RINGEN EN LICHAMEN

Proeftentamen

Geef jezelf 3 uur de tijd om dit tentamen te maken. Gebruik geen syllabus, en geen hulpmiddelen zoals een rekenmachine of computer. Kijk pas nadat je alle opgaven hebt gemaakt naar de uitwerking van dit proeftentamen.

Opgave 1.

(i) Ontbind de volgende polynomen in irreducibele factoren in $\mathbb{Z}[X]$ en ook in $\mathbb{Q}[X]$:

$$2X^5 - 12X^3 + 64X^2 - 12$$
$$X^3 - 4X^2 - 4X - 5$$

Licht je antwoorden zorgvuldig toe.

(ii) Ontbind het polynoom $2X^5Y^5 - Y^5 + 3X^2Y^3 + 8X^2 - X$ in irreducibele factoren in $\mathbb{Q}[X, Y]$.

Opgave 2. Zij R een commutatieve ring met $1 \neq 0$. Gegeven zijn verder twee idealen I en J van R.

(i) Als $I \cup J$ een ideaal is, bewijs dat $I \subseteq J$ of $J \subseteq I$.

(ii) Als $I \cap J$ een priemideaal is, bewijs dat $I \subseteq J$ of $J \subseteq I$.

Opgave 3. In $\mathbb{Z}[X]$ bekijken we de polynomen

$$f = X^2 + 4\,, \qquad g = X^3 - X^2 + 4X - 1\,, \qquad h = X^2 + 6\,.$$

Zij $I = (f, g) \subset \mathbb{Z}[X]$ het door f en g voortgebrachte ideaal, en laat $R = \mathbb{Z}[X]/\big(I \cap (h)\big)$.

(i) Bewijs dat $R \cong \mathbb{Z}[X]/I \times \mathbb{Z}[X]/(h)$.

(ii) Bepaal hoeveel verschillende homomorfismen $f\colon R \to \mathbb{F}_7$ er zijn. Licht je antwoord zorgvuldig toe.

Opgave 4.

(i) Bewijs dat $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}\big(\sqrt{2}\big)$.

(ii) Bepaal het minimumpolynoom van het complexe getal $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ over $\mathbb{Q}$ en bepaal de uitbreidingsgraad $\big[\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{5}) : \mathbb{Q}\big]$. Licht je antwoorden zorgvuldig toe.

(iii) Zij β een complex getal dat voldoet aan de relatie $\beta^3 + 3\beta^2 - 3 = 0$. Bepaal c_0, c_1, $c_2 \in \mathbb{Q}$ zo dat $\beta^4 - (1 + \beta)^{-1} = c_0 + c_1\beta + c_2\beta^2$.

Ga verder op de achterkant

Opgave 5.

(i) (Theorievraag) Zij K een lichaam van karakteristiek $p > 0$. Bewijs dat de afbeelding $F\colon K \to K$ gegeven door $x \mapsto x^p$ een homomorfisme van lichamen is.

(ii) Zij $f \in \mathbb{F}_7[X]$ gegeven door $f = X^3 + X + 1$. Bewijs dat f irreducibel is en bepaal het aantal elementen van het ontbindingslichaam $\Omega^f_{\mathbb{F}_7}$ van f over $\mathbb{F}_7$. Licht je antwoord zorgvuldig toe.

(iii) Zij $\alpha \in \Omega^f_{\mathbb{F}_7}$ een nulpunt van het polynoom f uit onderdeel (ii). Bepaal het minimumpolynoom van $\alpha^{49} - 1$ over $\mathbb{F}_7$.