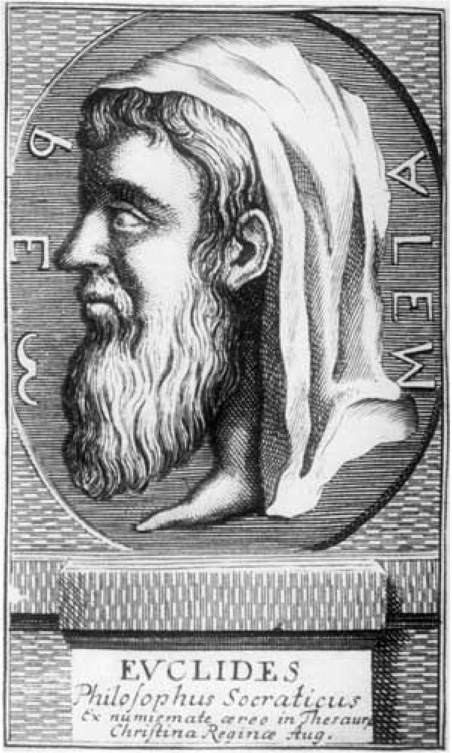
K.U.N.
Subfaculteit Wiskunde

Cursus:
Wiskundig denken

Les 1:
Redeneren met getallen

Frans Keune



 keune@sci.kun.nl
Laatste wijziging: 6 november 2001
Versie 1.1

Zoals in de inleiding (Les 0) is beschreven, gaat het in de wiskunde sinds de Griekse Oudheid om abstracte zaken. De manier waarop met deze zaken wordt omgegaan hangt nauw samen met dit abstracte karakter. Dit kwam toen vooral tot uiting in de meetkunde. Bij andere wiskundige objecten zoals getallen is de situatie echter niet anders. Om te oefenen met het omgaan met wiskundige objecten gebruiken we hier voornamelijk getallen. In deze les maken we daar een begin mee.

1. Even en oneven getallen

Getallen lenen zich uitstekend voor logisch redeneren. Bijvoorbeeld de *gehele* getallen. Dat zijn de getallen

$$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

In het bijzonder zullen we de *natuurlijke* getallen

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$$

beschouwen. Met het systeem van de natuurlijke getallen krijg je, als je je er een voorstelling van wilt maken, soortgelijke problemen als bij de meetkunde. Van een lijn kun je je voorstellen dat hij oneindig dun en oneindig lang is. Als je je een natuurlijk getal wilt voorstellen, dan kun je er aan denken als een aantal dingen, waarbij het er niet toe doet welke dingen dat zijn. Verder zijn er oneindig veel natuurlijke getallen en dat is ook al niet erg realistisch. Met natuurlijke getallen doet men daarom vaak hetzelfde als met lijnen. Ze worden als primitieve begrippen gezien die volgens afspraak voldoen aan een aantal eigenschappen, de axioma's. Welke deze axioma's zijn, daar komen we later, in Les 5, nog op terug. We veronderstellen hier dat de lezer vertrouwd is met gewone rekenregels zoals

$$a(b + c) = ab + ac \qquad \text{voor alle gehele getallen } a, b, c$$

en

$$\text{als } a < b \text{ en } c < 0, \text{ dan } ac > bc.$$

Begrippen als ‘optellen’, ‘vermenigvuldigen’, ‘aftrekken’ en ‘kleiner dan’ worden (nu) niet uitgelegd, evenmin als de begrippen ‘natuurlijk getal’ en ‘geheel getal’. Nieuwe begrippen kunnen we vastleggen in een *definitie*. Bijvoorbeeld het begrip ‘even’:

Definitie 1. Zij n een geheel getal. Dan heet n *even*, als er een geheel getal k is zo dat $n = 2k$.

▶ Toelichting 1

We gaan eigenschappen bewijzen die de lezer nog niet kent, althans waarvan we veronderstellen dat hij ze nog niet kent. Vinden we zo’n nieuw bewezen eigenschap belangrijk, dan noemen we hem een *stelling*. Een eigenschap van minder belang noemen we een *propositie*. Gewoonlijk formuleren we eerst de propositie (of stelling). Dat heeft het voordeel dat de lezer weet wat er bewezen gaat worden. Bedenk dat er in deze paragraaf niets diepzinnigs bewezen wordt: het gaat nu om het bewijzen zelf. Eerst nog een definitie.

Definitie 2. Zij n een geheel getal. Dan heet n *oneven*, als er een geheel getal k is zo dat $n = 2k + 1$.

▶ Toelichting 2

Ieder geheel getal is even of oneven. We gaan er in deze paragraaf van uit dat dit duidelijk is. Het is in overeenstemming met wat je je voorstelt bij gehele getallen. Dat er inderdaad geen andere gehele getallen zijn berust op een fundamentele eigenschap van de natuurlijke getallen die we in Les 2 zullen behandelen.

Om te begrijpen hoe een bewijs in elkaar zit is het het beste om te beginnen met het bewijzen van enkele uitspraken. Deze dienen dus om de techniek van het bewijzen te leren en zijn op zich minder interessant. We beginnen met een heel flauwe propositie.

Propositie 1. *Zij n een even geheel getal. Dan is n^2 even.*

BEWIJS: Omdat n even is is er een geheel getal k zodat $n = 2k$. Dan geldt: $n^2 = (2k)^2 = 2 \cdot (2k^2)$. Dus is er een geheel getal l zodat $n^2 = 2l$, namelijk $l = 2k^2$. Dus n^2 is even. ■

▶ Toelichting 3

In het bewijs van Propositie 2 maken we gebruik van een *gevalsonderscheiding*.

Propositie 2. *Zij n een geheel getal. Dan is $n^2 - n$ even.*

BEWIJS:

We onderscheiden twee gevallen: n even en n oneven.

Stel dat n even is. Dan is er een geheel getal k zo dat $n = 2k$. Dan $n^2 - n = n(n-1) = 2 \cdot k(n-1)$. Dus is er een geheel getal l zo dat $n^2 - n = 2l$, namelijk $l = k(n-1)$. Dus is $n^2 - n$ even.

Dus: als n even is, dan is $n^2 - n$ even.

Stel dat n oneven is. Dan is er een geheel getal k zo dat $n = 2k+1$. Dan $n^2 - n = n(n-1) = n \cdot 2k = 2 \cdot nk$. Dus is $n^2 - n$ even.

Dus: als n oneven is, dan is $n^2 - n$ even.
Dus is $n^2 - n$ even (of n nu even is of oneven). ■

▶ Toelichting 4

We gaan nog een paar uitspraken bewijzen. Niet omdat deze uitspraken zo interessant zijn, maar omdat we de aandacht willen vestigen op de wijze waarop deze uitspraken geformuleerd zijn en op de structuur van de bewijzen van deze uitspraken.

Propositie 3. *Laten m en n gehele getallen zijn. Dan geldt: als m en n oneven zijn, dan is mn oneven.*

BEWIJS:

Stel dat m en n oneven zijn. Dan zijn er een gehele getallen k en l zo dat $n = 2k+1$ en $m = 2l+1$. Dan $mn = 4kl+2k+2l+1 = 2\cdot(2kl+k+l)+1$. Dus is mn oneven.

Dus: als m en n oneven zijn, dan is mn oneven. ■

▶ Toelichting 5

Propositie 4. *Laten m en n gehele getallen zijn. Dan:*

$$mn \text{ is even} \implies m \text{ is even of } n \text{ is even.}$$

BEWIJS:

Stel dat mn even is. We bewijzen nu dat m of n even is.

Stel dat niet geldt: m is even of n is even. Dan zijn beide oneven. Uit Propositie 3 volgt dan dat mn oneven is. Tegenspraak.

Dus: m is even of n is even.

Dus: als mn even is, dan is m even of n even. ■

▶ Toelichting 6

Propositie 5. *Laten m en n gehele getallen zijn. Dan geldt:*

$$m \textit{ is even of } n \textit{ is even} \implies mn \textit{ is even.}$$

Bewijs:

Stel dat m even is. Dan is er een geheel getal k zo dat $m = 2k$. Dan $mn = 2 \cdot kn$, en dus is mn even.

Dus: als m even is, dan is mn even. Evenzo is mn even als n even is. Dus is mn even, als m of n even. ■

▶ Toelichting 7

Propositie 6. *Laten m en n gehele getallen zijn. Dan geldt: mn is even dan en slechts dan als m of n even is.*

Bewijs: Uit Propositie 4 volgt: als mn even is, dan is m even of n even. Propositie 5 zegt: als m even of n even, dan is mn even. Dus is mn even dan en slechts dan als m even of n even is. ■

▶ Toelichting 8

Toetsen

Begin Toets Geef van elk van de volgende uitspraken aan of ze waar of onwaar zijn.Gegeven is dat n een geheel getal is.

1. Als n oneven is, dan is $3n + 1$ even.

☐ waar ☐ onwaar

2. Als n even is, dan is $n^{27} - n$ even.

☐ waar ☐ onwaar

3. 0 is even.

☐ waar ☐ onwaar

4. $2n^2 + 3$ is even.

☐ waar ☐ onwaar

5. n even $\implies$ $(n + 13)^3$ oneven.

☐ waar ☐ onwaar

6. n is even $\implies$ $n^3 + n^2 + n + 1$ is even.

☐ waar ☐ onwaar

Einde Toets Score: Corrigeer

Opgaven

1. Laten m en n natuurlijke getallen zijn.

(a) Bewijs de volgende uitspraak:

als m en n even zijn, dan is $m + n$ even.

(b) Is de volgende uitspraak waar?

$m + n$ is even dan en slechts dan als m en n even zijn.

2.

(a) Laat n een oneven natuurlijk getal zijn. Bewijs dat $n^2 + 2n$ oneven is.

(b) Is het omgekeerde ook waar?
Laat n een natuurlijk getal zijn zodat $n^2 + 2n$ oneven is. Is n dan oneven?

3. Laat n een natuurlijk getal zijn. Bewijs dat $n^2 + 3n + 1$ oneven is.

2. Delers van gehele getallen

We gaan enkele eenvoudige eigenschappen afleiden over deelbaarheid van gehele getallen. We beginnen met een definitie.

Definitie 3. Laten m en n gehele getallen zijn. Dan heet m een *deler* van n als er een geheel getal x is zo dat $mx = n$. Ook zeggen we dat n een *veelvoud* van m is, of ook dat n een m*-voud* is. Is m een deler van n, dan noteren we dit als:

$$m \mid n.$$

Is m geen deler van n, dan schrijven we dit als:

$$m \nmid n.$$

► Toelichting 9

Propositie 7. *Zij n een geheel getal. Dan:*

$$\text{(i)}\ \ 1 \mid n, \qquad \text{(ii)}\ \ n \mid n, \qquad \text{(iii)}\ \ n \mid 0.$$

Bewijs:

(i) $1 \cdot n = n$. Dus is er een geheel getal x met $1 \cdot x = n$, nl. $x = n$. Ofwel $1 \mid n$.

(ii) $n \cdot 1 = n$. Dus $n \mid n$.

(iii) $n \cdot 0 = 0$. Dus $n \mid 0$.

■

▶ Toelichting 10

Propositie 8. *Laten m, n en k gehele getallen zijn. Dan:*

(i) *als $m \mid n$ en $n \mid k$, dan $m \mid k$;*

(ii) *als $m \mid n$ en $m \mid k$, dan $m \mid n+k$;*

(iii) *als $km \mid kn$ en $k \neq 0$, dan $m \mid n$.*

Bewijs:

(i) Stel dat $m \mid n$ en $n \mid k$, dan zijn er gehele getallen x en y zo dat $n = mx$ en $k = ny$. Dan $k = mxy$ en dus $m \mid k$, want er is een geheel getal z met $k = mz$, namelijk $z = xy$.

Dus: als $m \mid n$ en $n \mid k$, dan $m \mid k$.

(ii) Stel dat $m \mid n$ en $m \mid k$, dan zijn er gehele getallen x, y zo dat $n = mx$ en $k = my$. Dan $n + k = mx + my = m(x + y)$ en dus $m \mid n + k$.

Dus: als $m \mid n$ en $m \mid k$, dan $m \mid n + k$.

(iii) Stel dat $km \mid kn$ en $k \neq 0$. Er is een geheel getal x zo dat $kmx = kn$, ofwel $k(mx - n) = 0$. Omdat $k \neq 0$ geldt dat $mx - n = 0$, ofwel $mx = n$. Dus $m \mid n$.

Dus: als $km \mid kn$ en $k \neq 0$, dan $m \mid n$.

■

▶ Toelichting 11

Propositie 9. *Laten m, n natuurlijke getallen zijn met $m \mid n$ en $n \neq 0$. Dan geldt $m \leq n$.*

BEWIJS: Er is een natuurlijk getal k met $km = n$. Duidelijk is dat $k \neq 0$, ofwel $1 \leq k$. Daaruit volgt $m \leq km$. Dus $m \leq n$. ■

Propositie 10. *Laten m en n gehele getallen zijn met $m \mid n$ en $n \mid m$. Dan $m = n$ of $m = -n$.*

BEWIJS: We onderscheiden twee gevallen.

Stel $m = 0$. Omdat $m \mid n$, is er een geheel getal x zodat $mx = n$, ofwel $0x = n$. dus $n = 0$. En dus $m = n$ of $m = -n$, want m en n zijn beide 0.

Dus: als $m = 0$, dan $m = n$ of $m = -n$.

Stel $m \neq 0$. Dan ook $n \neq 0$, want $n \mid m$. Omdat $m \mid n$ en $n \mid m$, geldt ook $|m| \mid |n|$ en $|n| \mid |m|$. Uit Propositie 9 volgt dan $|m| \leq |n|$ en $|n| \leq |m|$, ofwel $|m| = |n|$. Dus $m = n$ of $m = -n$.

Dus: als $m \neq 0$, dan $m = n$ of $m = -n$. Dus $m = n$ of $m = -n$. ■

In iedere les worden opgaven gegeven waarmee de behandelde stof geoefend kan worden. Bij veel van deze opgaven wordt gevraagd een bewering te bewijzen. Zo'n bewering is als een stelling zonder bewijs. We geven een voorbeeld.

Opgave *Zij n een geheel getal. Bewijs dat:*

$$4 \mid n^2 - n \implies 4 \mid n \text{ of } 4 \mid n - 1.$$

OPLOSSING:

Stel $4 \mid n^2 - n$. We onderscheiden twee gevallen: n even en n oneven.

Stel n is even, zeg $n = 2k$ met k een geheel getal. Dan $n^2 - n = n(n-1) = 2k(n-1)$ en dus $4 \mid 2k(n-1)$. Uit propositie 8(iii) volgt dan dat $2 \mid k(n-1)$. Omdat $n-1$ oneven is, volgt hieruit met Propositie 6 dat k even is. En dus $4 \mid n$.

Dus: als n even is, dan $4 \mid n$.

Stel dat n oneven is, zeg $n = 2k+1$ met k een geheel getal. Dan $n^2 - n = n(n-1) = 2kn$, en dus $4 \mid 2kn$, ofwel $2 \mid kn$. Omdat n oneven is, volgt hieruit dat k even is. En dus $4 \mid 2k$, ofwel $4 \mid n-1$.

Dus: als n oneven is, dan $4 \mid n-1$. Dus geldt—of n nu even of oneven is—dat $4 \mid n$ of $4 \mid n-1$.

Dus: als $4 \mid n^2 - n$, dan $4 \mid n$ of $4 \mid n-1$. ■

▶ Toelichting 12

Toetsen

Begin Toets Geef van elk van de volgende uitspraken aan of ze waar, onwaar of zonder betekenis zijn.

1. $0 \mid 2$

☐ waar ☐ onwaar ☐ onzin

2. $2 \mid 12$

☐ waar ☐ onwaar ☐ onzin

3. $0 \mid 0$

☐ waar ☐ onwaar ☐ onzin

4. $-2 \mid 0$

☐ waar ☐ onwaar ☐ onzin

5. $\frac{5}{2} \mid 10$

☐ waar ☐ onwaar ☐ onzin

6. $1 \nmid \sqrt{2}$

☐ waar ☐ onwaar ☐ onzin

7. $\frac{1}{2} \nmid 1$

☐ waar ☐ onwaar ☐ onzin

8. $3 \mid 11111$

☐ waar ☐ onwaar ☐ onzin

9. $3 \nmid 11111 + 1$

☐ waar ☐ onwaar ☐ onzin

10. $-\pi \mid \pi$

☐ waar ☐ onwaar ☐ onzin

Einde Toets Score: Corrigeer

Begin Toets Gegeven zijn natuurlijke getallen m en n met $7 \mid m$ en $7 \mid n-3$. Geef van de volgende uitspraken aan of ze waar of onwaar zijn.

1. $7 \mid m+n$

☐ waar ☐ onwaar

2. $7 \mid mn$

☐ waar ☐ onwaar

3. $7 \mid m^n$

☐ waar ☐ onwaar

4. $7 \mid m-7n$

☐ waar ☐ onwaar

5. $7 \mid 3m-2n$

☐ waar ☐ onwaar

6. $7 \mid n^2-2$

☐ waar ☐ onwaar

Einde Toets Score: Corrigeer

Begin Toets Gegeven is dat m en n natuurlijke getallen zijn. Geef voor elk van de volgende uitspraken aan of ze waar zijn alleen op grond van dit gegeven.

1. als n even is, dan is $\frac{3n-28}{2}$ even

☐ ja ☐ nee

2. $n^{100} - n$ is even

☐ ja ☐ nee

3. $n^m - n$ is even

☐ ja ☐ nee

4. mn is even $\Longrightarrow (m+n)^2 - (m+n)$ is even

☐ ja ☐ nee

Einde Toets Score: Corrigeer

Opgaven

4. Zij m een oneven geheel getal. Bewijs dat $8 \mid m^2 - 1$.

5. Zij m een oneven geheel getal. Bewijs dat $16 \mid m^4 - 1$.

6. Zij m een geheel getal.

(a) Bewijs dat $3 \mid m^3 - m$. (Waarbij aangenomen mag worden dat er onder de getallen $m-1$, m en $m+1$ een 3-voud is.)

(b) Bewijs dat $2 \mid m^3 - m$.

(c) Bewijs dat $6 \mid m^3 - m$.

7. Zij n een natuurlijk getal met $3 \nmid n$. Bewijs dat $3 \mid n^2 - 1$.

8. Laten m en n gehele getallen zijn. Bewijs dat:

$$3 \mid mn \implies 3 \mid m \text{ of } 3 \mid n.$$

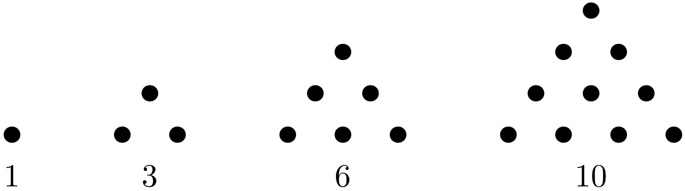
9. Laten m en n gehele getallen zijn. Waarom is er geen bewijs te vinden voor:

$$4 \mid mn \iff 4 \mid m \text{ of } 4 \mid n\,?$$

Opdrachten

Opdracht 1. Voor welke natuurlijke getallen geldt dat $n^4 - n$ een 4-voud is? Onderzoek dit eerst voor de getallen 0 t/m 10. Wat is de regelmaat? Geef een bewijs.

Opdracht 2. Onder het n-de driehoeksgetal verstaan we het getal $1 + 2 + \cdots + n$. Laten we het d_n noemen. Dus $d_1 = 1$, $d_2 = 3$, $d_3 = 6$, $d_4 = 10$, ... Het is wel duidelijk waarom deze getallen driehoeksgetallen worden genoemd:



1. Vind een formule voor d_n. (Waarom is de formule juist?)
2. Voor welke n is d_n even?

Toelichtingen en hints

Toelichting 1. Veelgebruikte eigenschappen of kenmerken krijgen vaak een naam. Zo is 'er is een geheel getal k zodat $n = 2k$' een eigenschap van n. Deze eigenschap geven we de naam 'even'. Als n de eigenschap 'even' heeft zeggen we: n is even.

Definities zijn er om de wiskunde overzichtelijk te houden. Dat een geheel getal van de vorm $2k$ is, zal nog vaak voorkomen en dus is het handig om een naam voor deze eigenschap te hebben.

Waarschijnlijk kende je het begrip 'even' al en had je er hetzelfde beeld bij als in deze definitie. Normaal gesproken worden er in definities natuurlijk nieuwe begrippen vastgelegd. ◀

Toelichting 2. In een definitie zijn gewoonlijk twee delen te onderscheiden. In het eerste deel wordt beschreven waar we het over hebben. In het tweede deel wordt het nieuwe begrip geïntroduceerd. In deze definitie bestaat het eerste deel uit de zin

> Zij n een geheel getal.

Wiskundigen gebruiken vaak een nogal archaïsche vorm van de aanvoegende wijs: 'Zij … '. Andere formuleringen zijn:

> Laat n een geheel getal zijn.
> Stel n is een geheel getal.
> Gegeven is dat n een geheel getal is.

Het tweede deel is hier:

> Dan heet n *oneven* als er een geheel getal k is zo dat $n = 2k+1$.

We hadden de definitie ook zo kunnen geven dat er een leeg eerste deel is:

> Een geheel getal n heet *oneven*, als er een geheel getal k is zo dat $n = 2k + 1$.

Het opsplitsen in twee delen gebeurt veelal voor de overzichtelijkheid. Om dezelfde reden is het te definiëren begrip hier cursief gedrukt. ◄

Toelichting 3. We moeten bij het bewijs de betekenis van 'n is even' gebruiken. Die betekenis is: 'er is een geheel getal k zodat $n = 2k$.

De uitspraak

Er is een k zo dat $n = 2k$

zegt hetzelfde als

Er is een a zo dat $n = 2a$.

Het getal dat volgens zo'n uitspraak bestaat, heeft zo dus nog geen naam gekregen. Als een wiskundige schrijft

Er is een k zo dat $n = 2k$,

dan bedoelt hij daarmee niet alleen dat zo'n getal bestaat, maar ook dat hij dat getal voortaan k noemt. Natuurlijk is het volgende goed (en eigenlijk zelfs beter):

Er is een k zo dat $n = 2k$. We noemen dit getal a.

Het is wel ongebruikelijk.

Een bewijs bestaat uit een opeenvolging van uitspraken, waarbij iedere uitspraak een direct gevolg is van eerder bewezen uitspraken. Dat daarbij zinnen soms met 'Dus' en soms met 'Dan' beginnen speelt geen rol. In beide gevallen gaat het er om, dat er op wordt gewezen dat er een conclusie wordt getrokken. Doorgaans is een deel van de tekst in een bewijs er slechts ter verhoging van de leesbaarheid.

Als we alle tekst ter verhoging van de leesbaarheid zouden weglaten, krijgen we het volgende bewijs:

Er is een geheel getal k zodat $n = 2k$.
$n^2 = (2k)^2 = 2 \cdot (2k^2)$
n^2 is even.

Bij een bewijs worden vaak wel rekenstappen weggelaten. We schrijven bijvoorbeeld niet uitgebreid $n^2 = (2k)^2 = 2k \cdot 2k = 4k^2 = 2 \cdot (2k^2)$. ◄

Toelichting 4. Evenals bij een definitie bestaat een propositie uit twee delen. Het eerste deel bestaat uit *veronderstellingen* of *gegevens*. In het tweede deel staat een bewering. Hier is het eerste deel van de propositie (de veronderstellingen): Zij n een geheel getal. Het tweede deel (de bewering) is: Dan is $n^2 - n$ even. Uit het bewijs moet blijken dat het een ware bewering is.

We laten een bewijs eindigen met ■. Dan weet de lezer dat het bewijs klaar is. Komt ■ voor de lezer als een verrassing, dan kan hij weer terug naar BEWIJS en het nog eens proberen.

Tijdens een bewijs doen we soms veronderstellingen die slechts voor een deel van het bewijs van kracht zijn, zoals in dit bewijs de veronderstelling dat n even is. Zolang zo'n veronderstelling geldt zullen we de tekst laten inspringen. De k, die wordt opgevoerd in de veronderstelling dat n even is, heeft ook alleen betekenis zolang deze veronderstelling van kracht is. Is de tijdelijke veronderstelling niet meer van kracht, dan laten we de tekst terugspringen, en trekken we de conclusie van de eraan voorafgegane redenering. ◀

Toelichting 5. De formulering van deze propositie is van een enigszins andere soort dan die van Propositie 2. Dat m en n oneven zijn, is niet gegeven. We beginnen daarom het bewijs met te veronderstellen dat m en n oneven zijn.

De hier bewezen uitspraak was van de gedaante

$$\text{als } P, \text{ dan } Q$$

waarbij P en Q ook uitspraken zijn. In dit geval bijvoorbeeld staat P voor de uitspraak 'm en n zijn oneven', en Q voor 'mn is oneven'. Een andere notatie is voor 'als P, dan Q' is:

$$P \implies Q.$$

Om een uitspraak van het type $P \implies Q$ te bewijzen, kunnen we, zoals we in het bovenstaande bewijs deden, veronderstellen dat P waar is, en gebruik makend van deze veronderstelling de waarheid van Q aantonen. Zo'n bewijs ziet er dan als volgt uit:

> Stel P.
>
> ...
>
> Dus Q.
>
> Dus: als P, dan Q.

Toelichting 6. We moeten een uitspraak van de vorm '$P \implies Q$' bewijzen. Normaal gesproken gaat dit als volgt: Stel P. ... Dus Q.

Soms, zoals in dit geval, is het moeilijk om Q rechtstreeks te bewijzen. Er wordt dan een techniek toegepast die '*bewijs uit het ongerijmde*' heet. Een bewijs uit het ongerijmde toont aan dat het onmogelijk zo kan zijn dat Q niet waar is.

We beginnen ons bewijs met: Stel niet Q. Daarna komen we na een aantal stappen tot een onhoudbare conclusie. De schuldige van deze onhoudbare conclusie is de aanname dat Q niet waar is.

In dit geval beginnen we ons bewijs uit het ongerijmde met de volgende bewering:

> Stel dat niet geldt m is even of n is even.

Dan volgen twee stappen die leiden tot een onhoudbare conclusie:

> Dan zijn m en n beide oneven.
> Dus is mn even.

En dit laatste kan niet, want mn was juist even.

Als we in een bewijs op zo'n onhoudbare conclusie uitkomen, maken we daar niet veel woorden aan vuil en schrijven kortweg: Tegenspraak.

Een bewijs van een uitspraak Q uit het ongerijmde ziet er schematisch als volgt uit: *ongerijmde*:

> Stel dat P niet geldt.
>
> ...
>
> Tegenspraak.
>
> Dus P.

Toelichting 7. Dit bewijs is verkort. In uitgebreidere vorm ziet het er als volgt uit.

Stel m is even of n is even.

Stel m is even. Dan is er een geheel getal k zo dat $m = 2k$. Dan $mn = 2 \cdot kn$. Dus is mn even.

Dus: als m even is, dan is mn even.

Stel n is even. dan is er een geheel getal l zo dat $n = 2l$. Dan $mn = 2 \cdot lm$. Dus is mn even.

Dus: als n even is, dan is mn even. Dus mn is even (want m is even of n is even).

Dus: als m even is of n even is, dan is mn even. ◀

Toelichting 8. Zijn P en Q uitspraken (zoals 'mn is even' en 'm is even of n is even'), dan zegt de uitspraak

$$P \text{ dan en slechts dan als } Q$$

dat zowel $P \implies Q$ als $Q \implies P$ geldt. In plaats van 'P dan en slechts dan als Q' schrijft men ook 'P desda Q', of symbolisch:

$$P \iff Q.$$

Willen we een uitspraak van het type $P \iff Q$ bewijzen, dan kunnen we dus eerst $P \implies Q$ en vervolgens $Q \implies P$ bewijzen. ◄

Opgave 1(a) Gebruik de definitie van 'even'.

Opgave 1(b) De bewering is van de vorm $P \iff Q$. Als die bewering juist is, is zowel de uitspraak $P \implies Q$ als de uitspraak $Q \implies P$ waar. Een van deze twee heb je in onderdeel (a) al bewezen. De andere bewering

$$m + n \text{ is even } \implies m \text{ en } n \text{ zijn even}$$

is niet juist. Als deze bewering juist zou zijn dan zou hij waar zijn voor alle m en n. Van m en n weten we niet meer dan dat het natuurlijke getallen zijn. Om aan te tonen dat deze bewering niet juist is, is het dus voldoende om één voorbeeld te geven (van twee getallen m en n) waarvoor de bewering niet juist is.

◀

Opgave 2(a) Je moet natuurlijk de definitie van ‘oneven’ gebruiken.

Opgave 2(b) Probeer het eens uit het ongerijmde.

Opgave 3. Gevalsonderscheiding?

Toelichting 9.

Dus: $2 \mid 6$, want $2 \cdot 3 = 6$.
$2 \mid -6$, want $2 \cdot (-3) = -6$.
$-2 \mid 8$, want $(-2) \cdot (-4) = 8$.
$12 \mid 0$, want $12 \cdot 0 = 0$.
$1 \mid -17$, want $1 \cdot (-17) = -17$.
$0 \mid 0$, want $0 \cdot 157 = 0$.

Merk op dat ‘$2 \mid m$’ hetzelfde betekent als ‘m is even’, en dat ‘$2 \nmid m$’ betekent dat m oneven is.

Misschien had je verwacht dat we ‘m is een deler van n’ als volgt zouden definiëren:

m is een deler van n als $\frac{n}{m}$ een geheel getal is.

Deze definitie heeft twee nadelen:

1. Deze definitie is niet equivalent met Definitie 3. Volgens Definitie 3 geldt $0 \mid 0$, maar volgens deze definitie niet: $\frac{0}{0}$ is geen getal, laat staan een geheel getal.

2. Bij deze definitie moeten we een uitstap maken buiten de gehele getallen. We moeten kennis hebben van de rationale getallen (de breuken). Dat is bij Definitie 3 niet nodig.

Zijn m en n natuurlijke getallen, dan betekenen $m \mid n$ en $\frac{n}{m}$ niet hetzelfde: het eerste is een uitspraak en het tweede is geen uitspraak, maar een getal.

Toelichting 10. Bij (i) willen we bewijzen dat $1 \mid n$. Ofwel we zoeken een geheel getal x zodat $1 \cdot x = n$. We kunnen $x = n$ nemen.

Dit bewijs van (i) kunnen we kort opschrijven als:

n is een geheel getal en $1 \cdot n = n$, dus $1 \mid n$.

Of nog korter:

$1 \cdot n = n$, dus $1 \mid n$.

We gaan er vanuit dat de lezer van ons bewijs weet wat de veronderstellingen van de propositie zijn. Hier is dat: n is een geheel getal. Bij het bewijs van (ii) en (iii) is deze verkorting toegepast. ◀

Toelichting 11. We gebruiken hier allerlei eigenschappen van de gehele getallen zoals:

Als x en y gehele getallen zijn, dan is xy ook een geheel getal.
Als x en y gehele getallen zijn, dan is ook $x+y$ een geheel getal.
Als x en y gehele getallen zijn en $xy = 0$, dan $x = 0$ of $y = 0$.

Ook bij eerdere bewijzen hebben we dergelijke eigenschappen gebruikt. Deze eigenschappen ken je door je ervaring met gehele getallen. We hebben ze nooit afgeleid of besproken. Ze behoren tot de gewone rekenregels en eigenschappen van de gehele getallen die we bekend hadden verondersteld zonder precies aan te geven waar we van uitgaan. Wiskundig gezien is dat niet echt netjes. Later, in Les 5, komen de uitgangspunten wel expliciet aan de orde, maar ook daar nemen we niet de moeite om alle bekende regels daaruit af te leiden. ◀

Toelichting 12. Omgekeerd is het duidelijk dat als $4 \mid n$ of $4 \mid n-1$, dan $4 \mid n^2-n$. Met deze opgave is dus een antwoord verkregen op de vraag:

> voor welke natuurlijke getallen n geldt dat n^2-n een 4-voud is?

Was dit de opgave geweest, dan is het oplossen ervan moeilijker, want er moet dan eerst een antwoord op deze vraag gevonden worden. Zo'n antwoord is te vinden door voor een aantal getallen n na te gaan of n^2-n een 4-voud is. Vervolgens is er dan ook nog een bewijs van de juistheid ervan nodig.

Het hier gegeven bewijs berust op een gevalsonderscheiding n even en n oneven. Als n even is, dan moet bewezen worden dat n een 4-voud is, want $4 \mid n-1$ kan dan niet het geval zijn. Dat vereenvoudigt de opgave voor dat speciale geval. ◀

Opgave 4. Een volledige oplossing:
Omdat m oneven is, is er een geheel getal k zo dat $m = 2k - 1$. Dan $m^2 - 1 = (2k-1)^2 - 1 = 4k^2 - 4k = 4(k^2 - k)$. Uit Propositie 2 volgt dat $k^2 - k$ even is, zeg $k^2 - k = 2l$ met $l \in \mathbb{Z}$. Dan $m^2 - 1 = 4 \cdot 2l = 8l$. Dus $8 \mid m^2 - 1$.

◀

Opgave 5. Gebruik $m^4 - 1 = (m^2 - 1)(m^2 + 1)$ en de vorige opgave.

Opgave 6(a) Gebruik $m^3 - m = m(m^2 - 1) = m(m-1)(m+1)$.

Opgave 6(b) Gebruik $m^3 - m = (m^2 - m)(m + 1)$.

Opgave 6(c) Een van de getallen $m-1$, m en $m+1$ is een 3-voud. Vervolgens kun je in elk van deze gevallen een onderscheid maken tussen m even en m oneven. Voor elk van deze 6 gevallen is het eenvoudig na te gaan dat $6 \mid m^3 - m$.

Eenvoudiger is het om de vorige twee onderdelen te gebruiken. Voor $n = m^3 - m$ geldt $2 \mid n$ en $3 \mid n$. Om te laten zien dat n een 6-voud is, kun je $n = 3n - 2n$ gebruiken.

Opgave 7. Uit het gegeven volgt dat $n-1$ of $n+1$ een 3-voud is.

Opgave 8. Probeer het uit het ongerijmde. Je mag uitgaan van: voor ieder geheel getal m is een van de getallen $m-1$, m en $m+1$ een drievoud.
◀

Opgave 9. Bedoeld is dat m en n ‘willekeurig’ zijn, d.w.z. dat zo’n bewijs voor alle m en n goed is.

◀