K.U.N.
Subfaculteit Wiskunde

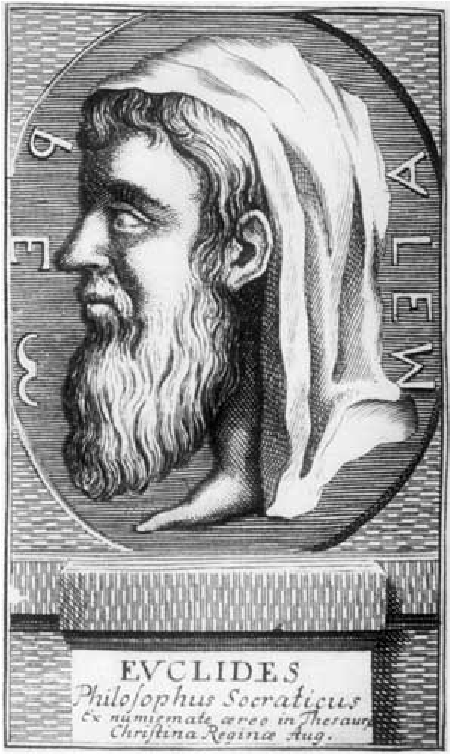
Cursus:

Wiskundig denken

Les 2:

Verzamelingen van getallen

Frans Keune



Laatste wijziging: 13 november 2001
Versie 1.1

In de vlakke meetkunde kan het begrip 'lijn' gezien worden als een grondbegrip, een begrip dat niet wordt gedefinieerd. Ook 'natuurlijk getal' is zo op te vatten. Sinds het eind van de negentiende eeuw is men er meer en meer toe overgegaan om de verzamelingsleer als grondslag van de wiskunde te nemen. Het begrip 'verzameling' is dan een van de grondbegrippen. Alle wiskunde wordt opgebouwd uitgaande van de verzamelingsleer. We gaan eerst in op wat je je bij een verzameling kunt voorstellen. Vervolgens gaan we naar verzamelingen van natuurlijke getallen kijken.

1. Verzamelingen

Het begrip *verzameling* wordt niet gedefinieerd. Ook als je niet definieert wat een rechte lijn is, dan is het toch verstandig om er een voorstelling van te hebben. Dan weet je beter waar je het over hebt en kun je plaatjes gebruiken ter ondersteuning van je gedachten. Een verzameling bestaat uit *elementen*. Belangrijk hierbij is:

1. De verzameling is volledig bepaald door zijn elementen.
2. Alleen wiskundige objecten kunnen element van een verzameling zijn.

▶ Toelichting 1

Je kunt dus spreken van *de* verzameling van de getallen 1, 2 en 3. Omdat de verzameling geheel bepaald is door zijn elementen, is er maar één verzameling met juist deze elementen. We noteren hem als

$$\{1, 2, 3\}.$$

De verzameling bestaande uit de elementen $a_1, \ldots, a_n$ noteren we als

$$\{a_1, \ldots, a_n\}.$$

Voor het noteren van de verzameling doen we dus niets anders dan de elementen opsommen en deze opsomming tussen accolades plaatsen. Merk op dat

$$\{1, 2, 3\}, \quad \{2, 1, 3\}, \quad \{2, 2, 1, 3\} \quad \text{en} \quad \{1, 1, 1, 2, 1, 3, 3\}$$

vier keer dezelfde verzameling is. Dat a een element is van een verzameling A noteren we als

$$a \in A.$$

Dus $2 \in \{1, 2, 3\}$. Is a geen element van A, dan kunnen we dat aangeven door

$$a \notin A.$$

Dus bijvoorbeeld $4 \notin \{1, 2\}$.

Dat we alleen wiskundige objecten toelaten, komt omdat we willen dat de wiskunde tijdloos is en we ook geen onduidelijkheid over de elementen willen toelaten. Een hok met twee konijnen is wel als verzameling te zien, maar je moet dan wel beseffen dat de situatie in dat hok over een paar weken heel anders kan zijn. Verder willen we ook niet definiëren wat een konijn is. Tegen alle realistische interpretaties kunnen bezwaren worden ingebracht.

De vraag rijst natuurlijk wat nu eigenlijk wiskundige objecten zijn. Het antwoord is eenvoudig: verzamelingen. De axioma's van de verzamelingsleer vertellen je dat er verzamelingen met bepaalde eigenschappen bestaan. Gewoonlijk komt dat er op neer dat er uit gegeven verzamelingen nieuwe verzamelingen kunnen worden gevormd. Daarmee komt de zaak overigens niet van de grond, want als je verzamelingen nodig hebt om nieuwe te maken, waar moet je dan beginnen. Gelukkig is er een axioma dat onvoorwaardelijk uitspreekt dat een verzameling bestaat: de lege verzameling.

De grondlegger van de verzamelingsleer is ***Georg Cantor*** *(St. Petersburg 1845 – Halle 1918). Voor een* biografie van Cantor *zie The MacTutor History of Mathematics Archive.*

De *lege* verzameling is de verzameling zonder elementen. Er is maar één lege verzameling, want een verzameling wordt door zijn elementen bepaald. Hij wordt genoteerd als $\emptyset$. Deze verzameling moet niet verward worden met de verzameling $\{\emptyset\}$, want die is niet leeg. De verzameling $\emptyset$ is een element van deze verzameling, en het is ook het enige element.

In de opzet van ***John von Neumann*** *(Budapest 1903 – Washington 1957) van de verzamelingsleer definieert men trouwens het getal* 1 *als zijnde deze verzameling. Op die manier zijn dan getallen ook verzamelingen. Het getal* 0 *is dan* $\emptyset$*, en* 2 *de verzameling* $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$*. En dus* $0 = \emptyset$*,* $1 = \{0\}$*,* $2 = \{0, 1\}$*. En zo kun je verder gaan.*

John von Neumann was een van de pioniers van de informatica. Hij leverde ook belangrijke bijdragen aan de quantummechanica en de speltheorie. In de algebra zijn er de Von-Neumann-algebra's. Voor een biografie van Von Neumann zie The MacTutor History of Mathematics Archive.

De verzameling $\mathbb{N}$ is de verzameling der natuurlijke getallen. Het zijn er erg veel, maar toch willen we al deze natuurlijke getallen tezamen zien als een verzameling. Het is een verzameling met oneindig veel elementen. Die elementen kun je niet opsommen, althans niet in een eindige tijd. Daarom gebruikt men vaak puntjes $(\dots)$. Met een beetje goede wil—en die hebben we—zou je kunnen schrijven:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

Niet iedereen is er gelukkig mee dat 0 wordt gezien als een natuurlijk getal. Je moet je er bij een auteur altijd even van vergewissen of 0 wel of niet een element is van de verzameling der natuurlijke getallen. Hier gebruiken we de notatie

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

Andere gangbare notaties voor verzamelingen van getallen zijn:

$\mathbb{Z}$,	de verzameling der gehele getallen,
$\mathbb{Q}$,	de verzameling der rationale getallen,
$\mathbb{R}$,	de verzameling der reële getallen,
$\mathbb{C}$,	de verzameling der complexe getallen.

▶ Toelichting 2

2. Eigenschappen en deelverzamelingen

Stel je hebt een verzameling A en een eigenschap $P(a)$ die van toepassing is op elementen a van A. Bijvoorbeeld de eigenschap 'n is even' voor natuurlijke getallen n. Voor ieder natuurlijk getal zijn er twee mogelijkheden: het heeft de eigenschap wel of het heeft de eigenschap niet. Je kunt de verzameling vormen bestaande uit de elementen a van A die de eigenschap $P(a)$ hebben. Deze verzameling noteren we als

$$\{\, a \in A \mid P(a) \,\}.$$

Links van $\mid$ vermelden we over welke elementen we het hebben en rechts daarvan de eigenschap waar ze aan moeten voldoen. Zo is

$$\{\, n \in \mathbb{N} \mid n \text{ is even} \,\}$$

de verzameling der natuurlijke getallen die de eigenschap hebben dat ze even zijn, of korter: de verzameling der even natuurlijke getallen. Voor de verzameling $\{\, a \in A \mid P(a) \,\}$ geldt dat ieder element van deze verzameling ook element is van A. We definiëren:

Definitie 1. Laten A en B verzamelingen zijn. Als voor iedere $b \in B$ geldt dat $b \in A$, dan heet B een *deelverzameling* van A. We noteren dit als

$$B \subseteq A.$$

Ook zeggen we dat B *bevat* is in A, of dat A de verzameling B *omvat*. We gebruiken daarvoor ook de notatie $A \supseteq B$.

▶ Toelichting 3

Merk op dat alle deelverzamelingen van een verzameling A van het type

$$\{\, a \in A \mid P(a) \,\}$$

zijn: neem bij een deelverzameling B van A maar $a \in B$ voor de uitspraak $P(a)$. Er geldt dan

$$B = \{\, a \in A \mid P(a) \,\}.$$

3. Uitspraken over alle elementen van een verzameling

In de vorige les hebben we bewezen dat voor een willekeurig geheel getal geldt dat $n^2 - n$ even is. We kunnen dit ook zo formuleren:

Voor alle gehele getallen n geldt: $n^2 - n$ is even.

Of

Voor alle $n \in \mathbb{Z}$ geldt: $n^2 - n$ is even.

Dat dit waar is komt omdat we in de vorige les bij het bewijs van n alleen maar hebben verondersteld dat het een geheel getal is. Het is dus van toepassing op elk geheel getal. Een bewijs van deze bewering verloopt dus als volgt.

> Zij n een geheel getal. Dan is volgens Propositie 1 van Les 1 het gehele getal $n^2 - n$ even.

Dus is voor ieder geheel getal n het getal $n^2 - n$ even.

▶ Toelichting 4

Een geheel getal n kan al of niet voldoen aan de uitspraak '$n^2 - n$ is even'. De gehele getallen die er aan voldoen vormen een deelverzameling B van $\mathbb{Z}$:

$$B = \{\, n \in \mathbb{Z} \mid n^2 - n \text{ is even} \,\}.$$

We hebben dus laten zien dat $\mathbb{Z} \subseteq B$: ieder element van $\mathbb{Z}$ is ook een element van B. En dus $B = \mathbb{Z}$, want ook is ieder element van B een element van $\mathbb{Z}$. (Welke deelverzameling van $\mathbb{Z}$ is de verzameling $\{\, n \in \mathbb{Z} \mid n^2 - n \text{ is oneven} \,\}$?)

4. De welordening van $\mathbb{N}$.

Laat U een deelverzameling zijn van $\mathbb{N}$. In $\mathbb{N}$ zijn dan twee soorten elementen te onderscheiden: elementen die in U zitten en elementen die niet in U zitten, zeg *witte* en *zwarte*. Als U niet leeg is, dan is er dus minstens één wit natuurlijk getal. Beginnen we bij 0 te tellen, dan zullen we (als we over voldoende tijd beschikken) een eerste keer een wit getal tegenkomen. Dat is dan het kleinste witte getal. Is U leeg, dan zullen we nooit een wit getal tegenkomen, want die zijn er niet. Laat staan dat er een kleinste wit getal zou zijn. Voor alle duidelijkheid zeggen we even precies wat we bedoelen met het kleinste getal in een deelverzameling U van $\mathbb{N}$.

Definitie 2. Zij U een deelverzameling van $\mathbb{N}$. Dan heet $a \in \mathbb{N}$ het *kleinste element* van U als

- $a \in U$,
- voor alle $u \in U$ geldt $a \leq u$.

▶ Toelichting 5

Wat we hier beschreven hebben is een fundamentele eigenschap van $\mathbb{N}$:

Stelling 1. **(De welordening van $\mathbb{N}$)** *Iedere niet-lege deelverzameling van $\mathbb{N}$ heeft een kleinste element.*

▶ Toelichting 6

5. Het gebruik van de welordening van $\mathbb{N}$

In deze paragraaf laten we zien hoe de welordening van $\mathbb{N}$ gebruikt kan worden om eigenschappen van $\mathbb{N}$ te bewijzen.

5.1. Even en oneven

We beginnen met iets flauws dat nog uit Les 1 is blijven staan: ieder geheel getal is even of oneven. We beperken ons nu tot de natuurlijke getallen. Voor de gehele getallen is het dan makkelijk het daaruit af te leiden.

Propositie 1. *Voor ieder natuurlijk getal n geldt dat n even is of oneven.*

BEWIJS: We geven een bewijs uit het ongerijmde.

Stel er bestaat een (gek) natuurlijk getal g dat niet even is en ook niet oneven. Dan is de verzameling

$$U = \{\, n \in \mathbb{N} \mid n \text{ is niet even en niet oneven} \,\}$$

niet leeg, want $g \in U$. Uit de welordening van $\mathbb{N}$ volgt dat U een kleinste element bevat. Dat is dan een gek natuurlijk getal a (d.w.z. het is niet even en ook niet oneven) waarvoor geldt dat alle kleinere natuurlijke getallen niet gek zijn. Het getal 0 is niet gek, want het is even. Dus $a \neq 0$, ofwel $a \geq 1$. Dan is ook $a - 1$ een natuurlijk getal. Omdat $a - 1 < a$ is het getal $a - 1$ even of oneven.

Stel $a-1$ is even. Dan is er een $k \in \mathbb{N}$ met $a-1 = 2k$, ofwel $a = 2k+1$. Dus is a oneven. Tegenspraak.

Dus is $a-1$ niet even. Omdat $a-1$ even of oneven is, hebben we dus dat $a - 1$ oneven is. Dus is er een natuurlijk getal k zo dat $a - 1 = 2k + 1$, ofwel $a = 2(k + 1)$. Dus is a even. Tegenspraak.

Zo'n gek natuurlijk getal bestaat dus niet, ofwel: ieder natuurlijk getal is even of oneven. ■

▶ Toelichting 7

5.2. Delen met rest

Zij $a \in \mathbb{Z}$ en zij $b \in \mathbb{N}^*$. Er zijn oneindig veel b-vouden in $\mathbb{Z}$:

$$\ldots, -3b, -2b, -b, 0, b, 2b, 3b, 4b, \ldots$$

Het is wel duidelijk dat er een unieke $q \in \mathbb{Z}$ is zo dat

$$qb \leq a < (q+1)b.$$

Dan

$$a = qb + (a - bq) \quad \text{en} \quad 0 \leq a - bq < b.$$

We noemen q het *quotiënt* en $a - qb$ de *rest* van de deling van a door b. Het b-voud qb is het grootste b-voud dat $\leq a$ is. De rest $a - qb$ is het kleinste natuurlijke getal dat als verschil van a met een b-voud optreedt. Dit geeft aan hoe het delen met rest een gevolg is van de welordeningseigenschap van $\mathbb{N}$.

Stelling 2. **(Delen met rest)** *Zij $a \in \mathbb{Z}$ en zij $b \in \mathbb{N}^*$. Dan zijn er unieke $q, r \in \mathbb{Z}$ zo dat*

$$\begin{cases} a = qb + r \\ 0 \leq r < b. \end{cases}$$

Bewijs: Beschouw de volgende deelverzameling van $\mathbb{N}$:

$$U = \{\, n \in \mathbb{N} \mid \text{er is een } k \in \mathbb{Z} \text{ zo dat } n = a - kb \,\}.$$

Er geldt $U \neq \emptyset$: als $a \geq 0$, dan $a \in U$, en als $a < 0$, dan $a - ab \in U$. Laat r het kleinste element van U zijn. Dan is er een $q \in \mathbb{Z}$ zo dat $r = a - qb$, ofwel $a = qb + r$. Omdat $r \in U$ geldt dat $r \geq 0$. We bewijzen dat $r < b$.

Stel $r \geq b$. Dan $r - b \in \mathbb{N}$ en $r - b = a - qb - b = a - (q+1)b$ en dus $r - b \in U$. Echter $r - b < r$ en r is het kleinst in U. Tegenspraak.

Dus $r < b$. Er resteert nog te bewijzen dat q en r uniek zijn.

Stel dat ook

$$\begin{cases} a = q'b + r' \\ 0 \leq r' < b, \end{cases}$$

met $q', r' \in \mathbb{Z}$. Dan

$$qb + r = q'b + r'$$

en dus

$$(q - q')b = r' - r.$$

Uit $0 \leq r < b$ en $0 \leq r' < b$ volgt dat $-b < r' - r < b$, ofwel

$$-b < (q - q')b < b.$$

Delen door b geeft

$$-1 < q - q' < 1.$$

Het gehele getal $q - q'$ is dus het getal 0. Dus $q' = q$ en $r' = a - q'b = a - qb = r$.

Dus zijn q en r uniek. ■

5.3. Priemgetallen

Definitie 3. Zij p een natuurlijk getal. Dan heet p een *priemgetal* als $p \neq 1$ en 1 en p de enige natuurlijke getallen zijn die p delen.

Definitie 4. Zij n een natuurlijk getal en zij p een priemgetal. Dan heet p een *priemdeler* van n als $p \mid n$.

Propositie 2. *Zij n een natuurlijk getal met $n > 1$. Dan heeft n een priemdeler.*

Bewijs: Beschouw de verzameling U bestaande uit alle natuurlijke getallen $\neq 1$ die deler zijn van n. Dan $U \neq \emptyset$, want $n \in U$. Zij p het kleinste getal in U. Dan is p een deler van n met $p \neq 1$. We gaan bewijzen dat p een priemgetal is.

Laat d een natuurlijk getal $\neq 1$ zijn met $d \mid p$. Dan ook $d \mid n$ en dus $d \in U$. Hieruit volgt $p \leq d$ en omdat d een deler van p is hebben we ook $d \leq p$. Dus $d = p$.

Dus behalve 1 heeft p alleen p als positieve deler. Dus is p een priemgetal.
■

Hieruit leiden we af:

Stelling 3. (Euclides) *Zij n een natuurlijk getal. Dan is er een priemgetal p met $p > n$.*

BEWIJS: Laten $p_1, p_2, \ldots, p_k$ alle priemgetallen zijn die $\leq n$ zijn. Beschouw het getal

$$N = (p_1 \cdot p_2 \cdots p_k) + 1.$$

Dan $N > 1$ en dus heeft N een priemdeler p.

Stel $p \leq n$. Dan is er een i met $p = p_i$. Omdat $p \mid N$ en ook $p \mid p_1 \cdot p_2 \cdots p_k$ (want $p = p_i$), hebben we

$$p \mid N - p_1 \cdot p_2 \cdots p_k = 1.$$

Tegenspraak.

Dus is p een priemgetal met $p > n$. ■

Hieruit volgt dus dat er oneindig veel priemgetallen zijn. Maak je een tabel van priemgetallen, dan is er altijd een nog groter priemgetal. Het hier gegeven bewijs is te vinden in het werk van ***Euclides*** *(±325 v.C. – Alexandrië ±256 v.C.). Voor een biografie van Euclides zie The MacTutor History of Mathematics Archive.*

Als je priemgetallen vermenigvuldigt, dan krijg je natuurlijke getallen:

$$2 \cdot 5 \cdot 13 = 130.$$

Daarbij kun je eenzelfde priemgetal meer dan eens als factor gebruiken:

$$2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11 = 2 \cdot 5^3 \cdot 11 = 2750.$$

Kan een natuurlijk getal ontbonden worden als een product van een of meer priemfactoren, dan heet die ontbinding een *priemfactorontbinding* van dat natuurlijke getal. Hierboven staan priemfactorontbindingen van 130 en 2750. Een priemgetal heeft ook een priemfactorontbinding: het 'product' heeft maar één factor, namelijk het priemgetal zelf.

Stelling 4. *Ieder natuurlijk getal* > 1 *heeft een priemfactorontbinding.*

BEWIJS: We bewijzen het uit het ongerijmde.

Stel er is een natuurlijk getal > 1 dat geen priemfactorontbinding heeft. Dan is er ook een kleinste getal met deze eigenschap. Laten we hem n noemen. Dan is n dus in het bijzonder geen priemgetal. Maar dan is n een product van kleinere getallen a en b: $n = ab$. Deze kleinere getallen hebben wel een priemfactorontbinding. De priemfactorontbindingen van a en b geven samen een priemfactorontbinding van n. Tegenspraak

Dus heeft ieder natuurlijk getal > 1 een priemfactorontbinding. ■

5.4. Factoren 2

De **Hoofdstelling van de Rekenkunde** zegt dat ieder natuurlijk getal > 1 op unieke wijze een product is van een of meer priemgetallen. We kunnen daarom spreken van *de* priemfactorontbinding van dat getal. Schrijf je bijvoorbeeld het getal 2750 als een product van priemgetallen:

$$2750 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11 = 2 \cdot 5^3 \cdot 11,$$

dan heb je één factor 2, drie factoren 5 en één factor 11 en het is nooit anders, hoe je het ook doet. We bewijzen dat hier nog niet. In het bijzonder ligt het aantal factoren 2 in de priemfactorontbinding van een natuurlijk getal vast. Dit speciale geval zullen we hier wel bewijzen en we geven er een toepassing van.

Stelling 5. *Voor iedere $n \in \mathbb{N}^*$ zijn er unieke $k, m \in \mathbb{N}$ zo dat*

$$n = 2^k m \quad \textit{en} \quad m \textit{ oneven.}$$

Bewijs: We bewijzen eerst dat er voor iedere $n \in \mathbb{N}^*$ er $k, m \in \mathbb{N}$ zijn zo dat

$$n = 2^k m \quad \text{en} \quad m \text{ oneven.}$$

De uniciteit van k, m bewijzen we daarna.

Stel er is een $n \in \mathbb{N}^*$ waarvoor er geen $k, m \in \mathbb{N}$ zijn met $n = 2^k m$ en m oneven. Laat n_0 de kleinste zijn met deze eigenschap. Dan is n_0 niet oneven, want anders konden we $k = 0$ nemen. Dus is n_0 even, zeg $n_0 = 2n'$ met $n' \in \mathbb{N}^*$. Omdat $n' < n_0$ zijn er $l, m \in \mathbb{N}$ met $n' = 2^l m$ en m oneven. Dan ook $n_0 = 2^{l+1} m$. Tegenspraak.

Dus zijn er bij iedere $m \in \mathbb{N}^*$ getallen $k, m \in \mathbb{N}$ met $n = 2^k m$ en m oneven. Nu nog de uniciteit.

Stel $n \in \mathbb{N}^*$ met $n = 2^{k_1} m_1 = 2^{k_2} m_2$ en m_1, m_2 oneven. We mogen aannemen dat $k_1 \leq k_2$. Dan

$$m_1 = 2^{k_2 - k_1} m_2.$$

Omdat m_1 oneven is, is ook $2^{k_2 - k_1}$ oneven en dus $k_2 - k_1 = 0$. Dus $k_1 = k_2$ en dus ook $m_1 = m_2$.

Voor ieder $n \in \mathbb{N}^*$ zijn er dus *unieke* $k, m \in \mathbb{N}$ met $n = 2^k m$ en m oneven.

■

Zoals bekend noemen we een reëel getal r *rationaal* als er gehele getallen a en b bestaan zo dat $r = \frac{a}{b}$. De overige reële getallen heten *irrationaal*. Voor een niet-negatief reëel getal s verstaan we onder $\sqrt{s}$, de *wortel* uit s, het positieve reële getal waarvan het kwadraat s is.

Stelling 6. (Euclides) *$\sqrt{2}$ is irrationaal.*

BEWIJS:

Stel $\sqrt{2}$ is rationaal. Dan zijn er natuurlijke getallen a en b zo dat $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Daaruit volgt dat $a^2 = 2b^2$. Schrijf $a = 2^k a_0$ met $k, a_0 \in \mathbb{N}$ en a_0 oneven. Ook $b = 2^l b_0$ met $l, b_0 \in \mathbb{N}$ en b_0 oneven. Invullen in $a^2 = 2b^2$ levert

$$2^{2k} a_0^2 = 2^{2l+1} b_0^2$$

en omdat a_0^2 en b_0^2 oneven zijn geldt dat $2k = 2l + 1$ en dus $2 \mid 1$. Tegenspraak.

Dus is $\sqrt{2}$ niet rationaal, d.w.z. hij is irrationaal. ■

Toetsen

Begin Toets Geef van de volgende uitspraken aan of ze waar of onwaar zijn.

1. $\{2,3,2\} = \{2,3\}$

☐ waar ☐ onwaar

2. $\{\mathbb{N}\} = \mathbb{N}$

☐ waar ☐ onwaar

3. $\{\emptyset\}$ is een deelverzameling van $\emptyset$

☐ waar ☐ onwaar

4. $\{\{\emptyset\}\}$ is een verzameling met één element

☐ waar ☐ onwaar

5. $\mathbb{Z}$ is een deelverzameling van $\mathbb{Q}$

☐ waar ☐ onwaar

6. $\{1,2,3\}$ heeft precies 7 deelverzamelingen

☐ waar ☐ onwaar

Einde Toets Score: Corrigeer

Begin Toets Beantwoord de vragen:

1. Wat is de rest van -100000 bij deling door 3?

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2

2. Hoeveel natuurlijke getallen n zijn er zo dat n, $n+2$ en $n+4$ priemgetallen zijn?

☐ 0 ☐ 1 ☐ oneindig

3. Laat n een natuurlijk getal zijn met $n = 2^k m$ waarbij m een oneven natuurlijk getal is en k een natuurlijk getal ≥ 2. Wat is de rest van $n+6$ bij deling door 4?

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3

4. Laten a en b natuurlijke getallen zijn met $a > b+1$. Is $a^2 - b^2$ een priemgetal?

☐ ja ☐ nee ☐ onbepaald

5. Van het natuurlijke getal $n > 1$ is gegeven dat het geen priemgetal is. Heeft n een priemdeler $\leq \sqrt{n}$?

☐ ja ☐ nee

Einde Toets Score: Corrigeer

Opgaven

1. Toon aan dat $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ een irrationaal getal is.

2. Toon aan dat $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ een irrationaal getal is.

3. Leid Propositie 1 af uit Stelling 2.

4. Iedere $n \in \mathbb{N}^*$ is de som van verschillende machten van 2. Bijvoorbeeld:

$$25 = 16 + 8 + 1 = 2^4 + 2^3 + 2^0.$$

Bewijs dit.

5. Bewijs dat er oneindig veel priemgetallen zijn waarvan de rest bij deling door 4 gelijk is aan 3.

6. Welke priemgetallen hebben rest 0 bij deling door 4? En welke hebben rest 2? Kun je uit Opgave 5 concluderen dat er oneindig veel priemgetallen zijn die rest 1 hebben bij deling door 4?

Opdrachten

Opdracht 1. De verhouding $x : y$ van lengten x en y van zijden van een rechthoek noemt men de gulden snede als $x : y = (x + y) : x$. Stellen we $r = \frac{x}{y}$, dan volgt dat $r = 1 + \frac{1}{r}$, ofwel dat $r^2 = r + 1$. Ga na of het getal r irrationaal is.

Opdracht 2. De Hoofdstelling van de Rekenkunde zegt dat ieder natuurlijk getal > 1 een unieke priemfactorontbinding heeft. Deze stelling kan worden afgeleid uit de welordeningseigenschap van $\mathbb{N}$. Dat is niet het meest gangbare bewijs, maar het kan wel. Zo'n bewijs kan langs de volgende lijnen verlopen.

a. Stel dat de Hoofdstelling niet waar is. (Wat betekent dat?)

b. Laat n het kleinste element ≥ 2 zijn van $\mathbb{N}$ met meer dan één priemfactorontbinding. Neem twee verschillende priemfactorontbindingen van n. Toon aan dat de priemfactoren in de ene ontbinding niet in de andere ontbinding voorkomen.

c. Laat p het kleinste priemgetal in de ene priemfactorontbinding zijn en q het kleinste in de andere priemfactorontbinding. Dan $p \neq q$ en we mogen wel aannemen dat $p < q$.

d. Toon aan dat $n - pq$ een natuurlijk getal is.

e. Waarom kunnen we spreken van *de* priemfactorontbinding van $n-pq$? De priemgetallen p en q komen beide in de priemfactorontbinding van

$n - pq$ voor. Waarom?

f. Leid een tegenspraak af.

Opdracht 3. Getallen van de vorm $n^2 + 1$ (met $n \in \mathbb{N}$) hebben geen priemdelers met rest 3 bij deling door 4. Het is op dit moment nog lastig om dat in te zien. Gebruik dit resultaat om aan te tonen dat er oneindig veel priemgetallen zijn die rest 1 hebben bij deling door 4.

Opdracht 4. Laat A de verzameling zijn van alle natuurlijke getallen, die rest 1 geven bij deling door 4. Dus

$$A = \{1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, \ldots\}.$$

Als je getallen uit A met elkaar vermenigvuldigt, krijg je weer getallen uit A. Welke getallen hebben in A de rol van priemgetallen? Is ieder getal $\neq 1$ het product van zulke 'priemgetallen'? Is hier er sprake van unieke ontbinding?

Toelichtingen en hints

Toelichting 1. Dat de verzameling volledig bepaald is door zijn elementen, houdt in dat het ons niet uitmaakt hoe de verzameling is beschreven.

Zo is de verzameling van alle gehele getallen x die een oplossing zijn van de vergelijking $x^2 - 4x + 3 = 0$ precies dezelfde verzameling als de verzameling van alle oneven getallen die tussen 0 en 4 liggen. Het zijn beide beschrijvingen van de verzameling $\{1, 3\}$. ◄

Toelichting 2. In de verzameling $\mathbb{N}$ van de natuurlijke getallen is aftrekken niet altijd mogelijk: er is geen natuurlijk getal x zo dat $5 + x = 3$. Om dat mogelijk te maken—zonder de normale rekenregels geweld aan te doen—zijn de negatieve getallen uitgevonden. Samen met de natuurlijke getallen vormen deze $\mathbb{Z}$, de verzameling der gehele getallen.

In $\mathbb{Z}$ is aftrekken wel steeds mogelijk, maar delen niet: er is geen $x \in \mathbb{Z}$ met $5x = 3$. Wil je dat zo'n x wel bestaat, dan heb je aan de gehele getallen niet genoeg. Er zijn meer getallen nodig: de rationale getallen, ofwel de breuken van gehele getallen. Zulke breuken zijn te schrijven als $\frac{p}{q}$ met p geheel en $q \neq 0$ een natuurlijk getal. Deze getallen vormen de verzameling $\mathbb{Q}$.

Ook in $\mathbb{Q}$ kan niet alles wat we zouden willen: in deze les zullen we bijvoorbeeld zien dat er geen rationaal getal x is zo dat $x^2 = 2$. In $\mathbb{R}$, de verzameling der reëele getallen, is zo'n getal er wel: $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$. Het getal $\sqrt{2}$ is de oplossing van een eenvoudige vergelijking. In dit geval een kwadratische vergelijking: $x^2 - 2 = 0$. De coëfficiënten van deze vergelijking $(1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + (-2) = 0)$ zijn 1, 0 en -2, en dat zijn gehele getallen. Men zegt daarom dat dit getal een *algebraïsch* getal is. Er zijn ook nog andere reëele getallen: π bevoorbeeld. Van π is in 1882 bewezen dat het geen algebraïsch getal is: er is niet zo'n vergelijking waar het een oplossing van is. We zeggen dat π *transcendent* is.

Ook met $\mathbb{R}$ zijn wiskundigen niet tevreden: de vergelijking $x^2 + 1 = 0$ bijvoorbeeld heeft nog steeds geen oplossing. Daarom wordt ook $\mathbb{R}$ uitgebreid. Je krijgt dan $\mathbb{C}$, de verzameling der *complexe* getallen. Het complexe getal i is een oplossing en ook het getal $-i$. Iedere kwadratische vergelijking heeft nu twee oplossingen (als je 'samenvallende' oplossingen dubbel telt). Het mooie van $\mathbb{C}$ is dat iedere n-degraads vergelijking n oplossingen heeft. Mooier kan het niet. ◀

Toelichting 3. Vaak wordt de notatie $B \subset A$ gebruikt om hetzelfde aan te geven. Hier reserveren we deze notatie voor $B \subseteq A$ en $B \neq A$. In dit college maken we daar echter geen gebruik van. ◀

Toelichting 4. Het bewijs van een bewering van de gedaante

Voor alle $a \in A$ *geldt* $P(a)$.

kan als volgt verlopen:

Stel $a \in A$.
...
Dus $P(a)$.
Dus: voor alle $a \in A$ geldt $P(a)$.

Als je bijvoorbeeld de stelling wilt bewijzen die zegt dat de som van de hoeken in een driehoek 180 graden is, dan begin je met zoiets als: Laat ABC een driehoek zijn. Vervolgens komt er een redenering over deze driehoek ABC, waarvan niet meer verondersteld is dan dat het een driehoek is. De redenering is dan van toepassing op iedere driehoek en daarmee is de conlusie geldig voor iedere driehoek. ◀

Toelichting 5. Merk op dat, als a het kleinste element is van U, dat er dan geen andere kleinste elementen zijn. Daarom spreken we ook van *het* kleinste element. De redenering is eenvoudig:

> Stel b is ook het kleinste element van U. Dan $b \leq a$, want $a \in U$. Evenzo geldt ook $a \leq b$. Dus $a = b$.

Dus: zijn a en b beide het kleinst, dan zijn ze aan elkaar gelijk. We drukken dit ook als volgt uit: het kleinste element is—als het bestaat—*uniek*. ◄

Toelichting 6. Deze eigenschap van $\mathbb{N}$ hebben we niet bewezen. Hij is alleen maar toegelicht. Voor ons is het dus een axioma. ◀

Toelichting 7. Dit is een overdreven lang bewijs voor iets eenvoudigs en het is makkelijk samen te vatten tot iets overzichtelijks:

> Als er natuurlijke getallen zijn die niet even en niet oneven zijn, dan is er ook een kleinste natuurlijk getal a met die eigenschap. Dan $a \geq 1$ en is $a - 1$ een natuurlijk getal dat even of oneven is. Maar dan is ook a zelf even of oneven.

◀

Opgave 1. Omdat ‘irrationaal’ een negatief begrip is, ligt het voor de hand om dit uit het ongerijmde te bewijzen. Stel dus dat $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ rationaal is en leidt een tegenspraak af. ◀

Opgave 2. Geef een bewijs uit het ongerijmde. Als $r = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, dan geeft kwadrateren van $r - \sqrt{2}$ een verband tussen r en $\sqrt{2}$. ◀

Opgave 3. Neem in Stelling 2 het getal b gelijk aan 2. Gebruik dat de rest r uniek is. ◀

Opgave 4. Gebruik de welordening van de natuurlijke getallen. Als er een natuurlijk getal $n \neq 0$ is dat niet de som is van verschillende machten van 2, dan is er ook een kleinste. Onderscheid twee gevallen: dit kleinste getal is even, resp. oneven.

Extra: In feite zijn de machten van 2 die zo optreden uniek. Dat is op soortgelijke wijze aan te tonen. In het college Rekenkunde gaan we daar uitvoeriger op in. De *binaire* schrijfwijze van de natuurlijke getallen hangt hier nauw mee samen. Het getal $1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$ noteer je dan als `11001`. Het komt neer op het gebruik van het grondtal 2 in plaats van 10. ◀

Opgave 5. Probeer het bewijs van Euclides te copiëren voor alleen deze priemgetallen. Gebruik daarbij $4p_1p_2\cdots p_n - 1$. Wat is de rest hiervan bij deling door 4? Kunnen alle priemdelers hiervan een rest 1 hebben bij deling door 4? ◀

Opgave 6. Als de rest bij deling door 4 gelijk aan 0 is, dan is het getal een 4-voud. Is de rest 2, dan is het even, maar geen 4-voud. Het is wel duidelijk dat er maar één even priemgetal is.

Is een deelverzameling A van een verzameling B oneindig, dan is B natuurlijk ook oneindig, maar of er oneindig veel elementen van B zijn die niet in A zitten is hieruit niet te concluderen: er zijn oneindig veel natuurlijke getallen die niet in de oneindige deelverzameling van de even natuurlijke getallen zitten, en er is slechts één natuurlijk getal dat niet in de deelverzameling $\mathbb{N}^*$ zit. ◀