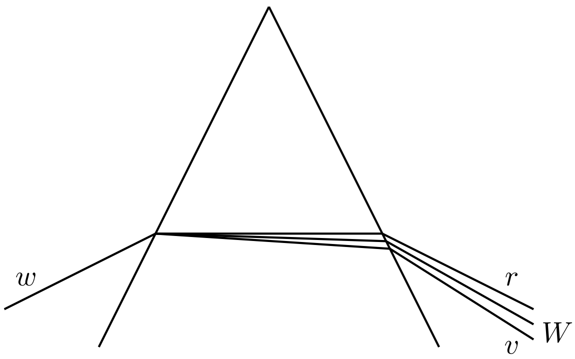
$$h_k = \sqrt{((k + 1)^2 - n^2)/((k + 1)^2 - 1)}$$

met als eerste paar hoogtewaarden $h_1 = 0.8607$, $h_2 = 0.9028$, $h_3 = 0.9481$, $h_4 = 0.9837$, etc. De bijbehorende deviatiehoeken zijn $d_1 = 137.97°$, $d_2 = 233.35°$, $d_3 = 320.33°$, $d_4 = 403.85°$, etc. Merk op dat bij de nulde regenboog geen extremum optreedt, zodat er ook geen nulde regenboog bestaat.

De eerste regenboog zien we zoals al eerder opgemerkt onder een hoek $c_1 = 42.03°$. De tweede regenboog van een lichtstraal, die aan de onderkant van de regendruppel invalt, en naar boven toe twee maal spiegelt, zien we onder een hoek $c_2 = 53.35°$. Deze tweede regenboog kunnen we in bijzondere gevallen nog zien, opnieuw met de rug naar de zon. De derde regenboog kunnen we in theorie zien, kijkend in de richting van de zon, onder een hoek $c_3 = 39.67°$, maar in de praktijk is deze al te zwak om met blote oog waar te nemen. Echter met moderne lasertechniek kunnen we in het laboratorium wel tot de tweehonderdste regenboog waarnemen.

4 Kleuren bij Newton

De werking van kleuren werd verklaard door Isaac Newton aan de hand van zijn bekende prisma experiment in zijn boek Opticks uit 1704. Een nauwe bundel wit licht valt in op een glazen prisma, en breekt naar de normaal toe met een brekingsindex van ongeveer $n = 3/2$, en breekt opniew bij uittreden van de normaal af.



Een waarnemer W ziet niet langer een scherpe bundel wit licht, maar het hele kleuren spectrum: rood, oranje, geel, groen, blauw en violet. Kennelijk varieert de brekingsindex per kleur. Rood licht heeft de kleinste brekingsindex, en violet licht de grootste. Bij breking van lucht naar water is de brekingsindex $n_r = 1.33$ voor rood licht en $n_v = 1.34$ voor violet licht. Voor het complement van de kritische deviatiehoek voor de eerste regenboog vindt men maxima $c_r = 42.52°$ voor rood licht en $c_v = 41.07°$ voor violet licht. Dit verklaart waarom de regenboog van buiten naar binnen van rood naar violet kleurt.

Beredeneer of reken na dat de tweede regenboog precies andersom kleurt.

5 Slotopmerking

Mijn interesse in de regenboog werd gewekt door een prachtig college dictaat uit 1975 over de regenboog van mijn oudcollega Jan de Boer, dat ik toevallig uit een afvalcontainer heb kunnen vissen. In zijn verantwoording schrijft hij:

"De regenboog heeft geen praktisch nut. Vanwaar dan toch dit college? De enige rechtvaardiging ervan ligt in de imponerende schoonheid van de regenboog. En daar gaat het me om in wetenschap: ik ben op zoek naar schoonheid. Mensen zoals Keats hebben betoogd dat je deze schoonheid bederft door theoretische beschouwingen. Voor mij echter wordt de schoonheidsbeleving versterkt door inzicht. De regenboog wordt er mooier door."

Ik denk dat veel natuurwetenschappers zich in deze woorden herkennen. Schoonheid is een van de diepere gronden die ons natuurwetenschappers aanzet tot ons werk. Zo is het maar net!