

Plato, wiskunde en het gymnasium

Het onderstaande is een uitgewerkte versie van de plenaire openingsvoordracht die de auteur hield op de Nationale Gymnasiumdag Scientia non olet op 27 september 2006. Opgemerkt zij dat deze dag geen initiatief is van de Vrienden van het gymnasium maar van het APS in Utrecht. Het formaat van de dag is overigens lovenswaardig: de delegaties van de uitgenodigde scholen bestonden uit een mengsel van schoolleiders, docenten en leerlingen. Meer dan de helft van de categorale gymnasia in Nederland was op die manier vertegenwoordigd.

Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσὶτω: Laat geen 'meetkundige' binnen! Dit opschrift stond volgens de overlevering boven de toegangspoort van Plato's Academie.¹ Met andere woorden: alleen wiskundig geschoolden werden, rond hun twintigste, tot de in een park buiten Athene gelegen Academie toegelaten. Daar wachtte ze vervolgens - naast de in die tijd voor de Atheense elite gebruikelijke lichamelijke opvoeding en muzikale scholing - een tienjarige wiskundestudie, met nadruk op vlakke en ruimtelijke meetkunde en astronomie. Het invoeren van wiskunde in het hoger onderwijs was een belangrijke vernieuwing van Plato. Niettemin paste het vak in zijn ogen naadloos in het traditionele programma: waar sport gymnastiek voor het lichaam is, zag Plato wiskunde als gymnastiek voor de geest. Wie deze tien jaar wiskunde had doorstaan kon op zijn dertigste nog eens verder met een vijfjarige studie van de 'dialectiek' (i.e. filosofie naar Socratisch model), om pas dán in de samenleving terug te keren.²

Wat men ook van een dergelijk curriculum moge denken: uit historisch onderzoek in vooral de afgelopen vijftig jaar is duidelijk geworden dat het begrip wiskunde zoals wij dat nu hanteren in een zeer korte periode is ontstaan in het Athene van Plato en in het bijzonder in diens Academie.³ Deze periode liep van ongeveer 387 v.Chr., het jaar waarin Plato zijn Academie stichtte, tot de dood van Plato op tachtigjarige leeftijd in 348 of 347; naast Plato's eigen vertrek uit het leven verlieten rond die tijd ook Eudoxos (naar verluidt de grootste wiskundige van zijn tijd) en Plato's belangrijkste leerling Aristoteles (in deze geschiedenis de rol spelend van de grondlegger van de logica) Athene. In deze periode van slechts 40 jaar werd een praktische bezigheid die duizenden jaren eerder in de Egyptische en Babylonische beschavingen was ontwikkeld als hulpmiddel bij zaken als landmeetkunde, handel en belastinginning omgezet in een nieuwe wetenschap met een geheel eigen taal en methodiek. De wezenlijke kenmerken van de moderne wiskunde, namelijk haar axiomatisch-deductieve opbouw en het abstracte karakter van wiskundige objecten en

¹ Of het er ook werkelijk stond is omstreden. De eerste referentie dateert uit de vierde eeuw na Chr. en wordt niet ondersteund door archeologisch of ander overtuigend bewijsmateriaal. Zie D.H. Fowler, *The Mathematics of Plato's Academy* (Oxford, 1987).

² We gaan er hier vanuit dat het onderwijsprogramma dat Plato in Boek VII van zijn *Staat* schetst model staat voor zijn Academie. Latere getuigenissen zijn hier niet mee in tegenspraak. De precieze gang van zaken op de Academie is nauwelijks bekend.

³ Zie bijvoorbeeld F. Laserre, *The Birth of Mathematics in the Age of Plato* (Londen, 1964), D.H. Fowler, *The Mathematics of Plato's Academy* (Oxford, 1987) en R. Netz, *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics* (Cambridge, 1999). Het is een wijdverbreid misverstand Pythagoras een belangrijke rol in de geschiedenis van de wiskunde toe te schrijven; zie W. Burkert, *Weisheit und Wissenschaft: Studien zu Pythagoras, Philolaos und Platon* (Nürnberg, 1962). Over de wiskundige activiteiten van Thales van Milete is te weinig bekend om hem in deze context een prominente plaats te geven.

structuren, dateren uit het genoemde tijdvak. Euclides, Archimedes en Apollonios, wier werken in de derde eeuw v.Chr. verschenen, troffen dit raamwerk voltooid aan.

Ofschoon concrete wiskundige resultaten van Plato zelf niet bekend zijn, speelde hij in deze ontwikkeling een beslissende rol. Ten eerste hamerde hij in zijn Academie voortdurend op het belang van de wiskunde. Dit wordt sterk gesuggereerd door dialogen als *Meno*, *Staat*, *Theaitetos*, *Philebos* en *Timaios* en blijkt tevens direct uit latere getuigenissen, met name van Aristoteles.⁴ Zo bood hij een forum waarin het nieuwe vak onder gezaghebbende leiding tot bloei kon komen. Maar zo mogelijk nog belangrijker dan Plato's inspirerende en faciliterende optreden was zijn inzicht dat wiskundige objecten in zekere zin los staan van de empirische werkelijkheid en dus een abstract karakter hebben. Meer nog dan de bewijstheoretische aard van de wiskunde (die goed beschouwd een geïdealiseerde versie van de retoriek is, een vaardigheid die in Athene van groot belang werd geacht) is het deze eigenschap van abstractie die het vak vleugels geeft en zijn ongelofelijke kracht verklaart. Juist de abstractie maakt het namelijk mogelijk om hetzelfde wiskundige instrumentarium in ogenschijnlijk totaal verschillende situaties in te zetten. Om een recent voorbeeld te nemen: precies dezelfde wiskunde beschrijft zowel de symmetrie van de aarde als die van het waterstofatoom. En met een minuscule aanpassing vinden we dezelfde symmetrie zelfs terug bij de allerkleinste deeltjes.

Plato's ontdekking van wiskundige abstractie is nauw verbonden met zijn vormenleer (c.q. ideeënleer, een minder gelukkige naam) en is daar in zekere zin ook de culminatie van, zowel in scherpheid van de formulering als in de nadruk op juist de wiskundige vormen (ten koste van de ethische) in zijn latere geschriften. Volgens deze leer zijn - ruw gezegd - zowel objecten uit de alledaagse waarneming als bepaalde ethische begrippen slechts onvolmaakte afspiegelingen van oorspronkelijke vormen die zich bevinden in een hoger domein dat als het ware achter de empirische werkelijkheid verborgen ligt. Dit domein is niet toegankelijk voor de waarneming, maar uitsluitend voor het denken. In de *Timaios* vinden we bijvoorbeeld de gedachte dat de kosmos op harmonieuze wijze is georganiseerd als een perfecte meetkundige structuur, namelijk een systeem van concentrische bollen. Ook de vijf platonische veelvlakken spelen in dit wereldbeeld een belangrijke rol als wiskundige vormen die achter de waargenomen diversiteit van materiële objecten schuilgaat. Deze wiskundige perfectie is inderdaad abstract en niet zichtbaar: de verschijnselen maken eerder een rommelige dan een harmonieuze, laat staan een 'perfecte' indruk. Plato's inzicht dat achter die verschijnselen niettemin een fraaie wiskundige structuur schuilgaat is daarom een ontdekking van de eerste orde, zonder welke de latere exacte wetenschap onmogelijk of tenminste sterk vertraagd zou zijn geweest.⁵

Door hun nadruk op abstractie kwamen de 'academici' rond Plato niet of nauwelijks toe aan de toepassingen van de wiskunde, ofschoon het vak daar zoals gezegd oorspronkelijk uit voort was gekomen. Zelfs hun werk aan de mechanica had een zuiver theoretisch karakter. Meer was misschien ook niet te verwachten; we mogen niet vergeten dat de academici tot de Atheense elite behoorden en niet hoefden te werken voor hun geld (ook Plato stamde uit een puissant rijke familie). Deze houding heeft het middelbaar onderwijs in de wiskunde tot ver in de twintigste eeuw bepaald. In Nederland bestond dit onderwijs tot 1961 voornamelijk uit Euclidische meetkunde, aangevuld met goniometrie, trigonometrie

⁴ Zie H. Cherniss, *Aristotle's Criticism of Plato and the Academy* (New York, 1962).

⁵ E.J. Dijksterhuis, *De Mechanisering van het Wereldbeeld* (Amsterdam, 1950). Zie ook H. Zwart, *Denkstijlen* (Nijmegen, 2005).

en wat algebra.⁶ Ofschoon deze onderdelen van de zuivere wiskunde wel degelijk toepassingen hebben, namelijk op de landmeetkunde en aanverwante zaken waar het vak uit is voortgekomen, zijn deze ver verwijderd van de wiskunde die in de moderne natuurkunde of in de technologische infrastructuur van de huidige samenleving een rol speelt en daarmee oninteressant voor scholieren.

Plato had zoals opgemerkt gedetailleerde wiskundige ideeën over materie en kosmos, maar deze moeten nu als reine speculatie terzijde worden geschoven. Zijn idee dát er een onderliggende wiskundige beschrijving is hield echter stand, al moest de mensheid ruim 2000 jaar wachten op de eerste succesvolle implementatie van dat idee. Pas in 1687 zou Newton er in zijn *Principia* als eerste daadwerkelijk in slagen om abstracte wiskunde op een precieze en verifieerbare wijze toe te passen op de natuur. Zijn persoon en werk vormen daarom na Plato een tweede hoogtepunt in de geschiedenis van de wiskunde. Sindsdien balanceert de wiskunde op een gezonde wijze tussen abstractie en toepassingen. De abstracte structuren worden vaak gesuggereerd door bepaalde toepassingen, en omgekeerd leert de ontwikkeling van de wiskunde dat hoe hoger de abstractie wordt opgevoerd, des te dieper en spectaculairder de toepassingen zijn. Ook letterlijk, en ten goede of ten kwade: de atoombom had niet kunnen worden ontwikkeld zonder het formalisme van zogenaamde Hilbert-ruimten, ooit het summum van abstractie in de zuivere wiskunde.

Dit duale karakter van de wiskunde heeft zijn weg naar het middelbaar onderwijs helaas nooit gevonden. In het al genoemde jaar 1961 werden in Nederland eindelijk functies, grafieken, differentiatie en integratie op de middelbare scholen ingevoerd, maar deze vernieuwing (die bijna 300 jaar achterliep op de ontwikkelingen in het onderzoek) ging niet gepaard met een geïntegreerde behandeling van de toepassingen die voor Newton juist aanleiding waren geweest deze tak van de wiskunde te ontwikkelen. Sterker nog, de curriculumwijziging van 1961 werd in 1968 gevolgd door de invoering van *Moderne Wiskunde*, een onderwijsmethode die was geïnspireerd door de onzalige *New Math* ideologie uit die tijd. *New Math* was volledig op abstractie en axiomatiek gebaseerd; nog afgezien van het feit dat de meeste leerlingen niet het niveau van de studenten van Plato hadden (en daarom nog steeds nachtmerries over het eindexamen wiskunde hebben) waren de toepassingen van de wiskunde daarbij verder uit zicht dan ooit tevoren.⁷

Een scherpe reactie op deze gang van zaken kon uiteraard niet uitblijven. In 1987 werd onder de noemer van de nieuwe vakken Wiskunde A en B (die Wiskunde 1 en 2 vervingen) het 'realistische rekenen' ingevoerd, dat waar mogelijk gebruik maakt van zogenaamde 'contexten'. Dit had in principe een verheugende ontwikkeling kunnen zijn, waarbij het evenwicht tussen abstractie en toepassingen van de wiskunde zou zijn hersteld. In werkelijkheid verdwenen abstractie en logisch denken echter naar de achtergrond *zonder* te zijn vervangen door echte en interessante toepassingen van de wiskunde. Zulke toepassingen zijn ook onmogelijk zonder eerst of tegelijk de abstracte basis van het vak te doceren. Wat dus overbleef was een slap aftreksel dat nauwelijks de naam wiskunde verdient. In de onderbouw is dat nog niet eens zo'n ramp: de verhaaltjessommen van nu worden daar leuker gevonden dan de wiskunde van vroeger, en dit kan nuttig zijn om de

⁶ Zie F. Goffree, M. van Hoorn en B. Zwaneveld (red.), *Honderd Jaar Wiskundeonderwijs* (Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, Leusden, 2000).

⁷ Hier moet wel worden opgemerkt dat het vak natuurkunde destijds op een aanzienlijk wiskundiger manier werd gegeven dan nu, zodat in de mechanica tenminste nog enige toepassingen van de differentiaalrekening aan bod kwamen. Het punt is echter dat toepassingen onderdeel van de wiskunde zelf zijn en daarom ook zo veel mogelijk in dat vak moeten worden behandeld.

angst voor het vak te overwinnen. In de bovenbouw daarentegen ontbreekt iedere uitdaging voor de leerling, die bovendien niet begrijpt dat de wiskunde belangrijk is voor wetenschap en maatschappij en zich daarom afvraagt waarom het een vereiste is voor veel vervolgopleidingen. Deze laatste klagen vervolgens steen en been over het wiskundig gehalte van hun eerstejaars: de slechte rekenvaardigheid van pabo-studenten is recent veelvuldig in het nieuws geweest en daarnaast heeft vrijwel iedere universiteit en hogeschool de afgelopen jaren uit instaptoetsen en studieresultaten ervaren dat zowel wiskundig inzicht als formulevaardigheid sterk te wensen over laten.

Geen abstractie, geen axioma's, geen bewijzen, maar ook geen echte toepassingen: het wiskundeonderwijs in Nederland is teruggezak tot de tijd vóór Plato! In deze beroerde situatie zitten we nog steeds; de curriculumwijzigingen van 1999 (in verband met de invoering van de profielen) en van 2007 (i.v.m. de herziening van de Tweede Fase, die onder meer de vakken Wiskunde A, B, C met zich meebrengt) hebben de zaak niet verbeterd, in tegendeel. Pas naar de periode na 2010 (de einddatum van de wijzigingen in 2007) kan enigszins hoopvol worden uitgekeken, al was het maar omdat dan Wiskunde D als examenvak wordt ingevoerd.⁸ Het behoeft geen betoog dat ik in het licht van de boven geschetste geschiedenis van de wiskunde een speciale rol en verantwoordelijkheid zie weggelegd voor de gymnasia. Een kritische kanttekening moet me daarbij echter van het hart.

De naam van ons schooltype 'gymnasium' legt ten onrechte de nadruk op een aspect van de Atheense opvoeding dat wij als een steeds minder belangrijk wordende taak van een school beschouwen, namelijk de lichamelijke: sportclubs en ouders kunnen daar beter zorg voor dragen. Maar ach, wat is een naam? Veel ernstiger is dat ook de definiërende en onderscheidende eigenschap van het gymnasium, namelijk het verzorgen van onderwijs in het Grieks en Latijn, een oppervlakkige en volkomen onbelangrijke eigenschap van de bewonderde beschavingen - te weten hun taal - als basis van een schooltype neemt. En dat terwijl de werkelijk bewonderenswaardige prestatie van de antieke Griekse beschaving ook op de gymnasia een ondergeschoven kindje is.⁹ Wát ik als deze prestatie beschouw heeft de lezer inmiddels wel in de gaten, maar om iedere mogelijke twijfel weg te nemen laat ik tot slot Bertrand Russell aan het woord:

*"The pre-eminence of the Greeks appears more clearly in mathematics and astronomy than in anything else. What they did in art, in literature, and in philosophy, may be judged better or worse according to taste, what they accomplished in geometry is wholly beyond question. (...) The art of mathematical demonstration was, almost wholly, Greek in origin."*¹⁰

Klaas Landsman

Hoogleraar wiskunde, Radboud Universiteit Nijmegen, e-mail landsman@math.ru.nl

⁸ Dit is een verrijkingsvak dat zich op de werkelijk geïnteresseerde leerlingen richt.

⁹ Over het Romeinse rijk wil ik het hier liever niet hebben: het bewonderenswaardige van de desbetreffende cultuur is mij nooit duidelijk geworden. Ook de meest begaafde en ambitieuze leerling heeft in die richting m.i. meer aan een serie lessen over een goed geleide multinational dan aan jaren zwoegen om Caesar en Cicero in het origineel te kunnen lezen.

¹⁰ B. Russell, *History of Western Philosophy* (Allen & Unwin, 1946), p. 218.