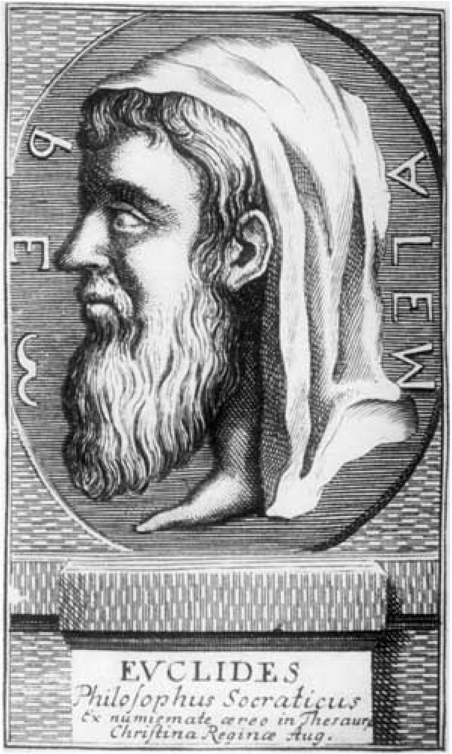
K.U.N.
Subfaculteit Wiskunde

Cursus:
Wiskundig denken

Les 0:
Inleiding

Frans Keune

 keune@sci.kun.nl
Laatste wijziging: 31 oktober 2001
Versie 1.0



Inhoudsopgave

*Dit is een inleiding op de cursus '**Wiskundig denken**'. Deze cursus is bedoeld om je op weg te helpen om met wiskunde om te gaan zoals een wiskundige dat doet. Het is een misvatting dat je veel moet weten om als wiskundige te werk te gaan. Het gaat in de wiskunde veel meer om een manier van denken dan om feitenkennis. In Les 1 beginnen we met 'echte' wiskunde. Voordat je begint is het goed te weten waar je aan begint. Daar is deze inleiding voor bedoeld.*

Zoals met zoveel het geval is, leer je wiskunde het best in de praktijk, door het te doen. De wiskunde is een vak met een geheel eigen karakter. Deze inleiding moet daar enig inzicht in geven.

Het bestaat als vak, als discipline, al duizenden jaren De naam 'wiskunde' is bedacht door Simon Stevin in de zestiende eeuw. In vrijwel alle andere talen is de naam een of andere vorm van 'mathematica'. Met 'wiskunde' wordt aangegeven dat het gaat om zeker weten. Hoe trachten wiskundigen dat te bereiken? Wat is het nut ervan? Is wiskunde meer dan alleen nuttig?

1. De som van de hoeken van een driehoek

We beginnen met een eenvoudige en overbekende meetkundige stelling om het speciale karakter van de wiskunde mee te illustreren. Deze bekende stelling in de wiskunde zegt:

De som van de hoeken van iedere driehoek is $180°$.

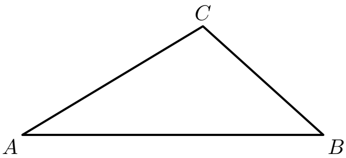
Hoe kun je dit zeker weten? Je tekent een diehoek, je pakt je gradenboog, je meet de hoeken, telt ze op. En wat zul je zien? De som is ongeveer 180°. Heb je dit met nog een paar driehoeken gedaan, dan geloof je al snel dat de stelling klopt. Deze werkwijze is niet die van de wiskunde, het lijkt meer op natuurkunde. Je hebt een theorie: de som van de hoeken van iedere driehoek is 180°. Vervolgens toets je deze theorie met experimenten. De gevonden afwijkingen zijn natuurlijk te wijten aan meetfouten: ze zijn steeds niet groot genoeg om de theorie te verwerpen. Je hebt zoveel vertrouwen in de theorie, dat als de afwijking wel groot is, je dit toeschrijft aan een vergissing. Vergissen is menselijk. In de wiskunde gaat het erom het zeker te weten. In principe gaat het om een eeuwige waarheid die niet door nieuwe theorieën kan worden vervangen. Wat zijn hierbij de problemen? En hoe gaan wiskundigen daarmee om?

1. Is een driehoek een tekening die je met potlood en lineaal op papier hebt gemaakt? Als een driehoek zoiets is, dan rest je ook niets anders dan door waarneming regelmaat te zien, maar volledige exactheid is zo niet te bereiken. Daarvoor zit er teveel onbepaalds in de driehoeken die je tekent. Goed, wat je tekent is geen driehoek. Is het dan een

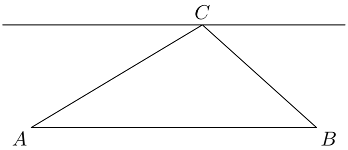
plaatje van een driehoek? Dat zou kunnen, maar je weet dan nog steeds niet wat een driehoek is. De Grieken (Plato) zagen het als een plaatje van een idee: je moet je zo'n driehoek voorstellen als bestaande uit lijnstukken die geen breedte hebben, zoals potloodstrepen dat wel hebben, en die samenkomen in punten. Punten hebben helemaal geen afmetingen. Zo'n driehoek zie je nergens, je kunt je er wel een voorstelling van maken. Maar je weet nooit zeker of een ander zich daarbij precies hetzelfde voorstelt. Zo'n driehoek is een hersenspinsel.

2. Als je nu zeker wilt weten of de som van de hoeken van iedere driehoek 180° is, dan kun je niets beginnen met je gradenboog, want wat moet je ermee als je een hersenspinsel bestudeert? Je zult je hersens moeten gebruiken. Er resteert je niets anders dan te redeneren. Door de abstractie is redeneren een noodzaak geworden.

3. Hier heb je een manier om in te zien (met een redenering) dat de hoeken samen 180° zijn. Een hoek van 180° is niet anders dan een gestrekte hoek. Je hoeft dus niet te weten wat graden zijn. Voor de redenering helpt het wel om een plaatje te tekenen. Je kunt er je gedachten aan ophangen en het helpt om deze gedachten te communiceren met anderen.



Door C gaat een lijn evenwijdig aan AB. Zijn twee lijnen evenwijdig en worden ze gesneden door een derde, dan is het duidelijk dat er verbanden zijn tussen de hoeken die zo ontstaan.



Gebruik je deze verbanden, dan leid je daarmee de stelling over de som van de hoeken van een driehoek af. Wat je hebt gedaan, is de stelling afleiden uit andere eigenschappen van hoeken en lijnen. Zoiets noemt men een bewijs: door logisch redeneren leid je uit reeds aanvaarde waarheden een nieuwe waarheid af.

4. Nu heb je een nieuw probleem. Als de stelling volgt uit eigenschappen van hoeken die optreden bij twee evenwijdige lijnen gesneden door een derde, waar volgen deze eigenschappen op hun beurt dan uit? Je kunt toch niet tot in het oneindige doorgaan met het afleiden van waarheden uit simpeler waarheden. Sommige waarheden zul je zonder

bewijs moeten accepteren. Je kunt afspreken welke waarheden geaccepteerd worden. Dan gaan we allemaal uit van dezelfde waarheden en kan iedereen nagaan of een bewijs deugt. Die afgesproken waarheden noemt men *axioma's*. Een axioma is bijvoorbeeld: door twee punten gaat precies één lijn. In het bewijs hebben we hier trouwens een ander axioma gebruikt: door een punt buiten een lijn gaat precies één lijn evenwijdig aan die lijn. Dit rechtvaardigt de hulplijn in ons bewijs. (Eeuwen lang hebben velen tevergeefs geprobeerd dit axioma uit de andere af te leiden. Men vond deze waarheid niet eenvoudig genoeg. Pas in de negentiende eeuw is men gaan inzien dat er ook meetkundes mogelijk zijn waarin dit axioma niet geldt.) De Grieken hebben de meetkunde van het platte vlak op deze wijze opgebouwd. Deze opbouw staat beschreven in de 'Stellingen' van Euclides.

5. De axiomatische aanpak lost ook een ander probleem op. Wat is een lijn? Een punt? Wat betekent: een lijn gaat door een punt? Als je afspreekt welke eigenschappen je alleen maar mag gebruiken, dan is het antwoord op deze vragen ook niet meer interessant. Begrippen als 'punt' en 'lijn' worden niet gedefinieerd: het zijn zogenaamde primitieve begrippen. Deze primitieve begrippen worden gebruikt om nieuwe begrippen te definiëren.

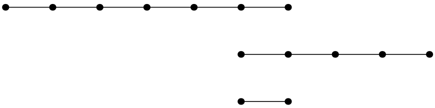
6. Bij het bewijzen van stellingen is het van belang deze af te leiden uit al geaccepteerde waarheden. Dat mogen er best meer zijn dan alleen de axioma's, als het maar duidelijk is wat er wordt aangenomen en

wat er wordt afgeleid.

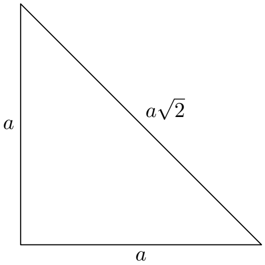
Voor hersenspinsels als bijvoorbeeld lijnen bestaan er verschillende interpretaties in de realiteit. Men kan zich een lijn voorstellen als een lichtstraal, de baan van een deeltje waarop geen krachten werken en op nog vele andere manieren. Als je accepteert dat de axioma's voor deze zaken gelden, dan zul je ook alle logische consequenties moeten accepteren. De hele wiskundige theorie is dan van toegepassing. De kracht van de wiskunde is dat één zo'n abstracte theorie vele toepassingen kan hebben. Dat is juist door het abstracte karakter van de wiskunde mogelijk.

2. Getallen in de meetkunde

In de Griekse wiskunde hadden getallen een meetkundige betekenis. Lang werd aangenomen (als axioma, want het sprak vanzelf) dat lijnstukken onderling meetbaar zijn. Dat wil zeggen dat de lengten van twee lijnstukken altijd veelvouden zijn van de lengte van een ander kleiner lijnstuk.



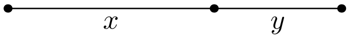
Vooral Pythagoras en zijn volgelingen hechtten daar sterk aan. Heb je een rechthoekige driehoek, waarvan de rechthoekszijden even lang zijn, zeg van lengte a, dan volgt uit de Stelling van Pythagoras dat de lengte van de schuine zijde $a\sqrt{2}$ is.



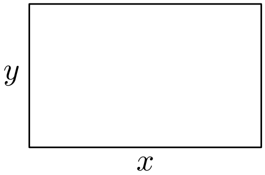
In Les 2 zullen we zien dat in dit geval de schuine zijde en de rechthoekszijde niet onderling meetbaar zijn. Die gedachte is al oud. In de Elementen van Euclides staat er een bewijs van. Eerder was Hippasus, een volgeling van Pythagoras, er al achter gekomen. De overlevering wil dat hij het er niet levend van heeft afgebracht. Later werd dit inzicht wel geaccepteerd en spande men zich in om bij bewijzen van meetkundige stellingen deze aanname van onderlinge meetbaarheid te vermijden. De Grieken bleven zich vooral op de meetkunde richten en hielden zich door dit soort complicaties weinig met getallen bezig. In deze cursus doen we dit juist wel. Niet dat we uitgaan van de volledig axiomatische opbouw zoals die in de negentiende eeuw door Peano is gegeven. Deze komt in Les 5 overigens wel aan de orde. We gaan hier uit van een grotere klasse van waarheden zoals de normale rekenregels voor optellen en vermenigvuldigen van getallen. Geïnteresseerden kunnen later alsnog de diepte ingaan en zich verdiepen in de opbouw van het gehele getalsysteem uit de axioma's van Peano.

3. De gulden snede

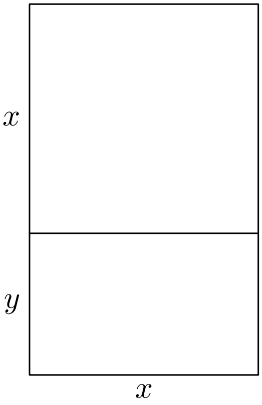
Een bij de Grieken zeer geliefde verhouding was de *gulden snede*, waarbij een lijnstuk in twee delen wordt verdeeld, een deel x en een kleiner deel y zo dat de verhouding van x tot y dezelfde is als die van het gehele lijnstuk $x + y$ tot x.



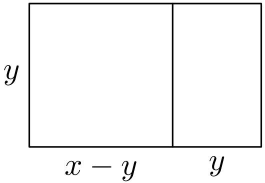
Deze verhouding zag men ook als ideaal voor de verhouding van de zijden van een rechthoek:



Je kunt ook zeggen: als ik aan zo'n rechthoek op de volgende wijze een vierkant plak, dan krijg ik weer zo'n rechthoek:



Of nog anders: als ik van zo'n rechthoek op de volgende wijze een vierkant afsnijd, dan blijft er weer zo'n rechthoek over.



Schrijven we $r = \frac{x}{y}$, dan volgt uit

$$\frac{y}{x-y} = \frac{x}{y}$$

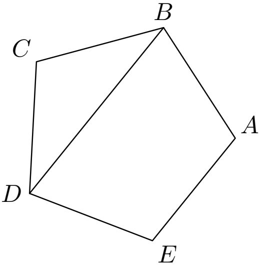
dat

$$r = \frac{x}{y} = \frac{1}{\frac{x-y}{y}} = \frac{1}{r-1},$$

ofwel $r^2 = r + 1$. Oplossen van deze kwadratische vergelijking levert: $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887\ldots$ We zullen in Les 2 inzien dat ook deze verhouding niet meetbaar is. Je kunt volhouden dat rechthoeken met deze verhouding van de zijden simpelweg niet bestaan. Bij rechthoekige driehoeken met gelijke rechthoekszijden is dat moeilijk vol te houden, want dat gaat wel erg in tegen de meetkundige intuïtie.

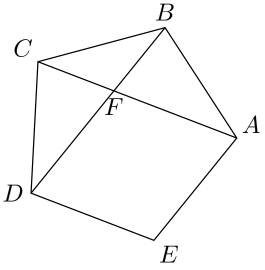
4. De gulden snede in een regelmatige vijfhoek

De stelling over de som van de hoeken van een driehoek is heel elementair. Niet van alle stellingen is de waarheid direct duidelijk. We geven daar een eenvoudig voorbeeld van.



Heb je een regelmatige vijfhoek, dan is met meten wel na te gaan dat de verhouding van een diagonaal tot een zijde ongeveer de gulden snede is. We willen hier niet 'ongeveer' maar 'exact'. We hebben dus een redenering nodig waar geen speld tussen te krijgen is (een logische redenering) en die leidt tot de conclusie:
De verhouding van een diagonaal van een regelmatige vijfhoek tot een zijde is de gulden snede.

We leiden eerst af hoe groot enkele hoeken van de figuur zijn. De som van de vijf hoeken van de vijfhoek is 540°, want een vijfhoek kan gedacht worden als opgebouwd uit drie driehoeken. Deze hebben elk 180° als som van hun hoeken. Voor de vijfhoek is de som van de hoeken dus drie keer zo groot. Elk van de vijf hoeken is dus een hoek van 108°.



Laat F het snijpunt zijn van de diagonalen AC en BD. Omdat de vijfhoek regelmatig is, is $\triangle ABC$ gelijkbenig. Er is een stelling die zegt dat de basishoeken van een gelijkbenige driehoek gelijk zijn. Dus $\angle BAC = \angle BCA$. Omdat van deze driehoek de tophoek 108° is, zijn de twee basishoeken samen 72° en dus elk 36°. Evenzo $\angle CBD = 36°$. Van $\triangle BCF$ zijn dus twee hoeken 36° en voor de andere hoek hebben we dan: $\angle BFC = 108°$. Van $\triangle CDF$ weten we nu dat $\angle FCD = 108° - 36° = 72°$ en $\angle CFD = 180° - 108° = 72°$. Een stelling zegt dat als twee hoeken van een driehoek gelijk zijn, deze driehoek gelijkbenig is. Dus $CD = FD$. Laat de lengte van BD gelijk zijn aan x en die van BC gelijk aan y. De hoeken van $\triangle BCF$ zijn gelijk aan die van $\triangle BDC$. Een stelling zegt dat deze driehoeken dan gelijkvormig zijn. Daaruit volgt dat $BD : BC = BC : BF$, ofwel $\frac{x}{y} = \frac{y}{x-y}$. Dat wil zeggen dat deze verhouding de gulden snede is.

We hebben hier diverse stellingen gebruikt die uit de axioma's zijn af te leiden. Bovendien zijn deze stellingen niet verrassend. Ook zonder bewijs wil je ze wel accepteren. Dat de verhouding van een diagonaal van een regelmatige vijfhoek tot een zijde juist de gulden snede is, dat zie je niet in een oogopslag. Je kunt het wel geloven door nauwkeurig te meten, maar alleen door een redenering kun je het zeker weten, dat wil zeggen even zeker als de in de redenering gebruikte stellingen.

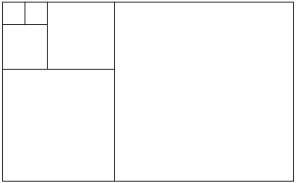
5. Fibonaccigetallen

De rij getallen

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots$$

die verkregen wordt door met 0 en 1 te beginnen en voor elk volgend getal de som van de twee laatste te nemen is de rij van de Fibonaccigetallen, genoemd naar Leonardo van Pisa (1170-1250), ofwel Fibonacci. Getal nummer n (beginnend bij nummer 0) heet het n-de Fibonaccigetal f_n. Deze getallen kom je in de natuur herhaaldelijk tegen, bijvoorbeeld als je bloemblaadjes gaat tellen.

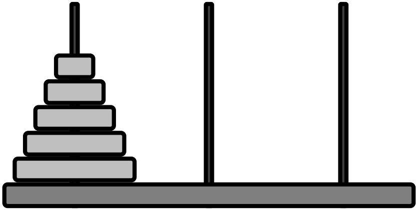
Je kunt er een rij rechthoeken mee maken met als afmetingen f_n bij f_{n+1} (beginnend bij $n = 1$). Hiernaast staat een rechthoek van f_6 bij f_7 afgebeeld. Hoe verder je in deze rij komt, hoe meer de verhouding van de zijden van de rechthoek op de gulden snede lijkt:



$$1, 2, 1.5, 1.6666, 1.6, 1.625, 1.6154, 1.6190, 1.6176, 1.6182, 1.6180, 1.6181, \ldots$$

(op 4 decimalen nauwkeurig). Hoe is dat precies te formuleren zodat het ook wiskundig bewezen kan worden? En hoe verloopt zo'n bewijs?

6. De toren van Hanoi



De Toren van Hanoi is een puzzel. Een aantal schijven van verschillende grootte kunnen op drie pinnen geplaatst worden. Een schijf mag niet op een kleinere worden geplaatst. Je begint met alle schijven op dezelfde pin en het doel is om alle schijven op een andere pin te krijgen door de schijven een voor een te verplaatsen. Hiernaast zie je de beginsituatie voor de puzzel met vijf schijven. Deze puzzel gaan we gebruiken om wiskundige denkwijzen te verhelderen. We stellen ons daarbij o.a. de volgende vragen:

1. Wat is een goede wiskundige beschrijving van de puzzel?
2. Is de puzzel voor ieder aantal schijven oplosbaar?
3. Als de puzzel oplosbaar is, wat is dan het minimale aantal zetten van een oplossing?
4. Als je de beginsituatie en de eindsituatie willekeurig voorschrijft, is de puzzel dan ook oplosbaar?

7. Overzicht

We geven hier een overzicht van de zes lessen van deze cursus. Van elke les een beschrijving van de inhoud en de rol van de les in de cursus.

Les 1. Redeneren met getallen In deze les maken we een begin met logisch redeneren in de wiskunde. We gebruiken echter niet de meetkunde, maar we doen het met gehele getallen. In deze les gaan we uit van eenvoudige waarheden over getallen. Waarheden die zeer acceptabel zijn. We zullen precies nagaan hoe daaruit een, trouwens ook nogal voor de hand liggende andere waarheid af te leiden is:

> Het product van twee getallen is alleen even als een van deze twee getallen even is.

We gebruiken daarbij precieze omschrijvingen (definities) van de begrippen even en oneven. Vergelijk dit met de meetkundige stelling over de som van de hoeken in een driehoek. Het is niet moeilijk, de stelling is niet 'diep', maar dient hier om het bewijzen te verhelderen. Verder wordt een nieuw begrip, met bijbehorende notatie ingevoerd: m is een deler van n, genoteerd als $m \mid n$. Met dat begrip kan verder worden geoefend in redeneren en het speelt ook verderop een rol. Bedenk dat alle begin moeilijk is. Logisch redeneren is niet altijd makkelijk, maar de grootste moeilijkheden in het begin zijn: het inzien van de noodzaak van het redeneren, een gevoel hebben waarvan uitgegaan kan worden, en vooral het goed opschrijven van een redenering.

Les 2. Verzamelingen van getallen In de Griekse wiskunde werd de meetkunde axiomatisch opgebouwd en pas in de negentiende eeuw is zo'n opbouw voor getallen gemaakt. Toen ontstond ook het begrip verzameling en sindsdien wordt alle wiskunde gebaseerd op de leer der verzamelingen. Ook deze verzamelingsleer heeft een axiomatische opbouw. De meeste wiskundigen hebben een intuïtief inzicht in het verzamelingsbegrip. Dat inzicht is voor hen voldoende om ermee in de wiskunde vooruit te kunnen. Deze les begint met een korte inleiding in verzamelingen.

Het belangrijkste van deze les is de volgende eigenschap van de natuurlijke getallen, de zogenaamde *welordeningseigenschap*

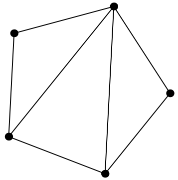
> In iedere niet-lege verzameling van natuurlijke getallen is een van deze getallen het kleinst.

Dit is een fundamentele eigenschap van de verzameling der natuurlijke getallen. Hij heeft veel gevolgen en wordt vaak gebruikt. Vaak heb je helemaal niet door dat je hem gebruikt, omdat hij zo vanzelfsprekend is. De welordeningseigenschap gebruiken we als axioma. We zullen in deze paragraaf er een aantal stellingen uit afleiden, waaronder de volgende van Euclides:

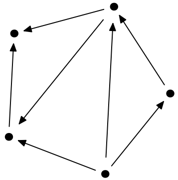
1. Er zijn oneindig veel priemgetallen.
2. Het getal $\sqrt{2}$ is irrationaal.

Les 3. Structuren Deze les is een eerste kennismaking met abstractie zoals die tegenwoordig overal in de wiskunde te vinden is. Het gaat hier om extra structuur in een verzameling waarmee voor tweetallen elementen wordt vastgelegd of er iets aan de hand is of juist niet. Dit geeft aanleiding tot twee begrippen:

Graaf. De elementen van de verzameling noem je hoekpunten en deze zijn al of niet verbonden door ribben:

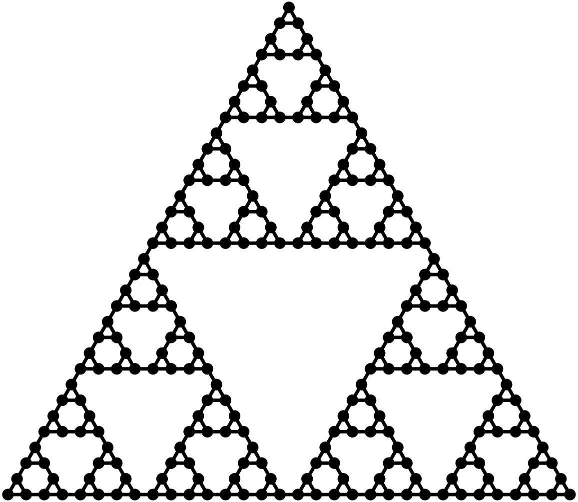


Gerichte graaf. In dit geval hebben de ribben bovendien een richting, bijvoorbeeld:



(er zijn nog andere kleine verschillen, maar daar gaan we hier niet op in).

De Toren van Hanoi (met vijf schijven) geeft aanleiding tot een graaf: je neemt de verzameling van alle 3^5 toestanden als hoekpuntenverzameling en verbindt twee hoekpunten als de toestanden in één zet in elkaar kunnen overgaan. Als je het handig aanpakt zie je dat deze graaf de volgende gedaante heeft:



Dit plaatje vertelt je dat de puzzel (met vijf schijven) oplosbaar is en wel in precies 31 zetten. Je ziet er ook aan dat je van een gegeven toestand in iedere andere toestand kunt komen door het doen van zetten.

Spelletjes zoals bijvoorbeeld solitair bepalen een gerichte graaf doordat zetten daarbij niet teniet gedaan kunnen worden, ze gaan van een toestand naar een andere maar niet omgekeerd.

Wiskundig gezien is een gerichte graaf is in feite niets anders dan een relatie in een verzameling. Een voorbeeld van een relatie in de verzameling der natuurlijke getallen is de relatie 'is kleiner dan'. We zullen een speciaal soort relaties bestuderen, die ordeningen worden genoemd. Deze spelen in dit college geen grote rol, maar dienen als een eerste oefening met abstractie.

Les 4. Volledige inductie. Het gaat hier om een andere formulering van de welordeningseigenschap van de verzameling der natuurlijke getallen. Het is een manier van bewijzenen, waarbij je van de juistheid van eenvoudiger gevallen kunt uitgaan. We zullen deze redeneerwijze gebruiken om te bewijzen dat de Toren van Hanoi oplosbaar is voor ieder aantal schijven. We zullen hier ook een formule afleiden voor

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-2)^2 + (n-1)^2,$$

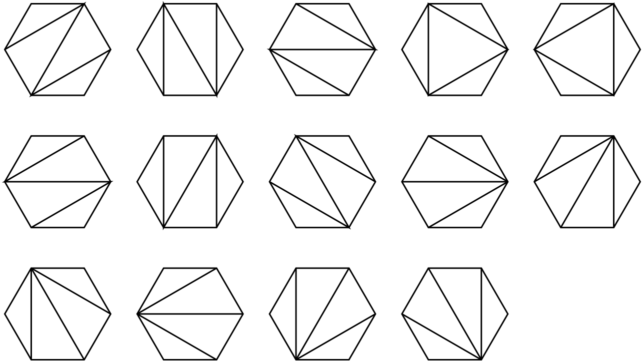
de som van de kwadraten van de eerste n natuurlijke getallen.

Les 5. Recursie. Recursie is een manier van beschrijven van een rij wiskundige objecten waarbij in de beschrijving de objecten kunnen voorkomen die eerder in de rij staan. De rij van Fibonacci-getallen is daar een voorbeeld van. We zullen het hier vooral over rijen van getallen hebben. Wil je weten wat het aantal zetten is dat nodig is voor de oplossing van De Toren van Hanoi met n schijven, dan is dit aantal eenvoudig uit te drukken in het aantal dat nodig is als er een schijf minder is. Met dit verband kun je voor een gegeven n het aantal zetten berekenen. We leiden er ook een formule voor af.

Voor het n-de Fibonaccigetal leiden we ook een formule af, het is gelijk aan

$$\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Les 6. Binomiaalcoëfficiënten en Catalangetallen. Catalangetallen komen op veel verschillende manieren voor. Bijvoorbeeld als het aantal manieren waarop een (regelmatige) n-hoek verdeeld kan worden in driehoeken met behulp van diagonalen. Voor een 6-hoek zijn er 14 manieren:



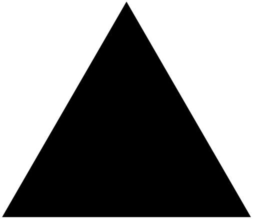
We leiden een verband af met binomiaalcoëfficiënten. Een binomiaalcoëfficiënt $\binom{n}{k}$ is het aantal manieren waarop je uit n dingen er k kunt kiezen. In deze les gaat het om slim tellen en daarmee dan verbanden te zien.

8. Opmerkelijke verbanden

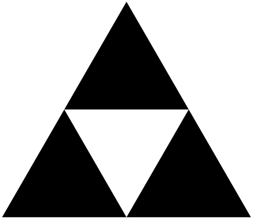
Eenzelfde structuur kan op veel manieren voorkomen. We geven hier een voorbeeld daarvan. De wiskunde die in de colleges Wiskundig Denken wordt behandeld is voldoende om dit voorbeeld volledig te begrijpen.

De zeef van Sierpiński

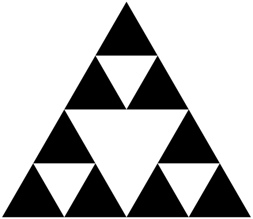
Begin met de volgende driehoek



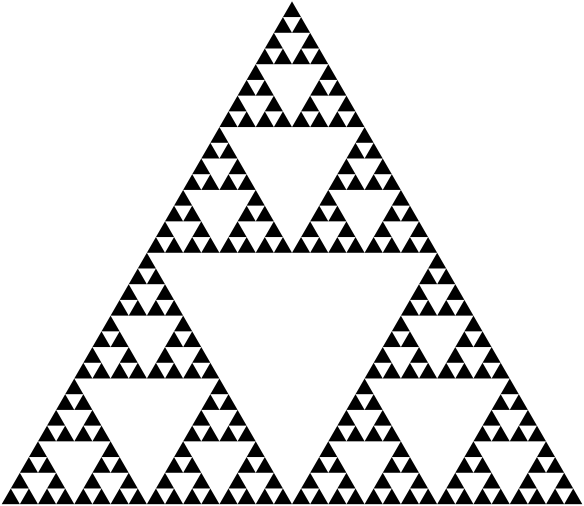
Verdeel hem in vier driehoeken en laat (het inwendige van) de middelste weg. Je krijgt dan:



Doe dit nog een keer met elk van deze drie driehoeken:



Ga zo door en na een paar stappen krijg je



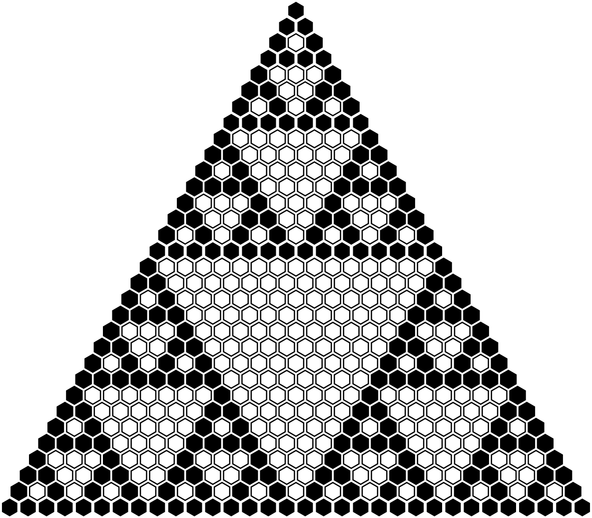
Wat heeft dit met de grafiek van de Toren van Hanoi te maken? Als je dit proces eindeloos herhaalt, dan blijven er steeds punten over. Er zijn punten die nooit verdwijnen. Die vormen de zeef van Sierpiński, een voorbeeld van een fractal.

De driehoek van Pascal

De binomiaalcoëfficiënten $\binom{n}{k}$ vormen de driehoek van Pascal:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

Hierin staat $\binom{n}{k}$ als getal nummer k in rij nummer n, waarbij het nummeren steeds met 0 begint. Een mooie eigenschap is dat ieder getal in deze driehoek de som is van de getallen die (schuin) boven dit getal staan. Dat is een makkelijke regel voor het maken van de driehoek. Kleur je de vakjes met een oneven getal zwart en de andere wit, dan ontstaat de volgende structuur:



Wat heeft dit met de zeef van Sierpiński te maken? Met de cursus Wiskundig Denken leer je genoeg wiskunde om deze verbanden zelf te onderzoeken.

9. Open problemen

De wiskunde kent vele onopgeloste problemen. Sommige zijn al eeuwen oud. Ze zijn niet allemaal even gemakkelijk te beschrijven. Daaronder zijn problemen die wiskundig juist heel interessant zijn. Oude open problemen die wel makkelijk geformuleerd kunnen worden zijn:

- Het vermoeden van Goldbach: ieder even getal > 2 is de som van twee priemgetallen.
- Er zijn oneindig veel priemgetallen p waarvoor ook $p+2$ een priemgetal is.
- Er zijn oneindig veel priemgetallen van de vorm n^2+1, waarbij n een natuurlijk getal is.

Veel goede wiskundigen hebben geprobeerd hiervoor oplossingen te vinden. Als iemand zo'n probleem oplost is hij of zij meteen wereldberoemd. Omdat een wiskundig bewijs eeuwig blijft gelden gaat het dan zelfs om eeuwige roem.