RINGEN EN LICHAMEN 1

Hertentamen, maandag 7 juli 2014, 12:30–15:30.

— Schrijf op elk blad dat je inlevert je naam. Schrijf op de eerste pagina ook het nummer van je collegekaart.
— Geef volledige en duidelijke argumenten voor de beweringen die je doet. Je mag alle resultaten gebruiken die zijn behandeld, mits je steeds duidelijk aangeeft wat je gebruikt.
— Schrijf *leesbaar* en lever geen kladwerk in. Stukken tekst die niet gemakkelijk zijn te ontcijferen worden genegeerd.

Opgave 1. Zij R een (mogelijk niet-commutatieve) ring met $1 \neq 0$.

(i) (Theorievraag) Geef de definitie van wanneer we een element $r \in R$ een *nuldeler* noemen en van wanneer we r een *eenheid* noemen.
(ii) (Theorievraag) Bewijs dat een element $r \in R$ niet tegelijk een eenheid en een nuldeler kan zijn.
(iii) Beschouw de ring $\mathbb{F}_2[X]/(X^3)$. Deze ring heeft 8 elementen, namelijk de 8 klassen van de vorm $a + bX + cX^2 \pmod{X^3}$ met a, b, $c \in \mathbb{F}_2$. (NB: $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.) Geef van elk van deze 8 elementen aan of het een eenheid is en of het een nuldeler is. (Geef je antwoorden bij voorkeur in de vorm van een tabel.)

Uitwerking. Voor (i) en (ii), zie de syllabus. In (iii), schrijf kortweg (a, b, c) voor de klasse $a + bX + cX^2 \pmod{X^3}$. Dan is $(0, 0, 0)$ het nulelement, dus geen eenheid en ook geen nuldeler. De vier klassen $(1, b, c)$ zijn eenheden met inverse $(1, b, c+b^2)$. De overige drie klassen $y = (0, b, c)$ zijn nuldelers want ze zijn niet nul terwijl $x^2 \cdot y = 0$, waarbij $x = X \pmod{X^3}$ ook niet nul is.

Opgave 2.

(i) (Theorievraag) Formuleer de Chinese reststelling voor ringen.
(ii) Beschouw de idealen I, $J \subset \mathbb{Q}[X, Y]$ gegeven door $I = (X, X^2Y + Y + 3)$ en $J = (Y - 1)$. Bewijs dat deze idealen onderling ondeelbaar zijn.
(iii) Bewijs dat

$$\mathbb{Q}\big[X, Y, Z\big]/\big(XY - X,\ X^2Y + Y - Z,\ YZ + 3Y - Z - 3\big) \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}[T]\,.$$

Uitwerking. (i) Zie syllabus. (ii) Er geldt dat $Y + 3 \in I$, dus $4 = (Y + 1) - (Y - 1) \in I + J$ en omdat $4 \in \mathbb{Q}^*$ volgt dat $I + J = (1)$. (iii) Eerst delen we uit naar het polynoom $X^2Y + Y - Z$, dat lineair is in Z. Dat geeft dat de genoemde ring isomorf is met

$$\mathbb{Q}[X, Y]/(XY - X, X^2Y^2 + Y^2 + 2Y - X^2Y - 3)\,.$$

Mer nu op dat $XY - X = X(Y - 1)$ en $X^2Y^2 + Y^2 + 2Y - X^2Y - 3 = (X^2Y + Y + 3)(Y - 1)$, dus $(XY - X, X^2Y^2 + Y^2 + 2Y - X^2Y - 3) = I \cdot J$. De Chinese reststelling geeft dan dat de genoemde ring isomorf is met

$$\mathbb{Q}[X,Y]/I \times \mathbb{Q}[X,Y]/J \cong \mathbb{Q}[X,Y]/(X, Y+3) \times \mathbb{Q}[X,Y]/(Y-1) \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}[X]\,.$$

Opgave 3.

(i) Is het ideaal $(X^2+Y, Y+1) \subset \mathbb{C}[X,Y]$ een priemideaal? Is het een maximaal ideaal? Licht je antwoorden zorgvuldig toe.

(ii) Geef van elk de volgende idealen van de ring $\mathbb{Z}[X]$ aan of het een priemideaal is en of het een maximaal ideaal is:

$$(20, X)\,, \quad \big(7, X^2-2\big)\,, \quad \big(7, X^3-2\big)\,.$$

Licht je antwoorden zorgvuldig toe.

Uitwerking. (i) Er geldt $\mathbb{C}[X,Y]/(X^2+Y, Y+1) \cong \mathbb{C}[X]/(X^2-1)$ en $(X^2-1) \subset \mathbb{C}[X]$ is geen priemideaal omdat $X-1$ en $X+1$ er niet in zitten maar het product $(X+1)(X-1) = X^2-1$ wel. Dus $(X^2+Y, Y+1)$ is geen priemideaal en ook geen maximaal ideaal.

(ii) Het ideaal $(20, X)$ is niet priem, en dus ook niet maximaal, want 4 en 5 zitten er niet in maar $4 \cdot 5$ wel. Het ideaal $(7, X^2-2)$ is ook niet priem want $\mathbb{Z}[X]/(7, X^2-2) \cong \mathbb{F}_7[X]/(X-3)(X+3)$ is geen domein. Het ideaal $(7, X^3-2)$ is maximaal, en dus ook priem; om dit aan te tonen volstaat het te bewijzen dat $X^3-2 \in \mathbb{F}_7[X]$ irreducibel is. Dit kunnen we doen door na te gaan dat X^3-2 geen nulpunten heeft in $\mathbb{F}_7$. Direct narekenen geeft dat 0 en ± 1 de enige derdemachten zijn in $\mathbb{F}_7$.

Opgave 4. Zij R een commutatieve ring met $1 \neq 0$. Gegeven zijn verder twee idealen I en J van R.

(i) Als $I \cup J$ een ideaal is, bewijs dat $I \subseteq J$ of $J \subseteq I$.

(ii) Als $I \cap J$ een priemideaal is, bewijs dat $I \subseteq J$ of $J \subseteq I$.

Uitwerking. Stel $I \subsetneq J$ en $J \subsetneq I$. Dan zijn er $x \in I \setminus J$ en $y \in J \setminus I$. Als $I \cup J$ een ideaal was, dan moest $x+y$ weer een element zijn van I of van J; tegenspraak. Als $I \cap J$ een priemideaal was dan moest, wegens $xy \in IJ \subset I \cap J$ ofwel $x \in I \cap J$, ofwel $y \in I \cap J$, in tegenspraak met hoe we deze elementen hebben gekozen.

Opgave 5. Hieronder volgen drie uitspraken. Bepaal van elk van deze uitspraken of deze in het algemeen *waar* is of *onwaar*. Als een uitspraak waar is, geef dan een bewijs. Als een uitspraak onwaar is, geef dan een concreet voorbeeld waaruit dit blijkt. In deze uitspraken zijn R en S commutatieve ringen met $1 \neq 0$ en zijn $f\colon R \to S$ en $g\colon R \to S$ unitaire homomorfismen.

(a) De afbeelding $h\colon R \to S$ gegeven door $h(r) = f(r) + g(r)$ is weer een homomorfisme van ringen.

(b) Als $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(g)$ dan is er een unitair homomorfisme $\alpha\colon R \to R$ zo dat $f = g \circ \alpha$.

(c) De afbeelding $\phi\colon R \to S \times S$ gegeven door $\phi(r) = \big(f(r), g(r)\big)$ is weer een unitair homomorfisme van ringen.

Uitwerking. (a) Onwaar. Neem $f = g = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$, dan is $h\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ de afbeelding $n \mapsto 2n$ en dit is geen homomorfisme. (b) Onwaar. Neem $f\colon \mathbb{Z}[t] \to \mathbb{C}$ de afbeelding bepaald door $t \mapsto \pi$ en $g\colon \mathbb{Z}[t] \to \mathbb{C}$ de afbeelding bepaald door $t \mapsto i$. Dan is f injectief (want π is transcendent) dus $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$. Er kan geen α bestaan met $f = g \circ \alpha$ want $g(r)$ is algebraïsch over $\mathbb{Q}$ voor alle $r \in R = \mathbb{Z}[t]$. (c) Waar: ga gewoon met de hand na dat de gewenste eigenschappen gelden.