Samenvatting van

Periodic cyclic homology of affine Hecke algebras

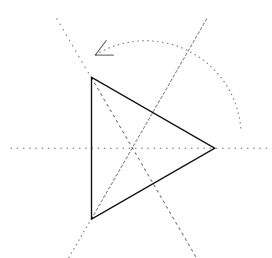
door Maarten Solleveld

De afgelopen jaren is mij vaak gevraagd wat ik nou eigenlijk onderzoek. Op deze vraag heb ik inmiddels een voorraadje antwoorden uitgeprobeerd, die in zekere zin allemaal wel correct waren. Niettemin bleek dat sommige antwoorden aanzienlijk meer begrip en waardering oogsten dan andere.

Daarom lijkt het me wel een goed idee om in ieder geval de wellicht enigszins cryptische zinsnede *Periodiek cyclische homologie van affiene Hecke algebra's* toe te lichten. Dit wordt dan ook niet zozeer een samenvatting van mijn onderzoek, als wel een relatief gezellige wandeling langs de randen van de oneindig dimensionale ruimten waarin ik mij gewoonlijk begeef.

Groepen

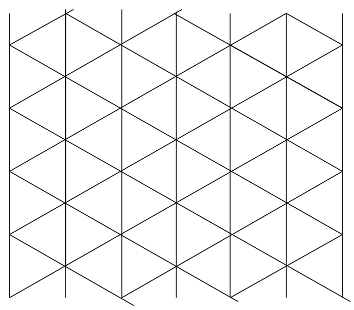
Met groepen kun je de symmetrieën beschrijven van uiteenlopende dingen, zoals een voetbal, een velletje papier, een molecuul, een differentiaalvergelijking of ruimte-tijd, maar ook van simpele figuren als een lijn, een kubus of een zevenhoek. Een eenvoudige groep, die een rol speelt in dit boek, bestaat uit de zes symmetrieën van een gelijkzijdige driehoek.



We zien drie spiegelingen (in de stippellijnen) en rotaties over 120° en over 240°. De laatste symmetrie is de afbeelding die alles op zijn plek laat. We zien direct dat *groep* binnen de wiskunde iets heel anders betekent dan in het dagelijks leven. In abstracto is het een verzameling waarvan je de elementen kunt samenstellen, waarbij aan bepaalde voorwaarden voldaan moet zijn.

De bovenstaande groep heeft allerlei bijzondere eigenschappen. Bijvoorbeeld, als je een willekeurige lijn neemt die door het middelpunt van de driehoek gaat, en je past daarop een symmetrie van de driehoek toe, dan krijg je weer een lijn die door dat middelpunt gaat. Men zegt daarom wel dat deze groep bestaat uit lineaire afbeeldingen.

Beschouw het rooster dat is opgebouwd uit gelijkzijdige driehoeken. (Zie de kaft voor een artistiekere impressie van dit rooster, waarvoor mijn dank uitgaat naar Bill Wenger.)

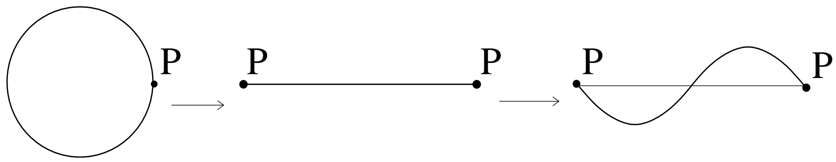


De symmetriegroep van dit (oneindig grote) figuur bevat oneindig veel elementen, onder andere spiegelingen en rotaties, maar ook verschuivingen. Stel dat je een punt in dit rooster kiest, en een lijn door dat punt. Als je zomaar een symmetrie van het rooster toepast krijg je zeker weer een lijn, maar er is geen garantie dat die nog steeds door het gekozen punt gaat. Daarom noemt men dit soort symmetrieën geen lineaire afbeelingen, maar *affiene* afbeeldingen.

Met deze hele opzet kunnen we iets doen waar wiskundigen dol op zijn, we kunnen het zaakje generaliseren. In dat geval vervangen we de driehoek door een ingewikkelder kristal, en het driehoekige rooster door een rooster van hogere dimensie. De symmetriegroep van het kristal is een (eindige) Weyl groep, en de symmetriegroep van het rooster heet een affiene Weyl groep.

Representaties

Als je een groep goed wilt begrijpen is het van groot belang om zijn zogeheten representaties te kennen. Dit illustreren we aan de hand van ander voorbeeld, de cirkel. Enerzijds kan deze worden beschouwd als de groep van rotaties om zijn eigen middelpunt. Anderszijds kunnen we de cirkel opvatten als een snaar, en dan kan hij trillen. De representaties van de cirkelgroep corresponderen precies met de trillingen van de cirkelvormige snaar, waarbij we één specifiek punt P vasthouden.



Er is één grondtoon, waarvan de golflengte exact de lengte van de snaar is. De boventonen hebben een golflengte die een geheel aantal keren in de snaar past. Elke trilling is te maken als een geschikte combinatie van dergelijke harmonische trillingen.

In wiskundig jargon betekent dit dat de harmonische trillingen corresponderen met de irreducibele representaties. Irreducibele representaties zijn een soort bouwsteentjes waarmee je elke representatie kunt maken. Ze zijn zelf niet verder op te delen.

Algebra's

Grof gezegd is een algebra een verzameling waarbinnen je kunt optellen en vermenigvuldigen. Zo vormen de gehele getallen een algebra. Een wat lastiger voorbeeld zijn de 2×2-matrices met reële coëfficienten:

$$M_2(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} : x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

Dit soort matrices kan je coördinaatsgewijs optellen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/4 & -5/9 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/4 & -5/9 \\ \pi - 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Een matrix is op te vatten als een lineaire afbeelding. Als we punten in het vlak schrijven als vectoren $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, dan stuurt een matrix dus een vector naar een andere vector:

$$\begin{pmatrix} 3/4 & -5/9 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a/4 \\ -a \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3/4 & -5/9 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5b/9 \\ -4b \end{pmatrix}$$

De standaardmanier om matrices te vermenigvuldigen correspondeert met het samenstellen van afbeeldingen, bijvoorbeeld

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Al met al maakt dit $M_2(\mathbb{R})$ tot een algebra over de reële getallen $\mathbb{R}$. Merk op dat bepaalde gebruikelijke rekenregels voor getallen niet meer gelden voor matrices. We zijn gewend dat $7 \cdot 9 = 9 \cdot 7 = 63$. Zelfs zonder dat we de uitkomst weten kunnen we met zekerheid zeggen dat

$$4676013 \cdot 2369655 = 2369655 \cdot 4676013$$

In feite geldt $x \cdot y = y \cdot x$ voor alle reële getallen x en y. Niettemin zien we hierboven dat er matrices A en B bestaan zodat

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Men zegt dan dat A en B niet commuteren en dat de algebra $M_2(\mathbb{R})$ niet commutatief is.

Wat is nu het verband tussen algebra's en groepen? Vanuit een groep kunnen we een algebra construeren die alle eigenschappen van de groep reflecteert. Zo hebben algebra's ook representaties, en de representaties van een groep komen overeen met de representaties van de bijbehorende groepsalgebra.

p-adische getallen

Een aanzet tot de algebra's in de titel van dit boek werd gegeven door de Duitse wiskundige Erich Hecke, die leefde van 1887 tot 1947. Hecke hield zich vooral bezig met getaltheorie, bijvoorbeeld met p-adische getallen. Hier is p een priemgetal, bijvoorbeeld 5. De verzameling 5-adische getallen geven we aan met $\mathbb{Q}_5$. Een typisch 5-adisch getal ziet eruit als een decimale expansie in de verkeerde richting:

$$x = \cdots 42130012044.113 \in \mathbb{Q}_5$$

Omdat $p = 5$ komen alleen de symbolen 0, 1, 2, 3 en 4 in deze schrijfwijze van x voor. We dienen x te interpreteren als

$$x = 3 \cdot 5^{-3} + 1 \cdot 5^{-2} + 1 \cdot 5^{-1} + 4 \cdot 5^0 + 4 \cdot 5^1 + 0 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^3 + \cdots$$

Als y een ander 5-adisch getal is, dan zijn $x + y$ en $x \cdot y$ zonder al te veel problemen te bepalen met behulp van de regeltjes

$$\begin{array}{ccccc} a5^n & + & b5^n & = & (a+b)5^n \\ a5^n & \cdot & c5^m & = & (a \cdot c)5^{n+m} \end{array}$$

voor gehele getallen a, b, c, n en m. Om de coëfficient van $x \cdot y$ bij 5^n uit te rekenen hebben we slechts kleine stukjes van de expansies van x en y nodig. Zelfs delen is mogelijk met p-adische getallen, omdat p een priemgetal is.

Met p-adische getallen kunnen we weer groepen bouwen. Een simpel voorbeeld van zo'n p-adische groep is

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Q}_5 \, , a \cdot d - b \cdot c = 1 \right\}$$

De samenstelling in deze groep is de gebruikelijke matrixvermeningvuldiging, maar dan uitgevoerd met 5-adische getallen. Dergelijke p-adische groepen spelen een belangrijke rol in verschillende gebieden van de wiskunde. Men zou graag alle irreducibele representaties van zo'n groep klassificeren, maar dat is erg lastig. Het blijkt dat een belangrijk deel van de representatietheorie van een p-adische groep valt uit te drukken met een zekere algebra. Zo een algebra is een generalisatie van een type algebra's dat Hecke indertijd vanuit een iets andere hoek heeft gedefinieerd en bestudeerd, vandaar dat ze onder de naam *Hecke algebra's* door het leven gaan.

Hecke algebra's

Hecke algebra's zijn er in soorten en maten. Ik ben vooral geïnteresseerd in Hecke algebra's die sterk gerelateerd zijn aan Weyl groepen. In feite zijn deze Hecke algebra's te beschouwen als deformaties van Weyl groepen. De groepsalgebra die bij een Weyl groep hoort heeft zoals zoals gezegd grotendeels dezelfde eigenschappen als de groep zelf. Als je die groepsalgebra op een geschikte manier vervormt krijg je een Hecke algebra.

Doe je dit met een eindige Weyl groep, dan krijg je een Hecke algebra van eindige dimensie. Hoewel *eindig dimensionaal* in eerste instantie nog niet zo eenvoudig klinkt, is het vast makkelijker dan *oneindig dimensionaal*. In ieder geval begrijpt men eindig dimensionale Hecke algebra's heel goed.

Echter, als je een affiene Weyl groep deformeert krijg je een affiene Hecke algebra, en die heeft oneindige dimensie. Affiene Hecke algebra's zijn veel ingewikkelder dan Hecke algebra's van eindige dimensie. Toch is dat niet zo'n ramp. Men gebruikt affiene Hecke algebra's onder andere om tot een beter begrip te komen van de gecompliceerde representatietheorie van p-adische groepen, en daar zou weinig van te verwachten zijn als ze te eenvoudig waren. Het blijkt dat affiene Hecke algebra's aan de ene kant diepzinnig genoeg zijn om tot nieuwe inzichten te leiden, en aan de andere kant makkelijk genoeg om er prettig mee te kunnen werken. Dus een affiene Hecke algebra heeft precies de goede moeilijkheid om hem tot een interessant studieobject te maken.

Periodiek cyclische homologie

Zonet zagen we de analogie tussen trillingen van een snaar en representaties van een groep. Als we dit uitbreiden correspondeert een algebra niet meer met één snaar, maar met een snaarinstrument, bijvoorbeeld een piano. Een representatie van die algebra wordt dan een toon die je met die piano kunt voortbrengen. Op deze manier kunnen we een irreducibele representatie identificeren met een zuivere toon van de piano.

Het uiteindelijke doel van mijn promotieonderzoek was om alle irreducibele representaties van een algemene affiene Hecke algebra te bepalen. Het ligt voor de hand om ze eerst maar eens te tellen. Helaas laten ze zich niet zo gemakkelijk tellen, want het zijn er oneindig veel. Net zo heeft het weinig zin om alle zuivere tonen van een piano te tellen, want dat zijn er ook oneindig veel. Een beter idee is daarom om alle grondtonen van de snaren van de piano te tellen, dat vertelt je bijvoorbeeld al hoeveel snaren je piano heeft.

In de context van algebra's ligt dat wat subtieler, daar heet de geschikte manier om grondtonen te tellen *periodiek cyclische homologie*. "Homologie" komt uit het Grieks en betekent zoveel als "studie van gelijkheid". Dat gaat ongeveer als volgt. Stel dat je twee objecten, bijvoorbeeld twee algebra's, wilt vergelijken. Kies een geschikte methode (een homologietheorie) om aan een algebra iets relatief eenvoudigs toe te kennen, bijvoorbeeld een simpel type groep, een rijtje getallen of zelfs een rijtje groepen. Dat heet dan de homologie van de algebra. Als je twee algebra's in essentie hetzelfde zijn zullen ze dezelfde homologie hebben. Daarentegen, als ze verschillende homologie hebben dan zijn de algebra's niet hetzelfde, en ook niet ongeveer.

Op de kaft van dit boek zie je duidelijk periodieke en cyclische verschijnselen. Dat is geen toeval, maar de etymologische achtergrond van de term *periodiek cyclische* *homologie* is anders. De periodiek cyclische homologie van een algebra A is een rijtje groepen:

$$\ldots, HP_{-2}(A),\ HP_{-1}(A),\ HP_0(A),\ HP_1(A),\ HP_2(A),\ HP_3(A), \ldots$$

Dit is periodiek in de zin dat voor elk geheel getal n geldt

$$HP_n(A) = HP_{n+2}(A)$$

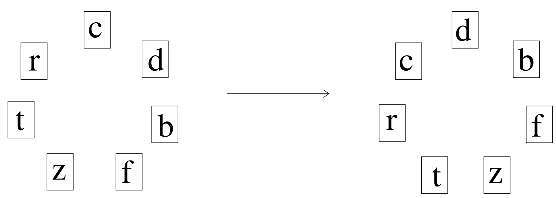
Het cyclische zit wat dieper verstopt, dat heeft te maken met hoe de groepen $HP_n(A)$ expliciet geconstrueerd worden. Stel dat we zeven hokjes hebben, die allemaal gevuld zijn met een letter:

f	b	d	c	r	t	z

Nu schuiven we elke letter één hokje naar rechts, en de meest rechtse letter stoppen we in het vrijgekomen linker hokje:

z	f	b	d	c	r	t

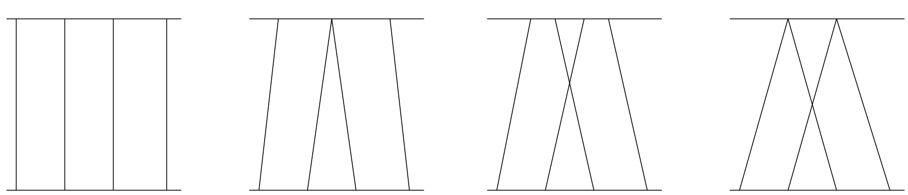
Dit kunnen we nog wat suggestiever tekenen:



Nu is het wel duidelijk waarom dit een cyclische permutatie heet. Zulke permutaties worden gebruikt in de definitie van periodiek cyclische homologie.

Deformaties

Het is nog niet zo eenvoudig om de periodiek cyclische homologie van een affiene Hecke algebra ook daadwerkelijk uit te rekenen. Daartoe grijpen we terug op de affiene Weyl groep waarvan het een deformatie is. Als we weer denken aan piano's en snaren betekent deze deformatie dat we wat gaan sleutelen aan de snaren: wat langer of iets korter, een stukje dichter bij elkaar. Hoewel het in muzikaal opzicht barbaars is zouden we zelfs sommige snaren aan elkaar vast kunnen knopen. Zo'n deformatie kan er schematisch uitzien als



Men vermoedt dat de representatietheorie van een affiene Weyl groep niet essentieel verandert onder deze deformaties. Dit vermoeden wordt ondersteund door diepzinnige stellingen die zeggen dat het in bepaalde belangrijke gevallen klopt. Het is een belangrijk vermoeden, want hiermee kan men representaties van een affiene Hecke algebra herleiden tot representaties van een affiene Weyl groep, en die zijn allemaal al lang bekend.

In dit proefschrift heb ik bewezen dat dit vermoeden equivalent is met een ogenschijnlijk zwakkere uitspraak, namelijk dat de periodiek cyclische homologie van de groepsalgebra van een affiene Weyl groep niet verandert als je die algebra vervormt tot een affiene Hecke algebra. Grof gezegd betekent de sterke versie van dit vermoeden dat je met elk van de boven getekende pianootjes evenveel verschillende tonen kan voortbrengen. De zwakke versie zegt zo ongeveer dat al die piano's evenveel grondtonen hebben.

Verder worden in dit boek onder andere een aantal nieuwe technieken geïntroduceerd om de periodiek cyclische homologie van een redelijk algemeen type algebra uit te rekenen. Mede daardoor kunnen de bovenstaande vermoedens nu bewezen worden in veel nieuwe gevallen.