Forschungsbericht

Dr. Maarten Solleveld

Dieser Bericht beschreibt die Forschung des Verfassers von 2007 bis 2010. Zusammen mit seinen wissenschaftlichen Arbeiten dient der Text zur Unterstützung seines Habilitationsantrags.

1 Reduktive p-adische Gruppen

Sei $\mathbb{F}$ ein nicht-archimedischer lokaler Körper. Er ist der Quotientenkörper von einem lokalen Ring $\mathcal{O}$, dem Ring der ganzen Zahlen in $\mathbb{F}$. Bezeichne $\mathcal{P}$ das maximale Ideal von $\mathcal{O}$ und $\mathfrak{f} = \mathcal{O}/\mathcal{P}$ den Restklassenkörper von $\mathbb{F}$. Wir nehmen an, dass $\mathfrak{f}$ ein endlicher Körper von Charakteristik p ist, dann nennt man $\mathbb{F}$ einen p-adischen Körper. Es gibt zwei Arten von solchen Körpern: wenn $\mathbb{F}$ Charakteristik 0 hat, dann ist er eine endliche Erweiterung vom Körper der p-adischen Zahlen $\mathbb{Q}_p$. Wenn nicht, dann hat $\mathbb{F}$ Charakteristik p und es gilt $\mathcal{O} \cong \mathfrak{f}[[x]]$.

Sei $\mathcal{G}$ eine zusammenhängende reduktive algebraische Gruppe, die über $\mathbb{F}$ definiert ist. Klassische Beispiele sind GL_n, SL_n, SO_n und Sp_n. Gruppen von der Form $G = \mathcal{G}(\mathbb{F})$, wobei $\mathbb{F}$ ein p-adischer Körper ist, heißen reduktive p-adische Gruppen. Die Topologie von $\mathbb{F}$ liefert eine Topologie auf G, welche Hausdorffsch, lokalkompakt und total unzusammenhängend ist.

Die naheliegendsten G-Darstellungen sind die algebraischen, das heißt, Darstellungen auf einem endlich dimensionalen $\mathbb{F}$-Vektorraum V, sodass die Abbildung $G \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ algebraisch ist. Jedoch sagen solche Darstellungen nicht viel über G aus, da es nur wenige davon gibt. In manchen Fällen ist die definierende Darstellung von G als Untergruppe von $GL_n(\mathbb{F})$ sogar die einzige irreduzible algebraische G-Darstellung.

Man braucht eine große Klasse von Darstellungen, welche auch die topologische Struktur von G in Betracht ziehen. Dazu eignen sich vor allem die glatten Darstellungen. Man nennt eine Darstellung von G auf einem Vektorraum (über einem beliebigen Körper) glatt, wenn für jeden Vektor $v \in V$ die Gruppe $G_v = \{g \in G : g \cdot v = v\}$ offen in G ist.

1.1 Komplexe Darstellungen

Glatte G-Darstellungen auf komplexen Vektorräumen sind wichtig in verschiedenen Bereichen, insbesondere im arithmetischen Langlands–Programm. Ein Aspekt davon ist die lokale Langlands–Korrespondenz, eine schöne Parametrisierung des glatten Duals von G. Allerdings ist diese Korrespondenz vorläufig nur eine Vermutung: sie ist bewiesen für $GL_n(\mathbb{F})$, aber offen für fast alle anderen Gruppen.

Das zentrale Problem in diesem Teilgebiet ist also die Klassifikation der glatten irreduziblen Darstellungen. Dazu werden wir jetzt den viel versprechendsten Ansatz beschreiben. Sei $P = M \ltimes U$ eine parabolische Untergruppe von G, wobei U das unipotente Radikal von P ist und M eine Levi–Untergruppe. Zum Beispiel für $G = GL_n(\mathbb{F})$ gibt es P, M und U die aus allen invertierbaren Matrizen der folgenden Gestalt bestehen:

$$P = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} I & 0 & * \\ 0 & I & * \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix},$$

wobei die Sternen für Matrizen der passenden Dimension stehen. Für jede glatte M-Darstellung σ liefert parabolische Induktion eine glatte G-Darstellung $I_P^G(\sigma)$. Wenn σ irreduzibel ist, dann ist auch $I_P^G(\sigma)$ oft irreduzibel. So kann man bereits viele irreduzible G-Darstellungen finden.

Im einfachen Fall, dass P eine Borel–Untergruppe und M ein Torus ist, sind alle irreduzible M-Darstellungen eindimensional. Im Allgemeinen sind Charaktere aber nicht genug, man braucht mehr irreduzible M-Darstellungen. Dabei geht es vor allem um supercuspidale Darstellungen, vergleichbar mit Darstellungen aus der diskreten Reihe einer reellen Lie–Gruppe. Sie sind genau die M-Darstellungen, die sich als Darstellungen einer kompakten Gruppe verhalten (obwohl M nur in Ausnahmefällen kompakt ist).

1.1.1 Die Bernstein–Zerlegung

Bernstein [BeDe] hat bewiesen, dass es für jede irreduzible G-Darstellung π eine parabolische Untergruppe $P = MU$ und eine supercuspidale M-Darstellung σ gibt, sodass π eine Unterdarstellung von $I_P^G(\sigma)$ ist. Das Bild wird klarer, wenn man ähnliche supercuspidale Darstellungen gleichzeitig betrachtet. Sei $X_{nr}(M)$ die Menge aller unverzweigten Charaktere $\chi : M \to \mathbb{C}^\times$. Statt nur σ nehmen wir alle M-Darstellungen der Form $\sigma \otimes \chi$ mit $\chi \in X_{nr}(M)$ und alle G-Konjugierten von $\sigma \otimes \chi$. Bezeichne $\mathfrak{s}$ die Menge aller Paaren (M', σ'), welche man so aus (M, σ) erhalten kann. Sei $\mathrm{Rep}_{\mathfrak{s}}(G)$ die Kategorie der glatten G-Darstellungen π mit der Eigenschaft, dass jeder irreduzible Unterquotient von π enthalten in einer induzierten Darstellung $I_{P'}^G(\sigma')$ mit $(M', \sigma') \in \mathfrak{s}$ ist. Die Bernstein–Zerlegung [BeDe] sagt, dass die Kategorie $\mathrm{Rep}(G)$ der glatten komplexen G-Darstellungen das direkte Produkt von den unterschiedlichen Unterkategorien $\mathrm{Rep}_{\mathfrak{s}}(G)$ ist:

$$\mathrm{Rep}(G) = \prod\nolimits_{\mathfrak{s}} \mathrm{Rep}_{\mathfrak{s}}(G). \tag{1}$$

Zur Klassifikation des glatten Duals von G gibt es also zwei wesentliche Schritte:

(cusp) Klassifiziere alle supercuspidalen Darstellungen von Levi–Untergruppen von G.

(ind) Bestimme alle irreduziblen Darstellungen in $\mathrm{Rep}_{\mathfrak{s}}(G)$ für feste $\mathfrak{s}$.

Beide Schritte haben sich als sehr schwierig erwiesen, und beschäftigen bis heute manche Forscher. Bushnell und Kutzko haben (**cusp**) geschafft für $GL_n(\mathbb{F})$ und $SL_n(\mathbb{F})$, mit ihrer Theorie der "Typen". Für verschiedene andere reduktive Gruppen sind derzeit alle supercuspidale Darstellungen gefunden (aber nicht immer klassifiziert), siehe [Kim].

Für (**ind**) ist es praktisch, eine Algebra zu haben, deren Modulkategorie genau $\mathrm{Rep}_{\mathfrak{s}}(G)$ ist. Hierzu bietet sich die Hecke–Algebra $\mathcal{H}(G)$ an. Nach Definition besteht sie aus allen lokal konstanten Funktionen $G \to \mathbb{C}$ mit kompaktem Träger. Das Produkt in $\mathcal{H}(G)$ ist die Faltung, bezüglich eines Haar–Maßes. Die Algebra $\mathcal{H}(G)$ ist die hier richtige Gruppenalgebra von G, da die Kategorie $\mathrm{Rep}(\mathcal{H}(G))$ mit $\mathrm{Rep}(G)$ identifiziert werden kann.

Die Bernstein–Zerlegung (1) liefert somit ein zweiseitiges Ideal $\mathcal{H}_{\mathfrak{s}}(G) \subset \mathcal{H}(G)$, sodass $\mathrm{Rep}(\mathcal{H}_{\mathfrak{s}}(G)) \cong \mathrm{Rep}_{\mathfrak{s}}(G)$. Dennoch ist diese Algebra $\mathcal{H}_{\mathfrak{s}}(G)$ für die interessantesten Zwecke zu großund hat außerdem keine Eins. Glücklicherweise stellt sich heraus, dass $\mathcal{H}_{\mathfrak{s}}(G)$ in vielen Fällen Morita–äquivalent ist zu einer Algebra von einem deutlich bequemeren Typ, nämlich eine affine Hecke–Algebra. So kann das Problem (**ind**) großteils zurückgeführt werden auf das entsprechende Problem für affine Hecke–Algebren, siehe Abschnitt 2.

Zum Beispiel sei I eine Iwahori–Untergruppe von G. Nenne eine glatte G-Darstellung V Iwahori–spherisch, wenn sie erzeugt wird von der Menge V^I ihrer I-invarianten Vektoren. Sei $\mathcal{H}(G, I)$ die Unteralgebra der I-biinvarianten Funktionen in $\mathcal{H}(G)$. Nach Borel bilden die Iwahori–spherische Darstellungen einen Bernstein–Komponent $\mathrm{Rep}_{\mathfrak{s}}(G)$, welcher Morita–äquivalent ist zu $\mathrm{Rep}(\mathcal{H}(G, I))$. Außerdem haben Iwahori und Matsumoto [IwMa] explizit beschrieben, dass und zu welcher affinen Hecke–Algebra $\mathcal{H}(G, I)$ isomorph ist. In [Sol4, Section 1.6] steht eine Übersicht von allen Bernstein–Komponenten $\mathfrak{s}$, für die etwas ähnliches bekannt ist.

1.2 Nichtkommutative Geometrie

Man kann (**ind**) auch direkter angehen. Es geht also um die Zerlegung von parabolisch induzierten Darstellungen $I_P^G(\sigma)$, wobei σ eine supercuspidale M-Darstellung ist. Da Schritt (**cusp**) nicht vollendet ist, darf man keine weitere Eigenschaften von σ voraussetzen, sie bleibt abstrakt. Die verfügbaren Techniken kommen stattdessen von den Beziehungen zwischen G, P und M, wobei eine ausschlaggebende Rolle reserviert ist für Intertwining–Operatoren zwischen verschiedenen induzierten Darstellungen, wie konstruiert von Harish-Chandra [Wal].

1.2.1 Die Aubert–Baum–Plymen–Vermutung

Es ist bekannt, dass $\mathrm{Hom}_G\big(I_P^G(\sigma), I_{P'}^G(\sigma')\big)$ nur dann nicht Null ist, wenn die Paaren (M, σ) und (M', σ') G-konjugiert sind. Beschränkt man sich auf Darstellungen von der Form $I_P^G(\sigma \otimes \chi)$ mit festem (M, σ), dann kommen alle Intertwining–Operatoren von Elementen der Gruppe

$$N(M, \sigma) := \{g \in G : (M^g, \sigma^g) \cong (M, \sigma \otimes \chi) \text{ für ein } \chi \in X_{nr}(M)\}.$$

Die Gruppe M ist normal in $N(M, \sigma)$ und liefert ausschließlich triviale Intertwining–Operatoren. Es geht also um die endliche Gruppe

$$W_\sigma := N(M, \sigma)/M,$$

die Weyl–Gruppe von (M, σ). Sei D_σ die Menge aller M-Darstellungen der Form $\sigma \otimes \chi$ mit $\chi \in X_{nr}(M)$. Da $X_{nr}(M)$ ein komplexer algebraischer Torus ist und da es nur endlich viele $\chi \in X_{nr}(M)$ gibt, sodass $\sigma \cong \sigma \otimes \chi$, ist auch D_σ ein komplexer Torus. Außerdem ist D_σ versehen mit einer algebraischen W_σ-Wirkung. Der Intertwining–Operator $I(w)$ gehörend zu $w \in W_\sigma$ besteht aus Elementen

$$I(w, \chi) \in \mathrm{Hom}_G\big(I_P^G(\sigma \otimes \chi), I_P^G(w(\sigma \otimes \chi))\big).$$

Als Funktion von $\chi \in X_{nr}(M)$ ist $I(w)$ rational und $I(w, \chi)$ ist ein Isomorphismus wenn er regulär ist. Die Singularitäten von den $I(w)$ deuten immer auf reduzible Darstellungen $I_P^G(\sigma \otimes \chi)$, aber sie sind nicht einfach zu bestimmen.

Bereits Bernstein [BeDe] hat gezeigt, dass das Zentrum der Kategorie $\mathrm{Rep}_{\mathfrak{s}}(G)$ isomorph ist zur Algebra $\mathbb{C}[D_\sigma]^{W_\sigma}$ der regulären Funktionen auf D_σ / W_σ. Dies bedeutet, dass die meisten Darstellungen $I_P^G(\sigma \otimes \chi)$ irreduzibel sind und dass die χ in unterschiedlichen W_σ-Bahnen inäquivalente Darstellungen liefern. Es sagt aber nichts über die irreduziblen Unterquotienten von $I_P^G(\sigma \otimes \chi)$ aus, wenn diese Darstellung reduzibel ist.

Dazu haben Aubert, Baum und Plymen [ABP] eine interessante Vermutung veröffentlicht, die wir kurzweg als ABP–Vermutung bezeichnen werden. Sie beschreibt den Raum $\mathrm{Irr}_{\mathfrak{s}}(G)$ der irreduziblen Darstellungen in $\mathrm{Rep}_{\mathfrak{s}}(G)$ mit einfachen geometrischen Mitteln, nämlich mit der Wirkung von W_σ auf D_σ. Man braucht den erweiterten Quotient $\widetilde{D_\sigma} / W_\sigma$, wobei

$$\widetilde{D_\sigma} = \{(\sigma \otimes \chi, w) \in D_\sigma \times W_\sigma : w(\sigma \otimes \chi) = \sigma \otimes \chi\}.$$

Die Beziehung zum normalen Quotient D_σ / W_σ ist, grob gesagt, dass man einen Punkt $W_\sigma d \in D_\sigma / W_\sigma$ ersetzt hat durch die Menge der Konjugationsklassen im Stabilisator von $d \in D_\sigma$. Es ist leicht zu sehen, dass das Dual der Algebra $\mathbb{C}[D_\sigma] \rtimes W_\sigma$ parametrisiert werden kann durch $\widetilde{D_\sigma} / W_\sigma$. Die ABP–Vermutung besagt, dass dieser erweiterte Quotient auch $\mathrm{Irr}_{\mathfrak{s}}(G)$ parametrisiert, wobei zusätzlich beschrieben wird, wie die zentralen Charaktere sich verhalten sollen. Aus einer stärkeren Version der ABP–Vermutung, welche wir hier nicht erläutern können, folgt weiter, dass die Algebren $\mathbb{C}[D_\sigma] \rtimes W_\sigma$ und $\mathcal{H}_{\mathfrak{s}}(G)$ dieselbe periodische zyklische Homologie haben.

Satz 1.1. [Sol4, Section 5.4]
Die ABP–Vermutung ist wahr für alle Bernstein–Komponenten $\mathfrak{s}$, für die $\mathcal{H}_{\mathfrak{s}}(G)$ Morita–äquivalent zu einer affinen Hecke–Algebra ist.

1.2.2 Die Baum–Connes–Vermutung

Verwandt mit der ABP–Vermutung, aber allgemeiner, ist die Baum–Connes–Vermutung. Sie vergleicht zwei K-Gruppen: einerseits die topologische K-Theorie $K_*(C_r^*(G))$ der reduzierten C^*-Algebra von G, andererseits die äquivariante K-Homologie $K_*^G(\mathcal{B}(G))$ von einem G-Raum $\mathcal{B}(G)$, welcher für reduktive p-adische Gruppen das Bruhat–Tits–Gebäude ist. Die darstellungstheoretische Bedeutung ist vor allem, dass $K_0(C_r^*(G))$ gebaut wird aus projektiven $C_r^*(G)$-Moduln und deswegen einiges aussagt über die Zerlegung der regulären Darstellung $L^2(G)$ in Irreduzible.

Aus [Laf] wissen wir, dass die Baum–Connes–Vermutung wahr ist für große Klassen von Gruppen, worunter alle reduktiven p-adischen Gruppen. Für solche Gruppen gibt es auch eine rein algebraische Version der Baum–Connes–Vermutung, die deutlich leichter zu beweisen ist [HiNi]. In dieser Fassung wird die periodische zyklische Homologie $HP_*(\mathcal{H}(G))$ der Hecke Algebra verglichen mit der äquivarianten Kogarbenhomologie $CH^G_*(\mathcal{B}(G))$ des Bruhat–Tits–Gebäudes. Letzeres ist durch einen äquivarianten Chern–Charakter [Voi] isomorph zu $K^G_*(\mathcal{B}(G)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$.

In [Sol1] habe ich gezeigt, dass die algebraische und topologische Version der Baum–Connes–Vermutung äquivalent sind. Dazu muß man die K-Theorie von $C^*_r(G)$ in Zusammenhang stellen mit der periodischen zyklischen Homologie von $\mathcal{H}(G)$, was nicht sofort möglich ist, da es wesentlich andere Algebren betrifft. Die Lösung ist, dass man Harish-Chandra's Schwartz–Algebra $\mathcal{S}(G)$ als Brücke zwischen der algebraischen und der topologischen Seite benutzt. Die Algebra $\mathcal{S}(G)$ besteht aus lokal konstanten Funktionen $G \to \mathbb{C}$ die schnell abfallen, aber (in Gegenteil zu Elementen der Hecke Algebra) keinen kompakten Träger haben müssen. Diese Schwartz–Algebra spielt eine zentrale Rolle in der harmonischen Analysis auf G, sie enthält viel mehr Information als die C^*-Algebra $C^*_r(G)$. In der nichtkommutativen Geometrie hat $\mathcal{S}(G)$ den Vorteil, dass sowohl ihre topologische K-Theorie als auch ihre periodische zyklische Homologie sinnvolle Invarianten sind. Mit Hilfe von darstellungstheoretischen Methoden und von dem Plancherel–Satz für $\mathcal{S}(G)$ [Wal] habe ich gezeigt, dass $\mathcal{H}(G)$ und $\mathcal{S}(G)$ dieselbe periodische zyklische Homologie haben.

Satz 1.2. [Sol1, Section 3]
Obige Homologiegruppen liefern ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} K^G_*(\mathcal{B}(G)) & \to & K_*(C^*_r(G)) & \leftrightarrow & K_*(\mathcal{S}(G)) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ CH^G_*(\mathcal{B}(G)) & \leftrightarrow & HP_*(\mathcal{H}(G)) & \to & HP_*(\mathcal{S}(G)). \end{array}$$

Hier sind alle horizontalen Pfeile natürliche Isomorphismen, und die vertikalen Pfeile sind Chern–Charaktere, die Isomorphismen werden, wenn man die K-Gruppen mit $\mathbb{C}$ tensoriert (über $\mathbb{Z}$).

Mit diesem Diagramm kann man einen alternativen Beweis der Baum–Connes–Vermutung für reduktive p-adische Gruppen geben.

1.3 Modulare Darstellungen

Deutlich schwieriger als komplexe Darstellungen sind Darstellungen auf Vektorräumen über einen beliebigen Körper $\mathbb{K}$. Wenn $\mathbb{K}$ Charakteristik l hat spricht man von l-modularen Darstellungen [Vig]. Wir setzen voraus, dass $l \neq p$, weil viele übliche Techniken schlecht funktionieren im Fall $l = p$.

Folgend dem Ansatz vom komplexen Fall würde man gerne die Klassifikation der irreduziblen l-modularen Darstellungen zurückführen auf supercuspidale Darstellungen und parabolische Induktion. Leider ist das aus mehreren Gründen unmöglich. Die Probleme fangen bereits an bei den l-modularen supercuspidalen Darstellungen: diese haben nicht alle schönen Eigenschaften von komplexen supercuspidalen Darstellungen.

Deswegen gibt es im Allgemeinen keine Bernstein–Zerlegung für l-modulare glatte Darstellungen.

Sowieso sind in der modularen Darstellungstheorie manche grundlegende Fragen noch nicht so ausführlich studiert worden, wie für komplexe Darstellungen. Zum Beispiel Spuren zulässiger Darstellungen. Man nennt eine glatte G-Darstellung (π, V) zulässig, falls für jede kompakte offene Untergruppe $K \subset G$ der Raum

$$V^K = \{v \in V : \pi(k)v = v \ \forall k \in K\}$$

endliche Dimension hat. Der Operator $\pi(g) \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ liegt nicht für alle $g \in G$ in der Spurklasse, da V üblicherweise unendliche Dimension hat. Dennoch wirkt jedes Element $f \in \mathcal{H}(G, \mathbb{K})$ als ein Operator von endlichem Rang auf V und hat somit eine Spur $\mathrm{tr}(\pi(f)) \in \mathbb{K}$. Dies definiert eine Distribution $\theta_\pi : \mathcal{H}(G, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, der Charakter von π.

Satz 1.3. [Harish-Chandra]
Sei (π, V) eine zulässige komplexe G-Darstellung. Dann gilt:

(a) *$\pi(g)$ hat eine wohldefinierte Spur, wenn $g \in G$ in der Menge G_{rss} der regulären halbeinfachen Elementen liegt.*

(b) *Diese Spur ist eine lokal konstante Funktion $\mathrm{tr}_\pi : G_{rss} \to \mathbb{C}$.*

(c) *Erweitert man tr_π um 0 auf $G \setminus G_{rss}$, dann ist sie lokal integrierbar und stellt die Distribution θ_π dar:*

$$\theta_\pi(f) = \int_G f(g)\mathrm{tr}_\pi(g)\mathrm{d}g \qquad \forall f \in \mathcal{H}(G).$$

Satz 1.3 bildet die Grundlage für das weitere Studium der komplexen Charakteren auf G, zum Beispiel ihre asymptotische Entwicklung in einer Umgebung von $1 \in G$.

Zusammen mit Ralf Meyer habe ich Charaktere von zulässigen l-modularen Darstellungen studiert [MeSo2]. Für derartige Darstellungen haben wir die Teile (a) und (b) von Satz 1.3 bewiesen, indem wir eine explizite Umgebung eines Elementen $g \in G_{rss}$ bestimmten, worauf diese Spur konstant ist. Ob Teil (c) auch mit $\mathbb{K}$ statt $\mathbb{C}$ gilt, bleibt allerdings unklar. Ein Grund ist, dass das Integral nicht für alle $f \in \mathcal{H}(G, \mathbb{K})$ definiert werden kann, wenn $\mathrm{tr}_\pi : G \to \mathbb{K}$ nicht lokal konstant ist.

Harmonische Analysis es am erfolgreichsten mit komplexen Koeffizienten, mit Koeffizienten aus einem beliebigen Körper $\mathbb{K}$ ist weniger möglich. Deshalb ist der Beweis der Existenz und der lokalen Konstanz von Charakteren auf G_{rss} zwangsläufig anders über $\mathbb{K}$ als über $\mathbb{C}$. Ralf Meyer und ich benutzen dazu das Bruhat–Tits–Gebäude $\mathcal{B}(G)$ und bestimmte Untergruppen $U_F^{(e)}$, die eingeführt wurden von Schneider und Stuhler [ScSt]. In [MeSo1] haben wir die geometrischen Eigenschaften von $\mathcal{B}(G)$ eingesetzt um projektive Auflösungen von beliebigen glatten Darstellungen V zu konstruieren. Eine solche Auflösung besteht aus Summanden $V^{U_F^{(e)}}$, einem für jede Facette F des Gebäudes. Eine Art Lefschetz–Fixpunktformel erlaubt es für kompakte Elemente $g \in G_{rss}$, um zur Berechnung von $\mathrm{tr}_\pi(g)$ nur die Räume $V^{U_F^{(e)}}$ zu betrachten, wofür die Facette F g-stabil ist. Eine genauere Betrachtung von festen Punkten im Gebäude $\mathcal{B}(G)$ [MeSo2] und einige Bruhat–Tits–Theorie führen dann zum Beweis.

2 Affine Hecke–Algebren

Der Ursprung der affinen Hecke–Algebren liegt in der Darstellungstheorie von reduktiven p-adischen Gruppen. In Gegenteil zu den Algebren $\mathcal{H}_\mathfrak{s}$ aus Abschnitt 1.2 haben sie eine einfache Präsentation mit Erzeugern und Relationen und dadurch ist es nicht verwunderlich, dass sie auch in diversen anderen Teilgebieten der Mathematik auftreten. Zum Beispiel kann man bestimmte Invarianten von Knoten beschreiben mit Elementen solcher Algebren und werden einige physisch relevante integrierbare Systeme gelöst mit ihren Darstellungen. Weiter geben die kombinatorische Aspekte von affinen Hecke–Algebren Anlass zu Kazhdan–Lusztig–Polynome, die in der Darstellungstheorie von halbeinfachen Lie–Gruppen gebraucht werden. Mittlerweile gibt es eine ganze Familie von verwandten Hecke–Algebren, welche alle ihre spezifischen Eigenschaften haben. In diesem Bericht beschränken wir uns auf affine Hecke–Algebren und ihre gradierten Versionen [Lus].

2.1 Definition und grundlegende Eigenschaften

Sei (W, S) ein Coxeter–System mit Längenfunktion $\ell : W \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Dann wird die Multiplikation in der Gruppenalgebra $\mathbb{C}[W]$ festgelegt durch die Regeln

$$\begin{array}{rcll} T_s \cdot T_s & = & T_e = 1 & \text{für alle } s \in S, \\ T_w \cdot T_v & = & T_{wv} & \text{falls } \ell(w) + \ell(v) = \ell(wv). \end{array}$$

Wir können $\mathbb{C}[W]$ deformieren zu einer Iwahori–Hecke–Algebra $\mathcal{H}(W, q)$ mit einem Parameter $q \in \mathbb{C}^\times$. Nach Definition hat $\mathcal{H}(W, q)$ eine Basis $\{N_w : w \in W\}$, welche die folgenden Rechenregeln erfüllt:

$$\begin{array}{rcll} (N_s - q^{1/2})(N_s + q^{-1/2}) & = & 0 & \text{für alle } s \in S, \\ N_w \cdot N_v & = & N_{wv} & \text{falls } \ell(w) + \ell(v) = \ell(wv). \end{array} \tag{2}$$

Diese Deformation ist schnell zu analysieren, wenn W endlich ist. Da $\mathbb{C}[W]$ eine halbeinfache Algebra ist und (2) algebraisch in $q^{1/2}$, sagt der Tits–Deformationssatz, dass $\mathcal{H}(W, q)$ isomorph zu $\mathbb{C}[W]$ ist für fast alle $q \in \mathbb{C}^\times$. Falls $\mathcal{H}(W, q)$ nicht isomorph zu $\mathbb{C}[W]$ ist, dann ist sie auch nicht halbeinfach. Dies kann nur auftreten, wenn $q \in \mathbb{C}^\times$ eine Einheitswurzel ist.

Wenn W unendlich ist, dann ist alles komplizierter: es kann viele nicht-isomorphe Algebren unter den $\mathcal{H}(W, q)$ geben, sogar wenn diese halbeinfach sind. Am Interessantesten sind die kleinsten unendlichen Coxeter–Gruppen, die affinen Weyl–Gruppen. Die entsprechenden Algebren $\mathcal{H}(W, q)$ sind die Muster der affinen Hecke–Algebren.

Für die Beziehung zu p-adischen Gruppen braucht man dennoch eine Verallgemeinerung dieser Konstruktion. Sei

$$\mathcal{R} = (X, R_0, Y, R_0^\vee, F_0)$$

ein basiertes, reduziertes Wurzeldatum. Das heißt unter anderen, dass X und Y duale Gitter von endlichem Rang sind, dass $R_0 \subset X$ und $R_0^\vee \subset Y$ reduzierte Wurzelsysteme sind, die ebenfalls dual zu einander sind und dass F_0 eine Basis von R_0 ist. Die Weyl–Gruppe W_0 von R_0 wirkt auf X und auf Y. Es ist bekannt, dass $W^{\mathrm{aff}} := \mathbb{Z}R_0 \rtimes W_0$

eine Coxeter–Gruppe ist, ein direktes Produkt von affinen Weyl–Gruppen. Deswegen nennt man

$$W^e := X \rtimes W_0$$

die (erweiterte) affine Weyl–Gruppe von $\mathcal{R}$. Die Basis F_0 von R_0 definiert ein Erzeugendensystem S^{aff} von W^{aff} und die Längenfunktion ℓ von $(W^{\text{aff}}, S^{\text{aff}})$ lässt sich auf natürliche Weise erweitern auf W^e. Eine Parameterfunktion für $\mathcal{R}$ ist eine Abbildung $q : S^{\text{aff}} \to \mathbb{C}^\times$, sodass $q(s) = q(s')$ wenn s und s' konjugiert sind in W^e. Zusammen mit q wählen wir auch eine Wurzel $q^{1/2}$. Jetzt können wir eine allgemeine affine Hecke–Algebra $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathcal{R}, q)$ definieren. Als $\mathbb{C}$-Vektorraum hat sie eine Basis $\{N_w : w \in W^e\}$, und ihre Multiplkation wird bestimmt durch

$$\begin{array}{lcll} (N_s - q(s)^{1/2})(N_s + q(s)^{-1/2}) & = & 0 & \text{für alle } s \in S, \\ N_w \cdot N_v & = & N_{wv} & \text{falls } \ell(w) + \ell(v) = \ell(wv). \end{array} \tag{3}$$

Wir bemerken, dass man solche Algebren nicht für beliebige Gruppen konstruieren kann. Man braucht die explizite Präsentation einer Coxeter–Gruppe, damit (3) tatsächlich eine assoziative Algebra definiert.

Für manche Zwecke ist die Bernstein–Präsentation von $\mathcal{H}(\mathcal{R}, q)$ bequemer:

Satz 2.1. [Lus]

(*a*) *Es gibt eine kommutative Unteralgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}(\mathcal{R}, q)$, die isomorph zu $\mathbb{C}[X]$ ist.*

(*b*) *Die Multiplikationsabbildung $\mathcal{A} \otimes \mathcal{H}(W_0, q) \to \mathcal{H}(\mathcal{R}, q)$ ist eine lineare Bijektion.*

(*c*) *Die Multiplikation in $\mathcal{H}(\mathcal{R}, q)$ wird völlig beschrieben durch die Multiplikation in $\mathcal{A}$, die Multiplikation in $\mathcal{H}(W_0, q)$ und durch die Kommutatoren von Elementen aus $\mathcal{A}$ und $\mathcal{H}(W_0, q)$, wofür es explizite Formel gibt.*

(*d*) *Das Zentrum von $\mathcal{H}(\mathcal{R}, q)$ ist $\mathcal{A}^{W_0} \cong \mathbb{C}[X]^{W_0}$.*

Wenn T den komplexe Torus $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, \mathbb{C}^\times)$ bezeichnet, dann ist

$$Z(\mathcal{H}) = \mathcal{A}^{W_0} \cong \mathbb{C}[X]^{W_0} \cong \mathbb{C}[T]^{W_0} = \mathbb{C}[T/W_0]$$

die Algebra der regulären Funktionen auf T/W_0. Bemerke die Ähnlichkeit zum Zentrum der Kategorie $\text{Rep}_{\mathfrak{s}}(G)$, diese ist keineswegs zufällig.

2.1.1 Gleiche oder ungleiche Parameter

Man spricht von affinen Hecke–Algebren mit gleichen Parametern, falls $q(s) = q(s')$ für alle $s, s' \in S^{\text{aff}}$ (und dann schreibt man einfach q für $q(s)$). Dies ist der klassische Fall, zuerst studiert von Iwahori und Matsumoto. Sei I eine Iwahori–Untergruppe einer reduktiven p-adischen Gruppe $G = \mathcal{G}(\mathbb{F})$ mit Wurzeldatum $\mathcal{R}$ und sei $\mathcal{H}(G, I)$ die Algebra der I-biinvarianten Funktionen in $\mathcal{H}(G)$. Nach [IwMa] ist $\mathcal{H}(G, I)$ isomorph zu $\mathcal{H}(\mathcal{R}^\vee, q)$. Hierbei ist $\mathcal{R}^\vee = (Y, R_0^\vee, X, R_0, F_0^\vee)$ und q ist die Anzahl der Elementen des Restklassenkörpers $\mathfrak{f}$ von $\mathbb{F}$.

Mit Hilfe der Geometrie der Lie–Gruppe $\mathcal{G}(\mathbb{C})$ haben Kazhdan und Lusztig die irreduziblen Darstellungen von $\mathcal{H}(G, I) \cong \mathcal{H}(\mathcal{R}^\vee, q)$ klassifiziert [KaLu]. Diese

Klassifikation ist im völligen Einklang mit der lokalen Langlands–Korrespondenz für G. Später wurde entdeckt, dass es manche andere Unteralgebren von $\mathcal{H}(G)$ gibt, die Morita–äquivalent zu einer affinen Hecke–Algebra sind. Diese Hecke–Algebren haben positive Parametern $q(s)$, welche aber nicht immer für alle $s \in S^{\mathrm{aff}}$ gleich sind. Wie im Abschnitt 1.1 erläutert ist es wichtig, um die irreduziblen Darstellungen von solchen Algebren zu klassifizieren. Leider funktioniert die Kazhdan–Lusztig–Theorie nicht in dem Fall von ungleichen Parametern, sodass alternative Techniken erforderlich sind.

Wir besprechen zwei Strategien, die ich vorangetrieben habe. Einerseits wenden wir Harish-Chandra's "philosophy of the cusp form" auf affine Hecke–Algebren an, indem wir alle irreduzible Darstellung konstruieren durch parabolische Induktion von Darstellungen aus der diskreten Reihe. Andererseits werden wir die Parameterfunktion q stetig deformieren, um die Darstellungstheorie von $\mathcal{H}(\mathcal{R}, q)$ mit der von W^e zu vergleichen. Wir bemerken, dass dies unmöglich ist in der Welt der p-adischen Gruppen, da die Zahlen $q(s)$ dort immer Primzahlpotenze sind.

Weil es für die meisten Resultate erforderlich ist, setzen wir ab jetzt voraus, dass $q(s) \in \mathbb{R}_{>0}$ für alle $s \in S^{\mathrm{aff}}$. Die kommenden Abschnitte sind leider etwas technischer als die vorherigen, was aber notwendig ist, um den langen Weg zu den Endergebnissen anständig zu besprechen.

2.2 Die diskrete Reihe und parabolische Induktion

Die Darstellungen der diskreten Reihe entsprechen quadratisch integrierbaren Darstellungen von lokalkompakten Gruppen. Nach Definition gehört eine irreduzible $\mathcal{H}(\mathcal{R}, q)$-Darstellung zur diskreten Reihe, wenn für all ihre Matrixkoeffizienten f gilt, dass die Funktion

$$W^e \to \mathbb{R} : w \mapsto |f(N_w)|$$

in $L^2(W^e)$ liegt.

Um die Bedeutung dieser Reihe zu erklëren, brauchen wir parabolische Induktion. Parabolische Unteralgebren von $\mathcal{H}(\mathcal{R}, q)$ werden indexiert durch Mengen von einfachen Wurzeln von $\mathcal{R}$. Für jede $P \subset F_0$ gibt es Wurzeldaten

$$\mathcal{R}^P = (X, R_P, Y, R_P^\vee, P) \quad \text{und} \quad \mathcal{R}_P = (X_P, R_P, Y_P, R_P^\vee, P),$$

wobei R_P das von P erzeugte Wurzelsystem ist und $X_P = X/X \cap (P^\vee)^\perp$. Diese ergeben affine Hecke–Algebren

$$\mathcal{H}^P = \mathcal{H}(\mathcal{H}^P, q_P) \quad \text{und} \quad \mathcal{H}_P = \mathcal{H}(\mathcal{R}_P, q_P).$$

Die Beziehung zwischen diesen Beiden entspricht der zwischen einer Levi–Untergruppe und ihrem maximalen halbeinfachen Quotient. Zum Beispiel für $P = \emptyset$ gilt $\mathcal{H}^\emptyset = \mathcal{A}$ und $\mathcal{H}_\emptyset = \mathbb{C}$. Für jede

$$t \in T^P = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(X/(X \cap QP), \mathbb{C}^\times\big)$$

gibt es einen surjektiven Algebrahomomorphismus $\phi_t : \mathcal{H}^P \to \mathcal{H}_P$. Somit können wir für jede $\mathcal{H}_P$-Darstellung ρ die parabolische induzierte Darstellung

$$\pi(P, \rho, t) = \mathrm{Ind}_{\mathcal{H}^P}^{\mathcal{H}}(\rho \circ \phi_t)$$

bilden. Induktion von $\mathcal{H}^P$ nach $\mathcal{H}$ wird hier gegeben durch ein Tensorprodukt von Moduln: $\mathrm{Ind}_{\mathcal{H}^P}^{\mathcal{H}}(V) = \mathcal{H} \otimes_{\mathcal{H}^P} V$. Wir sagen, dass ein Induktionsdatum ein Tripel (P, δ, t) ist, wobei $P \subset F_0, t \in T^P$ und δ eine Darstellung der diskreten Reihe von $\mathcal{H}_P$ ist. Eine erweiterte Version der Langlands–Klassifikation für affine Hecke–Algebren besagt:

Satz 2.2. [Sol4, Section 2.2]

(a) *Für jede irreduzible $\mathcal{H}(\mathcal{R}, q)$-Darstellung ρ gibt es ein Induktionsdatum (P, δ, t) mit $\log|t|$ positiv, sodass ρ ein Quotient von $\pi(P, \delta, t)$ ist.*

(b) *Unter den Bedingungen von (a) ist (P, δ, t) im Wesentlichen eindeutig.*

Mit Satz 2.2 kann man, wie für reduktive p-adische Gruppen, die Klassifikation der irreduziblen $\mathcal{H}$-Darstellungen in zwei Schritte aufteilen:

(disc) Klassifiziere die diskreten Reihen von allen parabolischen Unteralgebren von $\mathcal{H}$.

(ind) Bestimme die Zerlegung von allen $\pi(P, \delta, t)$, wobei (P, δ, t) ein Induktionsdatum ist.

In [Opd] wurde ein wichtiger Teil von (**disc**) gelöst, nämlich die Klassifikation der zentralen Charakteren der Darstellungen der diskreten Reihe. Das verbleibende Problem ist dass ein Element $W_0 r \in T/W_0$ der zentrale Charakter von mehreren inäquivalenten Darstellungen der diskreten Reihe sein kann. Die Anzahl solcher Darstellungen ist nicht leicht zu berechnen. Wir bereits erwähnt, nur für affine Hecke–Algebren mit gleichen Parametern kann man die diskrete Reihe aus der Kazhdan–Lusztig–Parametrisierung der irreduziblen Darstellungen ablesen.

Eric Opdam and ich haben die diskrete Reihe klassifiziert durch mehreren Algebren $\mathcal{H}(\mathcal{R}, q)$ mit verschiedenen q zu betrachten [OpSo2]. Eine grundlegende Idee ist es, dass die diskrete Reihe weniger Darstellungen mit demselben zentralen Charakter enthält, wenn q generisch ist. Es gibt eine präzise Definition von generisch, die im Wesentlichen darauf hinausläuft, dass die Werte $q(s)$ für nicht-konjugierte $s \in S^{\mathrm{aff}}$ keine Beziehungen zu einander haben. Wir haben gezeigt, dass die zentralen Charakteren tatsächlich die diskrete Reihe scheiden, wenn R_0 irreduzibel und q generisch ist. Der schwierigste Teil des Arguments, welchen wir im nächsten Abschnitt erläutern werden, ist eine scharfe Abschätzung der Anzahl der Darstellungen aus der diskreten Reihe. Mit Techniken aus der Operatorenalgebra haben wir weiter bewiesen, dass die so erhaltene Klassifikation der diskreten Reihe für alle positive Parameterfunktionen q gültig ist. Insbesondere haben wir für affine Hecke–Algebren $\mathcal{H}(\mathcal{R}, q)$ mit R_0 und q positiv explizite Listen aufgestellt [OpSo2].

2.3 Die Schwartz–Algebra

Da die diskrete Reihe definiert wird durch eine analytische Kondition, ist es naheliegend, um sie zu studieren als Darstellungen einer topologischen Algebra, welche $\mathcal{H}$ enthält. Die beste Wahl ist die Schwartz–Vervollständigung von $\mathcal{H}$. Bevor wir sie aufführen, gehen wir zu einem Punkt, wo sie wirklich gebraucht wird.

2.3.1 Die Euler–Poincaré–Paarung

Ein Werkzeug, um gewisse Darstellungen zu zählen, ist die Euler–Poincaré–Paarung. Für endlich dimensionale $\mathcal{H}$-Darstellungen U und V wird sie definiert durch

$$EP_{\mathcal{H}}(U,V) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{H}}(U,V).$$

Da $\mathcal{H}$ Noethersch ist und endliche kohomologische Dimension hat, ist diese Summe endlich. Die Euler–Poincaré–Paarung ist fortsetzbar auf der Grothendieck–Gruppe $K(\mathrm{Rep}_f(\mathcal{H}))$ der Kategorie der endlich dimensionalen $\mathcal{H}$-Darstellungen. Außerdem wurde in [OpSo1] gezeigt, dass alle $\mathcal{H}$-Darstellungen, die induziert sind von einer parabolischen Unteralgebra $\mathcal{H}^P \subsetneq \mathcal{H}$, im Radikal von $EP_{\mathcal{H}}$ liegen. Deswegen lebt $EP_{\mathcal{H}}$ eigentlich auf dem Vektorraum

$$\mathrm{Ell}(\mathcal{H}) := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} K(\mathrm{Rep}_f(\mathcal{H}))/\text{Span von induzierten Darstellungen}$$

der ëlliptischen Charakteren"von $\mathcal{H}$. Die erwünschte Abschätzung der Kardinalität der diskreten Reihe kommt jetzt durch drei Ergebnisse zustande:

1. Die diskrete Reihe bildet eine orthonormale Menge in $\mathrm{Ell}(\mathcal{H})$ bezüglich $EP_{\mathcal{H}}$.

2. Es gibt einen additiven Funktor

$$\tilde{\sigma}_0 : \mathrm{Rep}_f(\mathcal{H}) \to \mathrm{Rep}_f(W^e), \text{ sodass } \tilde{\sigma}_0^*(EP_{W^e}) = EP_{\mathcal{H}}.$$

3. Die Dimension von $\mathrm{Ell}(W^e) = \mathrm{Ell}(\mathcal{H}(\mathcal{R}, 1))$ kann effektiv berechnet werden.

Der dritte Schritt ist am einfachsten, er wurde von Eric Opdam und mir ausgeführt in [OpSo1, Chapter 3]. Die Konstruktion von $\tilde{\sigma}_0$ in 2. ist technisch und beruht auf Lokalisierung bezüglich geeigneter Mengen von zentralen Charakteren von $\mathcal{H}$. Es ist nicht ohne weiteres klar, dass dieser Funktor die Paarungen $EP_{\mathcal{H}}$ erhält. Um das zu sehen benutzen wir eine bequeme Auflösung von $\mathcal{H}$-Darstellungen [OpSo1, Chapter 2], welche die Berechnung von $EP_{\mathcal{H}}$ im Wesentlichen auf endlich dimensionale Algebren reduziert. Ein Steifheitsargument führt dann zu 2.

Schritt 1. ist eindeutig am schwierigsten. Das Problem ist es, dass zwei Darstellungen der diskreten Reihe mit demselben zentralen Charakter vielleicht nichttriviale Erweiterungen haben. Unter anderen deswegen hat Opdam die Schwartz–Vervollständigung $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathcal{R}, q)$ von $\mathcal{H}(\mathcal{R}, q)$ eingeführt [DeOp]. Sie ist eine Fréchet–Algebra und spielt eine ähnliche Rolle wie Harish-Chandra's Schwartz–Algebra in der glatten Darstellungstheorie einer p-adischen Gruppe. Die $\mathcal{S}(\mathcal{R}, q)$-Darstellungen sind, mehr oder weniger nach Definition, die temperierten $\mathcal{H}(\mathcal{R}, q)$-Darstellungen. Die Darstellungen der diskreten Reihe, die nicht isoliert waren im Dual von $\mathcal{H}(\mathcal{R}, q)$, sind wohl diskret im Dual von $\mathcal{S}(\mathcal{R}, q)$. Deswegen sind sie projektiv in $\mathrm{Rep}(\mathcal{S}(\mathcal{R}, q))$. Das heißt die diskrete Reihe ist orthonormal in Bezug auf $EP_{\mathcal{S}}$. Weiter haben Eric Opdam und ich [OpSo1] bewiesen, dass

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{H}}(\pi, \pi') \cong \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{S}}(\pi, \pi') \tag{4}$$

für alle $\mathcal{S}(\mathcal{R}, q)$-Darstellungen π und π'. Daraus folgt, dass $EP_{\mathcal{H}}(\pi, \pi') = EP_{\mathcal{S}}(\pi, \pi')$ und somit Schritt 1.

2.3.2 Deformation der Parameterfunktion q

Eine andere Anwendung der Schwartz–Algebra ist die harmonische Analysis für affine Hecke–Algebren. Insbesondere liefert sie den passenden Rahmen für den Plancherel–Satz [DeOp], den wir jetzt beschreiben. Für ein Induktionsdatum (P, δ, t) ist der Vektorraum $i(V_\delta)$ der induzierten Darstellung $\pi(P, \delta, t)$ unabhängig von $t \in T^P$. Jedes Element $h \in \mathcal{H}$ liefert durch die Formel $\mathcal{F}(h)(P, \delta, t) = \pi(P, \delta, t)(h)$ eine Funktion

$$\mathcal{F}(h)(P, \delta, ?) \in C(T^P) \otimes \mathrm{End}_{\mathbb{C}} i(V_\delta).$$

Jetzt erwähnen wir etwas, was in Satz 2.2 verschwiegen wurde, weil wir es dort noch nicht brauchten. Sei

$$T = T_{un} \times T_{rs} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, S^1) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, \mathbb{R}_{>0})$$

die Polarzerlegung des komplexen Torus T. Der Beweis der Langlands–Klassifikation zeigt, dass $\pi(P, \delta, t)$ genau dann temperiert ist, wenn $t \in T^P_{un} = T^P \cap T_{un}$. Der Plancherel–Satz besagt, dass die Fourier–Transformation $\mathcal{F}$ einen Algebraisomorphismus

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathcal{R}, q) \to \bigoplus_{P,\delta} \left(C^\infty(T^P_{un}) \otimes \mathrm{End}_{\mathbb{C}} i(V_\delta) \right)^{\mathcal{W}_{P,\delta}} \tag{5}$$

liefert, wobei $\mathcal{W}_{P,\delta}$ eine endliche Gruppe ist, die durch bestimmten Intertwining–Operatoren auf die angegebene Algebra wirkt.

Für $\epsilon \in \mathbb{R}$ sei q^ϵ die Parameterfunktion $s \mapsto q(s)^\epsilon$. Mit dem Isomorphismus (5) kann man $\mathcal{S}(\mathcal{R}, q)$ und $\mathcal{S}(\mathcal{R}, q^\epsilon)$ vergleichen. Neben $\tilde{\sigma}_0$ gibt es nämlich Funktoren

$$\tilde{\sigma}_\epsilon : \mathrm{Rep}_f(\mathcal{H}(\mathcal{R}, q)) \to \mathrm{Rep}_f(\mathcal{H}(\mathcal{R}, q^\epsilon)),$$

welche für $\epsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Äquivalenzen von Kategorien sind. Für $\epsilon > 0$ gehört $\tilde{\sigma}_\epsilon(\delta)$ zur diskreten Reihe von $\mathcal{H}(\mathcal{R}, q)$ und man stellt fest, dass die rechte Seite von (5) sich (bis auf Isomorphie) nicht ändert, wenn man q durch q^ϵ und δ durch $\tilde{\sigma}_\epsilon(\delta)$ ersetzt. Interessant genug haben diese Konstruktionen einen guten Limes wenn $\epsilon \downarrow 0$:

Satz 2.3. [Sol4, Section 4.4]
Es gibt eine Familie von Homomorphismen von Fréchet–Algebren

$$\zeta_\epsilon : \mathcal{S}(\mathcal{R}, q^\epsilon) \to \mathcal{S}(\mathcal{R}, q) \qquad \epsilon \in \mathbb{R}_{\geq 0},$$

sodass:

(*a*) *ζ_ϵ ist ein Isomorphismus für $\epsilon > 0$ und $\zeta_1 =$id.*

(*b*) *Für alle $w \in W^e$ ist die Abbildung*

$$[0,1] \to \mathcal{S}(\mathcal{R}, q) : \epsilon \mapsto \zeta_\epsilon(N_w) \quad \textit{stetig.}$$

(*c*) *$\zeta_0 : \mathcal{S}(W^e) \to \mathcal{S}(\mathcal{R}, q)$ ist injektiv.*

(*d*) *Sei π eine temperierte $\mathcal{H}(\mathcal{R}, q)$-Darstellung mit zentralem Charakter $W_0 t \in T/W_0$. Dann ist $\pi \circ \zeta_\epsilon$ eine temperierte $\mathcal{H}(\mathcal{R}, q^\epsilon)$-Darstellung mit zentralem Charakter $W_0 t\, |t|^{\epsilon - 1}$.*

Teil (a) sagt aus, dass die Hecke–Algebren $\mathcal{H}(\mathcal{R}, q)$ und $\mathcal{H}(\mathcal{R}, q^\epsilon)$ dieselbe temperierte Darstellungstheorie haben. In den Spezialfall von Iwahori–Hecke–Algebren können wir hieraus schließen, dass die temperierte Iwahori–spherische Darstellungstheorie der reduktive p-adische Gruppe $G = \mathcal{G}(\mathbb{F})$ nicht vom lokalen nicht-archimedischen Körper $\mathbb{F}$ abhängt.

An einfachen Beispielen sieht man bereits, dass die Abbildungen ζ_ϵ die Algebren $\mathcal{H}(\mathcal{R}, q^\epsilon)$ nicht auf $\mathcal{H}(\mathcal{R}, q)$ schicken und dass ζ_0 keine Morita–Äquivalenz ist. Trotzdem ist es wegen Teil (b) naheliegend, dass ζ_0 bestimmte Eigenschaften von Isomorphismen hat. Zum Beispiel kann man hoffen, dass der Gruppenhomomorphismus

$$G(\zeta_0) : K\big(\mathrm{Rep}_f(\mathcal{S}(\mathcal{R}, q))\big) \to K\big(\mathrm{Rep}_f(\mathcal{S}(W^e))\big) \tag{6}$$

bijektiv ist. Aus Satz 2.3.d sehen wir, dass $\mathcal{S}(\mathcal{R}, q)$-Darstellungen mit ausschließlich $Z(\mathcal{H}(\mathcal{R}, q))$-Eigenwerten in $W_0 u T_{rs} \subset T/W_0$ durch Verknüpfung mit ζ_0 zu $\mathcal{S}(W^e)$-Darstellungen mit $W_0 u \in T_{un}/W_0$ als einziger $Z(\mathbb{C}[W^e])$-Eigenwert werden. Deswegen kann man (6) zerlegen als eine direkte Summe von Abbildungen

$$G(\zeta_0)_{W_0 u} : K\big(\mathrm{Rep}_{f, W_0 u T_{rs}}(\mathcal{S}(\mathcal{R}, q))\big) \to K\big(\mathrm{Rep}_{f, W_0 u}(\mathcal{S}(W^e))\big).$$

Es folgt aus Lusztig's erstem Reduktionssatz [Lus], dass $\mathrm{Rep}_{f, W_0 u T_{rs}}(\mathcal{S}(\mathcal{R}, q))$ äquivalent zu einer Kategorie $\mathrm{Rep}_{f, T'_{rs}}(\mathcal{S}(\mathcal{R}', q'))$ ist, wobei $\mathcal{R}'$ ein Unterwurzeldatum von $\mathcal{R}$ ist. (Vielleicht kommt auch ein semidirektes Produkt mit einer endlichen Gruppe ins Spiel, aber diese zusätzliche Subtilität vernachlässigen wir hier.) Auf ähnliche Weise ist die Kategorie $\mathrm{Rep}_{f, W_0 u}(\mathcal{S}(W^e))$ äquivalent zu $\mathrm{Rep}_{f,1}(\mathcal{S}(W^{e'}))$. Sei $R(W_0')$ der Darstellungsring der endlichen Gruppe $W_0' = W(R_0')$. Mit Clifford–Theorie sieht man, dass

$$K\big(\mathrm{Rep}_{f,1}(\mathcal{S}(W^{e'}))\big) \cong R(W_0').$$

Somit reicht es für (6) aus, um zu zeigen, dass die durch ζ_0 induzierte Abbildung

$$K(\mathrm{Rep}_{f, T_{rs}}(\mathcal{S}(\mathcal{R}, q)) \to R(W_0) \tag{7}$$

ein Isomorphismus von abelschen Gruppen ist. Im nächsten Abschitt beschreiben wir, was man dazu braucht.

2.4 Gradierte Hecke–Algebren

Zu jeder affinen Hecke–Algebra $\mathcal{H}$ gibt es eine gradierte Hecke–Algebra $\mathbb{H}$, vergleichbar mit der Konstruktion einer Lie–Algebra aus einer Lie–Gruppe. Die gradierte Version ist nutzlich, um einen bestimmten Teil der Darstellungstheorie von affinen Hecke–Algebren zu studieren. Da die Multiplikationsregeln in $\mathbb{H}$ ein Bisschen einfacher als die in $\mathcal{H}$ sind, begegnet man gradierte Hecke–Algebren auch in unerwarteten Gebieten, etwa in dem Studium von Differenzgleichungen.

Wenn $\mathfrak{t} = Y \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ die Lie–Algebra des Torus T bezeichnet, dann ist $\mathbb{H}(\tilde{\mathcal{R}}, k)$ als Vektorraum das Tensorprodukt $S(\mathfrak{t}^*) \otimes \mathbb{C}[W_0]$. Die Multiplikation zwischen den Unteralgebren $S(\mathfrak{t}^*)$ und $\mathbb{C}[W_0]$ wird definiert durch

$$s_\alpha \cdot x - s_\alpha(x) \cdot s_\alpha = k_\alpha \qquad \alpha \in F_0.$$

Hier wird $k_\alpha \in \mathbb{R}$ festgelegt durch q und in den meisten Fällen gilt $k_\alpha = \log(q(s_\alpha))$. Man kann eine verwandte Algebra $\mathbb{H}(\tilde{\mathcal{R}}, \mathbf{k})$ definieren, indem man statt k_α eine formelle Variable $\mathbf{k}_\alpha$ nimmt. Diese Algebra $\mathbb{H}(\tilde{\mathcal{R}}, \mathbf{k})$ ist gradiert durch $\mathrm{Grad}(W_0) = 0$, $\mathrm{Grad}(\mathbf{k}_\alpha) = 1$ und durch den üblichen Grad auf $S(\mathfrak{t}^*)$. Obwohl wir $\mathbb{H}(\tilde{\mathcal{R}}, k)$ als gradiert bezeichnen, ist sie eigentlich nur eine filtrierte Algebra. Es ist leicht zu sehen, dass das Zentrum von $\mathbb{H}(\tilde{\mathcal{R}}, k)$ gleich $S(\mathfrak{t}^*)^{W_0} = \mathbb{C}[\mathfrak{t}/W_0]$ ist. Deswegen können wir für W_0-invariante Teilmengen $V \subset \mathfrak{t}$ von $\mathbb{H}$-Darstellungen mit $Z(\mathbb{H})$-Eigenwerten in V reden. Wir schreiben

$$\mathfrak{a} = Y \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = \mathrm{Lie}(T_{rs}) \quad \text{und} \quad i\mathfrak{a} = Y \otimes_{\mathbb{Z}} i\mathbb{R} = \mathrm{Lie}(T_{un}).$$

Der Verband zwischen affinen und gradierten Hecke–Algebren wird explizit gemacht durch Lusztig's zweiten Adjungiertsheitssatz [Lus]. In unserer Situation sagt dieser Satz, dass es eine offene Umgebung V von 0 in $i\mathfrak{a}$ gibt, sodass die Kategorien

$$\mathrm{Rep}_{f, W_0(\exp V) T_{rs}}(\mathcal{H}(\mathcal{R}, q)) \quad \text{und} \quad \mathrm{Rep}_{f, W_0 V + \mathfrak{a}}(\mathbb{H}(\tilde{\mathcal{R}}, k))$$

äquivalent sind. Somit erhalten wir für $\mathbb{H}(\tilde{\mathcal{R}}, k)$ natürliche Definitionen von der diskreten Reihe und von Temperiertheit von Darstellungen. Die Struktur und Theorie von parabolischer Induktion und Intertwining–Operatoren für $\mathbb{H}(\tilde{\mathcal{R}}, k)$ sind sehr ähnlich zu den für $\mathcal{H}(\mathcal{R}, q)$. Dennoch waren diese Sachen bis vor Kurzem nicht ausführlich und genau aufgeschrieben, das habe ich getan in [Sol2].

Ein Induktionsdatum für $\mathbb{H}(\tilde{\mathcal{R}}, k)$ ist ein Tripel (P, σ, λ), wobei $P \subset F_0$, $\lambda \in \mathfrak{t}^P = \mathrm{Lie}(T^P)$ und σ eine Darstellung der diskreten Reihe von $\mathbb{H}_P := \mathbb{H}(\tilde{\mathcal{R}_P}, k_P)$ ist. Nach Konstruktion gilt

$$\mathbb{H}^P := \mathbb{H}(\tilde{\mathcal{R}^P}, k_P) = \mathbb{H}_P \otimes S(\mathfrak{t}^{P*})$$

als Algebren und die parabolisch induzierte Darstellung zu (P, σ, λ) ist

$$\pi(P, \sigma, \lambda) = \mathrm{Ind}_{\mathbb{H}^P}^{\mathbb{H}}(\sigma \otimes \mathbb{C}_\lambda).$$

Nach der erweiterten Langlands–Klassifikation ist jede irreduzible $\mathbb{H}$-Darstellung ρ ein Quotient von einer Darstellung $\pi(P, \sigma, \lambda)$ mit $\Re(\lambda)$ positiv. Außerdem ist das Induktionsdatum (P, σ, λ) eindeutig und ρ ist genau dann temperiert, wenn $\Re(\lambda) = 0$. An dieser Parametrisierung kann man schnell sehen, wo genau sich die temperierten Darstellungen mit reellem (das heißt, in $\mathfrak{a}/W_0$) zentralem Charakter befinden. Es ist bekannt, dass alle Darstellungen der diskreten Reihe von $\mathbb{H}_P$ einen reellen zentralen Charakter haben (etwas was für affine Hecke–Algebren nicht gilt). Dies erfordert $\lambda \in \mathfrak{t}^P \cap \mathfrak{a}$. Andererseits erzwingt die Temperiertheit, dass $\lambda \in \mathfrak{t}^P \cap i\mathfrak{a}$ und somit $\lambda = 0$. Die Menge $\mathrm{Irr}_0(\mathbb{H})$ der irreduziblen temperierten $\mathbb{H}$-Darstellungen mit reellem zentralem Charakter besteht also aus den irreduziblen Unterquotienten von den parabolisch induzierten Darstellungen $\pi(P, \sigma, 0)$.

Explizite Berechnungen an Intertwining–Operatoren [Sol2] zeigen ziemlich gut, wie der Dualraum von $\mathbb{H}$ aussieht. Für jede W_0-Bahn von Paaren (P, σ) erhält man eine Kopie von $\mathfrak{t}/W_{P,\sigma}$, wobei $W_{P,\sigma} \subset W_0$ der Stabilisator von (P, σ) ist. Dabei kommen endlich viele Untervektorräume von $\mathfrak{t}^P$ doppelt oder sogar mit einer höheren Multiplizität vor. Aus dieser Beschreibung folgt unter Anderen, dass $\mathrm{Irr}_0(\mathbb{H})$ eine Art Deformationsretrakt des Dualräumes $\mathrm{Irr}(\mathbb{H})$ ist. Um das effektiv zu benutzen, wenden wir uns an die nichtkommutative Geometrie der Hecke–Algebren.

2.5 Periodische zyklische Homologie

Die periodische zyklische Homologie von (komplexen) Algebren verallgemeinert einerseits die DeRham–Kohomologie von affinen Varietäten, andererseits Spurfunktionen auf endlichen Gruppen. Der Funktor HP_* verhält sich auch sehr gut auf Algebren mit einem großen Zentrum, zum Beispiel wie die in diesen Bericht besprochenen Hecke–Algebren. In [Sol3, Section 4.2] habe ich gezeigt, dass man periodische zyklische Homologie, auf der Kategorie der Algebren von endlichem Typ über einen komplexen Varietät, auffassen und berechnen kann als die Kohomologie des Dualraumes einer derartigen Algebra. Solche Dualräume haben eine algebraische Struktur, aber im Allgemeinen sind sie als topologische Räume nicht separiert. Somit handelt es sich hierbei um eine Kohomologietheorie, die für eine spezifische Klasse von nicht-hausdorffschen Räumen sinnvoll ist.

Die ursprungliche Definition von periodischer zyklischer Homologie läuft über einen expliziten, riesigen Differentialkomplex. Obwohl dieser Komplex sich nur selten zu Berechnungen eignet, konnte ich ihn gerade für gradierte Hecke–Algebren gut benutzen. Mit einer Spektralreihe induziert durch die Filtrierung von $\mathbb{H}(\tilde{\mathcal{R}}, k)$ habe ich die Homologie dieser Algebra bestimmt:

Satz 2.4. [Sol3, Section 3]
Es gibt einen Isomorphismus von gradierten Vektorräumen

$$HP_*\big(\mathbb{H}(\tilde{\mathcal{R}}, k)\big) \cong HP_*\big(\mathbb{H}(\tilde{\mathcal{R}}, 0)\big) = HP_*\big(S(\mathfrak{t}^*) \rtimes W_0\big).$$

Ähnliche Isomorphismen existieren für die Hochschild–Homologie und für die (nicht-periodische) zyklische Homologie von gradierten Hecke–Algebren.

Dieses Ergebnis spielt eine ausschlaggebende Rolle im Beweis der Aubert–Baum–Plymen–Vermutung und in einigen anderen Sätzen für affine Hecke–Algebren. Die Idee ist es, dass man diese rein algebraische Beschreibung von $HP_*\big(\mathbb{H}(\tilde{\mathcal{R}}, k)\big)$ vergleichen kann mit der geometrischen Beschreibung als Kohomologie des Dualraumes von $\mathbb{H}(\tilde{\mathcal{R}}, k)$. Das am Ende von Abschnitt 2.4 skizzierte Bild dieses Dualraumes zeigt, dass $HP_*\big(\mathbb{H}(\tilde{\mathcal{R}}, k)\big)$ natürlich isomorph zum Vektorraum $\mathbb{C}\,\mathrm{Irr}_0\big(\mathbb{H}(\tilde{\mathcal{R}}, k)\big)$ ist. Für die Parameterfunktion $k = 0$ kann man dies genauer ausdrücken: dann gilt

$$HP_*\big(\mathbb{H}(\tilde{\mathcal{R}}, 0)\big) \cong HP_*\big(S(\mathfrak{t}^*) \rtimes W_0\big) \cong \mathbb{C}\,\mathrm{Irr}_0\big(S(\mathfrak{t}^*) \rtimes W_0\big) \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} R(W_0).$$

Hieraus folgt:

Satz 2.5. [Sol3, Section 6.5]
Die W_0-Darstellungen $\big\{\pi\big|_{\mathbb{C}[W_0]} : \pi \in \mathrm{Irr}_0\big(\mathbb{H}(\tilde{\mathcal{R}}, k)\big)\big\}$ sind linear unabhängig und spannen ein Gitter von endlichem Index in $R(W_0)$ auf.

Wenn $\mathbb{H}$ gleiche Parametern k hat, dann sagen die Springer–Korrespondenz und Kazhdan–Lusztig–Theorie [KaLu], dass die Darstellungen in dem Satz sogar eine $\mathbb{Z}$-Basis von $R(W_0)$ bilden. Satz 2.5 kann also betrachtet werden als eine Erweiterung der klassischen Springer–Korrespondenz auf Hecke–Algebren mit ungleichen Parametern.

Wenn wir Satz 2.5 mittels Lusztig's Reduktionssätze in die Sprache der affinen Hecke–Algebren übersetzen, sehen wir, dass (7) injektiv ist und endlichen Kokern hat. Mit in Abschnitt 2.3 erwähnten Methoden können wir jetzt die Grothendieck–Gruppen der Darstellungen von $\mathcal{H}(\mathcal{R}, q)$ und von W^e vergleichen:

Satz 2.6. [Sol4, Section 2.3]

(*a*) *Die von* $\zeta_0 : \mathcal{S}(W^e) \to \mathcal{S}(\mathcal{R}, q)$ *induzierte Abbildung*

$$G(\zeta_0) \otimes \mathrm{id} : K\big(\mathrm{Mod}_f(\mathcal{S}(\mathcal{R}, q))\big) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to K\big(\mathrm{Mod}_f(\mathcal{S}(W^e))\big) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

ist eine $\mathbb{Q}$*-lineare Bijektion.*

(*b*) *Es gibt eine natürliche Injektion* $Irr(\mathcal{H}(\mathcal{R}, q)) \to \mathrm{Mod}_f(W^e)$*, verträglich mit parabolischer Induktion, deren Bild eine Basis von* $K\big(\mathrm{Mod}_f(W^e)\big) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ *ist.*

Dieser Satz bestätigt, dass die Darstellungstheorie von $\mathcal{H}(\mathcal{R}, q)$ eine Deformation der Darstellungstheorie der unterliegenden affinen Weyl–Gruppe ist. Satz 2.6 ist deutlich stärker als Satz 2.5, man kann ihn sehen als ein affines Analogon der Springer–Korrespondenz für Darstellungen einer endlichen Weyl–Gruppe. Ab hier ist es nur ein kurzer Weg zum Beweis der Aubert–Baum–Plymen–Vermutung für affine Hecke–Algebren [Sol4, Section 5.4], womit gleichzeitig manche Fälle der ABP–Vermutung für reduktive p-adische Gruppen gültig sind, siehe Abschnitt 1.2.

2.5.1 Topologische K-Theorie

Weiter kann man Satz 2.6 zur Bestimmung der periodischen zyklischen Homologie von $\mathcal{H}(\mathcal{R}, q)$ und der K-Theorie von $\mathcal{S}(\mathcal{R}, q)$ einsetzen. Diese Beiden sind mehr oder weniger äquivalent für affine Hecke–Algebren. Nämlich, die Argumente von [Sol1], welche zum Satz 1.2 führten, zeigen auch, dass die Einbettung $\mathcal{H}(\mathcal{R}, q) \to \mathcal{S}(\mathcal{R}, q)$ einen Isomorphismus auf die periodische zyklische Homologie induziert und dass der Chern–Charakter $K_*(\mathcal{S}(\mathcal{R}, q)) \to HP_*(\mathcal{S}(\mathcal{R}, q))$ bijektiv wird, wenn man $K_*(\mathcal{S}(\mathcal{R}, q))$ mit $\mathbb{C}$ tensoriert (über $\mathbb{Z}$). Die Zusammenhang zwischen $K_0(\mathcal{S}(\mathcal{R}, q))$ und projektiven $\mathcal{S}(\mathcal{R}, q)$-Darstellungen macht es möglich um Satz 2.6 zu übersetzen in die topologische K-Theorie:

Satz 2.7. [Sol4, Section 5.2]
Es gibt ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
HP_*(\mathbb{C}[W^e]) & \to & HP_*(\mathcal{S}(W^e)) & \leftarrow & K_*(\mathcal{S}(W^e)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \\
\downarrow & & \downarrow HP_*(\zeta_0) & & \downarrow K_*(\zeta_0) \otimes \mathrm{id} \\
HP_*(\mathcal{H}(\mathcal{R}, q)) & \to & HP_*(\mathcal{S}(\mathcal{R}, q)) & \leftarrow & K_*(\mathcal{S}(\mathcal{R}, q)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C},
\end{array}$$

wobei alle Pfeile natürliche Isomorphismen sind.

Dieses Diagramm bedeutet, grob gesagt, dass die nichtkommutative Geometrie von affinen Hecke–Algebren unabhängig von den Parametern q ist.

Neben $\mathcal{S}(\mathcal{R}, q)$ gibt es noch eine interessante Vervollständigung von $\mathcal{H}(\mathcal{R}, q)$, die C^*-Algebra $C^*(\mathcal{R}, q)$. Bereits 1993 haben Higson und Plymen die Vermutung geäußert, dass die topologische K-Theorie von $C^*(\mathcal{R}, q)$ nicht von q abhängt. Diese Vermutung wurde motiviert durch die Homotopieinvarianz von topologischer K-Theorie, weniger durch die Darstellungstheorie von affinen Hecke–Algebren. Da $K_*(C^*(\mathcal{R}, q))$ kanonisch isomorph zu $K_*(\mathcal{S}(\mathcal{R}, q))$ ist, liefert Satz 2.7 einen natürlichen Isomorphismus

$$K_*(\zeta_0) \otimes \mathrm{id} : K_*(C^*(W^e)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to K_*(C^*(\mathcal{R}, q)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

Damit ist die erwähnte Vermutung modulo Torsion bewiesen. Zusätzlich kann man für viele Wurzeldaten $\mathcal{R}$ nachprüfen, dass $K_*(C^*(\mathcal{R}, q))$ überhaupt keine Torsionselemente hat.

Literatur

[ABP] A.-M. Aubert, P.F. Baum, R.J. Plymen, "The Hecke algebra of a reductive p-adic group: a view from noncommutative geometry", pp. 1–34 in: *Noncommutative geometry and number theory*, Aspects of Mathematics **E37**, Vieweg Verlag, 2006

[BeDe] J.N. Bernstein, P. Deligne, "Le "centre"de Bernstein", pp. 1–32 in: *Représentations des groupes réductifs sur un corps local*, Travaux en cours, Hermann, 1984

[DeOp] P. Delorme, E.M. Opdam, "The Schwartz algebra of an affine Hecke algebra", J. reine angew. Math. **625** (2008), 59–114

[HiNi] N. Higson, V. Nistor, "Cyclic homology of totally disconnected groups acting on buildings", J. Funct. Anal. **141.2** (1996), 466-495

[IwMa] N. Iwahori, H. Matsumoto, "On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of the p-adic Chevalley groups", Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math **25** (1965), 5–48

[KaLu] D. Kazhdan, G. Lusztig, "Proof of the Deligne–Langlands conjecture for Hecke algebras", Invent. Math. **87** (1987), 153–215

[Kim] Ju-Lee Kim, "Supercuspidal representations: construction and exhaustion", pp. 79–99 in: *Ottawa lectures on admissible representations of reductive p-adic groups*, Fields Institute Monographs **26**, American Mathematical Society, 2009

[Laf] V. Lafforgue, "K-théorie bivariante pour les algèbres de Banach et conjecture de Baum–Connes", Invent. Math. **149.1** (2002), 1–95

[Lus] G. Lusztig, "Affine Hecke algebras and their graded version", J. Amer. Math. Soc **2.3** (1989), 599–635

[MeSo1] R. Meyer, M. Solleveld, "Resolutions for representations of reductive p-adic groups via their buildings", Journal für die reine und angewandte Mathematik **647** (2010), 115–150

[MeSo2] R. Meyer, M. Solleveld, "Characters and growth of admissible representations of reductive p-adic groups", arXiv:0908.1489, to appear in Journal de l'Institute de Mathematiques de Jussieu

[Opd] E.M. Opdam, "On the spectral decomposition of affine Hecke algebras", J. Inst. Math. Jussieu **3.4** (2004), 531–648

[OpSo1] E.M. Opdam, M. Solleveld, "Homological algebra for affine Hecke algebras", Advances in Mathematics **220** (2009), 1549–1601

[OpSo2] E.M. Opdam, M. Solleveld, "Discrete series characters for affine Hecke algebras and their formal dimensions", Acta Math. **205** (2010), 105–187

[ScSt] P. Schneider, U. Stuhler, "Representation theory and sheaves on the Bruhat–Tits building", Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **85** (1997), 97–191

[Sol1] M. Solleveld, "Periodic cyclic homology of reductive p-adic groups", Journal of Noncommutative Geometry **3.4** (2009), 501–558

[Sol2] M. Solleveld, "Parabolically induced representations of graded Hecke algebras", arXiv:0804.0433, to appear in Algebras and Representation Theory

[Sol3] M. Solleveld, "Homology of graded Hecke algebras" J. Algebra **323** (2010), 1622–1648

[Sol4] M. Solleveld, "On the classification of irreducible representations of affine Hecke algebras with unequal parameters", arXiv:1008.0177, 2010 (submitted)

[Vig] M.-F. Vignéras, *Représentations l-modulaires d'un groupe réductif p-adique avec $l \neq p$*, Progress in Mathematics **137**, Birkhäuser, 1996

[Voi] C. Voigt, "Chern character for totally disconnected groups", Math. Ann. **343.3** (2009), 507–540

[Wal] J.-L. Waldspurger, "La formule de Plancherel pour les groupes p-adiques (d'après Harish-Chandra)", J. Inst. Math. Jussieu **2.2** (2003), 235–333

Anschrift: Mathematisches Institut
Universität Göttingen
Bunsenstraße 3–5
37073 Göttingen
Email: maarten@uni-math.gwdg.de