Representations of algebraic groups

Lecture 2 : multilinear algebra

Te behandelen : $\otimes$, Sym^n, Λ^n

De samenvatting in Fulton-Harris §B.1 en §B.2 dekt ongeveer de lading maar de studenten zullen er meer uitleg bij nodig hebben.

Voorstel (hier kan je op variëren) :

Ik zou alles doen over een willekeurig lichaam k (oppassen met $\mathrm{char}(k) > 0$).
Voor dit vak is $k = \mathbb{C}$ het belangrijkst.

- Bilin. afb. $V \times W \xrightarrow{b} X$. $\mathrm{Bilin}(V, W; X)$ is een vectorruimte.

  Functorialiteit : • $X \xrightarrow{h} X'$ lineair dan $h \circ b$ weer bilineair

  • $\left.\begin{array}{l} f : V' \to V \\ g : W' \to W \end{array}\right\}$ lin., dan $b \circ (f \times g) : V' \times W' \to X$ weer bilin.

- Constructie van $V \otimes_k W$ als $\left\langle \begin{array}{l} \text{vectorruimte op} \\ \text{de basis } V \times W \end{array} \right\rangle \Big/ \left\langle \begin{array}{l} \text{deelruimte voortg.} \\ \text{door } \ldots \end{array} \right\rangle$

  (Hier kun je bijv. Warner volgen, maar het staat op veel plaatsen goed.)

- De afb $\beta : V \times W \longrightarrow V \otimes_k W$

  $(v, w) \longmapsto v \otimes w =$ klasse van (v, w) in $V \otimes W$

  is bilineair, per constructie. Een will. elt. van $V \otimes_k W$ is lin. comb. van zulke "pure" tensoren.

- Universele eigenschap : Als $b : V \times W \to X$ bilineair dan $\exists!$ lin. afb. $f : V \otimes_k W \longrightarrow X$ zo dat $b = f \circ \beta$. Anders gezegd :

$$\mathrm{Hom}_k(V \otimes_k W, X) \longrightarrow \mathrm{Bilin}(V, W; X)$$
$$f \longmapsto f \circ \beta$$

is een isomorfisme.

• Gevolg : Als $\dim(V), \dim(W) < \infty$ dan is

$$V \otimes_k W \cong \mathrm{Bilin}(V, W; k)^\vee$$

en dus $\dim(V \otimes_k W) = \dim(V) \cdot \dim(W)$ (*)

(Voor dit laatste : als je bases $\{e_i\}$ en $\{f_j\}$ hebt dan wordt een bilin. afb. $b: V \times W \to k$ eenduidig bepaald door de $b(e_i, f_j)$ en deze zijn vrij te kiezen. Voor $W = V$ heb ik dit in het 1[e] college al besproken.)

• Propositie : Als $\{e_i\}$ een basis is voor V
$\{f_j\}$ —— " —— W
dan is $\{e_i \otimes f_j\}$ een basis voor $V \otimes_k W$.

Bewijs : (1) de $e_i \otimes f_j$ brengen $V \otimes_k W$ voort.
(2) als $\dim(V) < \infty$ en $\dim(W) < \infty$ dan volgt de prop. uit (*)
(3) in het algemene geval volgt uit (2) dat de $e_i \otimes f_j$ lineair onafhankelijk zijn.

(Subtiel punt : je gebruikt bij (3) dat als $V' \subset V$ en $W' \subset W$ dan $V' \otimes_k W' \hookrightarrow V \otimes_k W$. Dat is waar en niet moeilijk in te zien maar hier wil je dit misschien onder het tapijt schuiven.)

• Als $f: V_1 \to V_2$ lineair dan $f \otimes g : V_1 \otimes_k W_1 \to V_2 \otimes_k W_2$
$g: W_1 \to W_2$

In termen van matrices : als je voor de betrokken ruimten bases kiest,
f gegeven door matrix A,
g —— " —— B
dan $f \otimes g$ gegeven door $A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot B & a_{12} \cdot B & \cdots \\ a_{21} \cdot B & & \\ \vdots & & \end{pmatrix}$

- Basale eigenschappen:
  - $V \otimes_k W \cong W \otimes_k V$
  - $(V_1 \oplus V_2) \otimes_k W \cong (V_1 \otimes_k W) \oplus (V_2 \otimes_k W)$
  - $(U \otimes_k V) \otimes_k W \cong U \otimes_k (V \otimes_k W)$

    en dus kunnen we gewoon $U \otimes_k V \otimes_k W$ schrijven.

- $\otimes$-producten van meerdere ruimten: multilineaire afb. $V_1 \times \dots \times V_n \to W$.

  Het meeste van wat we hiervoor deden heeft een directe generalisatie.

  $$\beta : V_1 \times \dots \times V_n \longrightarrow V_1 \otimes_k \dots \otimes_k V_n \quad \text{is multilineair en}$$
  $$(v_1, \dots, v_n) \longmapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_n$$

  $$\mathrm{Hom}_k(V_1 \otimes \dots \otimes V_n, W) \longrightarrow \mathrm{Multilin}(V_1, \dots, V_n ; W)$$
  $$f \longmapsto f \circ \beta$$

  is een isomorfisme.

- De $\otimes$-algebra. Def:

  $$T(V) := \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n}$$

  met $V^{\otimes n} = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{n}$ en per def. $V^{\otimes 0} = k$.

  Dan: $T(V)$ is een k-algebra, niet commutatief zodra $\dim(V) > 1$;

  $(v_1 \otimes \dots \otimes v_m) \cdot (w_1 \otimes \dots \otimes w_n) = v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes w_1 \otimes \dots \otimes w_n$

  & vervolgens bilineair uitwerken van algemenere producten.

- Opmerking: $T(V)$ is een gegradeerde algebra

  $T(V) = \bigoplus T(V)_n$ met $T(V)_n = V^{\otimes n}$;

  als $x \in T(V)_m$ en $y \in T(V)_n$ dan $x \cdot y \in T(V)_{m+n}$.

- Symmetrische & anti-symmetrische vormen

De groep S_n werkt op V^n door verwisseling van de factoren:

$$\sigma \cdot (v_1, \dots, v_n) = (v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)})$$

(Dit is een actie van rechts, niet van links; maar daar zou ik niet op ingaan.)

Def: Een multilineaire vorm $b : \underbrace{V \times \dots \times V}_{n} \longrightarrow W$ heet

symmetrisch als $b(\sigma \cdot x) = b(x)$ voor alle $x \in V^n$

alternerend $b(\sigma \cdot x) = \varepsilon(\sigma) \cdot b(x)$ — " —

($\varepsilon(\sigma) \in \{\pm 1\}$ het teken)

De symm. / alternerende vormen vormen een deelruimte

$$\begin{matrix} \mathrm{Multilin}^s(V^n; W) \\ \mathrm{Multilin}^a(V^n; W) \end{matrix} \subseteq \mathrm{Multilin}(V^n; W) \cong \mathrm{Hom}_k(V^{\otimes n}; W)$$

Deze deelruimten corresponderen met quotiëntruimten van $V^{\otimes n}$ die we nu gaan invoeren.

- Zij $I \subset T(V)$ het 2-zijdige ideaal voortgebracht door alle elementen $x \otimes y - y \otimes x$ voor $x, y \in V$.

De symmetrische algebra van V is $\mathrm{Sym}^\bullet(V) := T(V)/I$.

- Opm: I is een homogeen ideaal, dwz: $I = \bigoplus I_n$ met $I_n = I \cap T(V)_n$

Daarmee: $\mathrm{Sym}^\bullet(V) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathrm{Sym}^n(V)$ met

$$\mathrm{Sym}^n(V) = T(V)_n / I_n$$

$\mathrm{Sym}^\bullet(V)$ is een commutatieve algebra

- Voorbeelden voor lage n :

$n=0$: $T(V)_0 = k$ dus $Sym^0(V) = k$

$I_0 = (0)$

$n=1$: $T(V)_1 = V$ dus $Sym^1(V) = V$

$I_1 = (0)$

$n=2$ $T(V)_2 = V \otimes V$ dus $Sym^2(V) = V^{\otimes 2} \big/$ relaties $x \otimes y - y \otimes x = 0$ voor alle $x, y \in V$

$I_2 = Span(x \otimes y - y \otimes x)$

$n=3$ $T(V)_3 = V \otimes V \otimes V$

I_3 bevat alle elementen vd vorm

- $x \otimes y \otimes z - y \otimes x \otimes z$
- $x \otimes y \otimes z - x \otimes z \otimes y$

en dus ook alle

- $x \otimes y \otimes z - z \otimes y \otimes x$
- $x \otimes y \otimes z - y \otimes z \otimes x$

ek

Notatie : $x_1 x_2 \cdots x_n :=$ klasse van $x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_n$ in $Sym^n(V)$.

Voor $\sigma \in S_n$ is $x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)} = x_1 x_2 \cdots x_n$!

Nu : $b : V^n \longrightarrow Sym^n(V)$, $(v_1, \ldots, v_n) \longmapsto v_1 v_2 \cdots v_n$ is een symmetrische multilineaire vorm

Universele eigenschap : Als $\beta : V^n \to W$ symmetrisch multilineair dan $\exists!$ k-lineaire $f : Sym^n(V) \to W$ met $\beta = f \circ b$.

Maw :

$$Hom_k(Sym^n(V), W) \longrightarrow Multilin^s(V^n; W)$$
$$f \longmapsto f \circ b$$

is een isomorfisme.

Propositie. Als $\{e_1, \dots, e_d\}$ een basis is voor V, dan geven de

$e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_n}$ met $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_n$ een basis voor $\mathrm{Sym}^n(V)$

Ihb: $\dim \mathrm{Sym}^n(V) = \binom{d+n-1}{d-1}$.

- Zij $J \subset T(V)$ het 2-zijdige ideaal voortgebracht door alle elementen $x \otimes x$ voor $x \in V$.

  Opm Als $\mathrm{char}(k) \neq 2$ dan is J hetzelfde als het ideaal J' voortg. door alle $x \otimes y + y \otimes x$: gebruik dat

  $$(x+y) \otimes (x+y) = (x \otimes x) + (x \otimes y + y \otimes x) + (y \otimes y)$$

  Dus $J' \subseteq J$. Anderzijds: $y = x$ nemen geeft dat $2 \cdot J \subseteq J'$.

- De uitwendige algebra van V is $\Lambda^\bullet V = T(V)/J$.

  Net zoals bij de symm. alg: J is een homogeen ideaal, $J = \bigoplus J_n$

  en $\Lambda^\bullet V = \bigoplus_{n \geq 0} \Lambda^n V$

- Voor lage n:

  $J_0 = 0$ dus $\Lambda^0 V = k$

  $J_1 = 0$ dus $\Lambda^1 V = V$

  J_2 is het opspansel van alle $\begin{cases} x \otimes x \\ x \otimes y + y \otimes x \end{cases}$ dus

  $\Lambda^2 V = V^{\otimes 2} /$ relaties $x \otimes x = 0$ en

  $x \otimes y = - y \otimes x$

J_3 = Opspansel van alle $x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 - \varepsilon(\sigma) \cdot x_{\sigma(1)} \otimes x_{\sigma(2)} \otimes x_{\sigma(3)}$

voor $x_1, x_2, x_3 \in V$

$\sigma \in S_3$

dus $\Lambda^3 V = V^{\otimes 3} \Big/$ relaties $x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 = \varepsilon(\sigma) \cdot x_{\sigma(1)} \otimes x_{\sigma(2)} \otimes x_{\sigma(3)}$

Notatie: $x_1 \wedge \dots \wedge x_n$ = klasse van $x_1 \otimes \dots \otimes x_n$ in $\Lambda^n V$.

Voor $\sigma \in S_n$ is $x_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge x_{\sigma(n)} = \varepsilon(\sigma) \cdot x_1 \wedge \dots \wedge x_n$.

Nu: $b : V^n \longrightarrow \Lambda^n V$ is een alternerende multilin. vorm

$(v_1, \dots, v_n) \longmapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_n$

Universele eigenschap: Als $\beta : V^n \to W$ een alternerende multilin vorm is dan $\exists !$ k-lineaire $f : \Lambda^n V \to W$ zo dat $\beta = f \circ b$. Maw:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_k(\Lambda^n V, W) &\longrightarrow \mathrm{Multilin}^a(V^n; W) \\ f &\longmapsto f \circ b \end{aligned}$$

is een isomorfisme.

- Propositie Als $\{e_1, \dots, e_d\}$ een basis is voor V dan vormen de $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$ met $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq d$ een basis van $\Lambda^n V$.

Ihb: $\dim \Lambda^n V = \binom{d}{n}$; $\Lambda^n V = 0$ voor $n > d$.