Sudoku's en Magische Vierkanten

Arno van den Essen, RU Nijmegen, essen@math.ru.nl

8 februari 2007

1 Wat geschiedenis

Dit is een korte samenvatting van een lezing gehouden op 12 Februari 2007, in het kader van Studium Generale aan de RUG te Groningen.

Het doel van deze lezing is wat achtergrondinformatie te geven over de populaire Sudoku's en tegelijkertijd publiciteit te maken voor wiskunde.

We beginnen met een kort historisch overzicht. Het eerste "magische" vierkant, verscheen zo'n 5000 jaar geleden in China: de Lo Shu.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Het "magische" aan dit vierkant is, dat de getallen $1, 2, \ldots, 9$ zó gerangschikt zijn dat de som van alle getallen in iedere rij, kolom en ieder van de twee diagonalen steeds hetzelfde is, namelijk vijftien.

Een $n \times n$ getallenvierkant heet een *magisch vierkant* (van orde n) als de som van alle getallen in iedere rij, kolom en ieder van de twee diagonalen hetzelfde is. Deze gemeenschappelijke som heet de *magische som* .

Als we bovendien eisen dat de getallen in het vierkant de opvolgende getallen $1, 2, 3, \ldots$ zijn, dan heet het vierkant een *zuiver* of *normaal* magisch vierkant.

Het eerste zuiver magische vierkant van orde vier verscheen rond 1100 als een inscriptie in het beroemde tempelcomplex te Khajuraho in centraal India.

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

De koningen van de Chandela dynastie bouwden daar rond het einde van het eerste millennium 85 tempels, waarvan er nog zo'n twintig zijn overgebleven.

Het Khajurahovierkant laat zien dat men al heel wat meer te weten was gekomen over magische vierkanten, want ook de som der getallen op alle zogenaamde *gebroken* diagonalen is gelijk aan de magische som van 34. Dat wil zeggen dat bijvoorbeeld 16+13+1+4=34, 2+3+15+14=34, 2+12+15+5=34, enzovoort. Zulke vierkanten heten *pan(diagonaal) magisch* en worden ook wel *duivelse* vierkanten genoemd.

Als je echter nog wat langer naar het Khajurahovierkant kijkt, zul je ontdekken dat het nog veel meer magische eigenschappen heeft: pak een willekeurig twee bij twee deelvierkant in het vierkant, bijvoorbeeld gevormd door de getallen 7,12,2 en 13 of door de getallen 3,10,6 en 15 en je zult zien dat ook de som van alle getallen in zo'n vierkant weer de magische som van 34 oplevert!

Een heel beroemd zuiver magisch vierkant verscheen in het jaar 1514 in de gravure *Melancholia I* van de Duitse renaissancekunstenaar en wiskundige Albrecht Dürer (1471-1528).

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Verschillende wetenschappers beweren dat het jaartal van verschijning, 1514, dat onderaan in het vierkant staat, geen toeval was, maar opzettelijk door Dürer daar moet zijn neergezet. Maar ook Dürer's initialen komen in het vierkant voor, als je tenminste 1 door A, 2 door B, 3 door C, 4 door D enzovoorts vervangt.

Nog opmerkelijker is het feit dat opdezelfde wijze de naam ALBRECHT DURER het getal $1 + 12 + 2 + \ldots + 18 = 135$ oplevert, terwijl de som van alle getallen in het vierkant gelijk is aan $1 + 2 + 3 + \ldots + 16 = 136$. Echter het ontbrekende getal 1 was in die tijd het symbool voor God. Heeft Dürer zich in het vierkant naast God afgebeeld?

Vervolgens wordt in de lezing aan de hand van een aantal schitterende plaatjes aangetoond dat er nog heel wat symmetrie in het vierkant verborgen zit, die pas aan het licht komt als je gebruik maakt van het tweetallig stelsel, dat in Dürer's tijd nog niet was uitgevonden!

De inleiding wordt afgesloten met het volgende, zogenaamde *alfamagische* vierkant (waarvan de magische som 314 is, de eerste drie decimalen van π).

62	93	74	85
75	84	63	92
83	72	95	64
94	65	82	73

Het aantal letters in tweeënzestig is 12, het aantal letters in drieënnegentig is 14 enzovoorts. Dit levert het volgende vierkant op, dat ook weer magisch is!

12	14	14	12
13	13	12	14
13	14	13	12
14	11	13	14

Het opmerkelijke van dit vierkant is dat ook voor andere talen (Duits, Engels, Frans, Spaans, Italiaans, Russisch,....) een vertaling van de getallen naar letters en weer naar cijfers, een magisch vierkant oplevert! Bijvoorbeeld de Engelse vertaling levert het volgende vierkant op.

8	11	11	10
11	10	10	9
11	10	10	9
10	9	9	12

welke magisch is met som 40.

2 Euler en de Latijnse vierkanten

In het tweede deel van de lezing wordt uitgelegd hoe de geniale Zwitserse wiskundige Leonhard Euler (1707-1783) in 1776 de zogenaamde *Latijnse vierkanten* invoerde (de voorlopers van onze Sudoku's!), om daarmee zuiver magische vierkanten van willekeurige grootte te maken. Zijn methode wordt gedemonstreerd aan de hand van het vierkant van Khajuraho.

Uitgangspunt is de volgende eenvoudige opmerking.

Ieder getal is een viervoud plus een rest die $0, 1, 2$ *of* 3 *is.*

Trek nu van alle getallen in het vierkant van Khajuraho 1 af en schrijf ieder getal in het zo ontstane vierkant als een viervoud plus een rest, dus bijvoorbeeld $6 = 4 \times 1 + 2$, $11 = 4 \times 2 + 3$ enzovoorts. We vinden dan

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 6 & 11 & 0 & 13 \\ \hline 1 & 12 & 7 & 10 \\ \hline 15 & 2 & 9 & 4 \\ \hline 8 & 5 & 14 & 3 \\ \hline \end{array} = 4 \times \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 3 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 0 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 3 & 0 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2 & 3 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 3 & 2 \\ \hline 3 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

We zien dat het vierkant opgebouwd is uit twee vier bij vier mini-Sudokus!

Deze observering leidde Euler tot de invoering van de zogenaamde Latijnse vierkanten.

Een *Latijns vierkant* van orde n is een n bij n vierkant met daarin precies n verschillende symbolen. Die moeten bovendien zó gerangschikt zijn dat in iedere rij en iedere kolom al deze n verschillende symbolen precies één keer voorkomen. Een compleet ingevulde 9 bij 9 Sudoku is een voorbeeld van een Latijns vierkant van orde negen. We zullen voor $n = 4$ Eulers methode bespreken.

Hij redeneerde als volgt: stel dat je twee Latijnse vierkanten van orde 4 hebt, laten we ze N en M noemen, die bovendien de *extra eigenschap* hebben dat op hun diagonalen ook de getallen $0, 1, 2, 3$ precies één keer voorkomen. Vorm dan net als voorheen het volgende vierkant V

$$V = 4 \times N + M$$

Dit nieuwe vierkant, zo liet Euler zien, is dan altijd magisch! Om er ook nog voor te zorgen dat alle getallen $0, 1, 2, \ldots, 15$ in het vierkant voorkwamen voerde hij de zogenaamde orthogonale vierkanten in.

Twee (Latijnse) vierkanten heten *orthogonaal* als het vierkant der paren, dat ontstaat als je beide vierkanten "op elkaar legt", uitsluitend verschillende paren bevat.

Euler's methode om zuiver magische vierkanten te maken bestaat er dan uit twee orthogonale Latijnse verkanten N en M, bestaande uit de getallen $0, 1, 2, 3$ te kiezen en vervolgens bij het vierkant $4 \times N + M$ steeds 1 op te tellen. Als de vierkanten N en M ook op de diagonalen de getallen $0, 1, 2, 3$ hebben, is het resulterende vierkant zuiver magisch.

In de lezing laten we zien hoe we met deze methode heel wat meer magische en panmagische vierkanten kunnen maken en verklaren ook hoe het alfamagische vierkant gemaakt is en waarom het werkt.

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Figuur 1: Franklin's vierkant van orde 8

3 De vierkanten van Benjamin Franklin

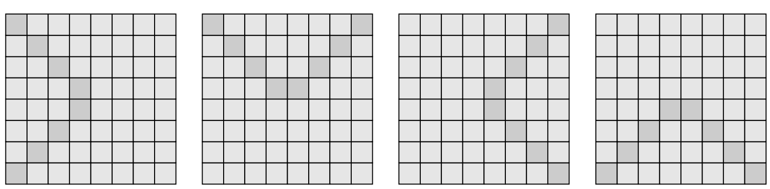
In het laatste deel van de lezing worden de zogenaamde *Franklin magische* vierkanten besproken. Benjamin Franklin(1706-1790) maakte rond 1750 een aantal bijzonder magische vierkanten. Een ervan staat hieronder afgebeeld.

Het bestaat uit de opeenvolgende getallen $1, 2, 3, \ldots, 64$ en heeft de volgende bijzondere eigenschappen.

1) De som van alle getallen in iedere *halve* kolom of rij (vanaf een rand gerekend) is gelijk aan 130, met andere woorden is gelijk aan de helft van de magische som.

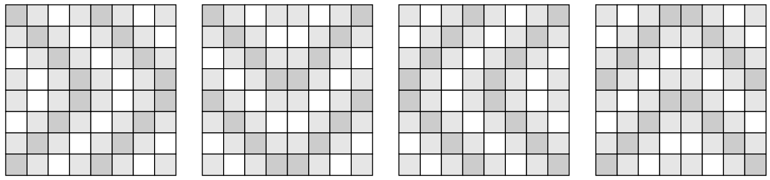
2) De som van alle getallen op ieder van de vier *gebogen diagonalen* (zie figuur 2) is gelijk aan de magische som 260. Hetzelfde geldt voor de som van alle getallen op ieder van de gebogen diagonalen die parallel zijn aan één van de vier "hoofd-gebogen diagonalen" (zie figuur 3).

3) De som van alle getallen in ieder 2×2 deelvierkant is gelijk aan de helft van de magische som, met andere woorden is gelijk aan 130.



Figuur 2: gebogen diagonalen

We zullen een vierkant dat bovenstaande drie eigenschappen heeft voortaan een *Franklin magisch* vierkant noemen. Als het, zoals in Franklin's voorbeeld, zo is



Figuur 3: parallele gebogen diagonalen

dat het de opeenvolgende getallen $1, 2, 3, \ldots$ bevat, noemen we het een *zuiver Franklin magisch* vierkant.

Het bleef een mysterie hoe Franklin zijn vierkanten gemaakt had. In deze lezing zal worden uitgelegd hoe de methode van Euler gebruikt kan worden om het mysterie van Franklin op te lossen. Dit gaat kortweg alsvolgt: trek 1 af van ieder getal in het vierkant (van Franklin) en schrijf vervolgens het nieuwe vierkant als $8 \times N + M$, door ieder getal als een 8-voud plus een rest te schrijven. De vierkanten N en M blijken een bijzonder mooie struktuur te hebben. Met wat eenvoudige algebra (eerste klas van de middelbare school) wordt dan uitgelegd hoe Franklin zijn vierkanten gemaakt zou kunnen hebben en hoe je zelf een heleboel nieuwe Franklin vierkanten kunt maken.

Tot slot van de lezing worden er nog een aantal open problemen aangaande magische vierkanten besproken.

Diegene die geïnteresseerd zijn geraakt in magische vierkanten, kunnen hierover meer te weten komen in mijn recente boek:

Magische Vierkanten
Van Lo-Shu tot sudoku
ISBN 9085710529
Veen Magazines, 2006