K.U.N.
Subfaculteit Wiskunde

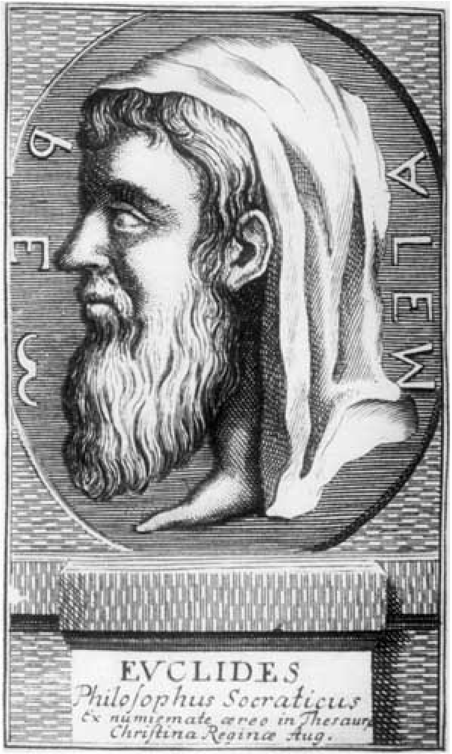
Cursus:

Wiskundig denken

Les 3:

Structuren

Frans Keune



 keune@sci.kun.nl
Laatste wijziging: 26 november 2001
Versie 1.1

Het abstracte karakter maakt dat de wiskunde geschikt is voor het maken van modellen van realistische zaken. Dat kunnen zaken zijn uit de techniek, de economie, de natuurwetenschappen, etc., maar ook uit de natuur of het dagelijks leven. Het wiskundige model is een abstractie waarbij dingen die niet als essentieel worden gezien, worden weggelaten. Het wiskundig model leent zich voor logisch redeneren. Eigenschappen van zo'n model laten zich vertalen in uitspraken over realistische zaken. Dit is de algemene situatie bij het toepassen van wiskunde. In deze les beschouwen we een aantal eenvoudige abstracte wiskundige structuren die als model kunnen optreden.

1. Relaties

Een uitspraak als '$m < n$' die gaat over gehele getallen m en n is voor sommige paren m en n waar en voor andere paren onwaar. Voor zulke uitspraken kijken we naar *geordende paren*, paren waarbij de volgorde van belang is. Zo'n geordend paar geven we aan als (a, b). Het heeft een eerste element a en een tweede element b. De kenmerkende eigenschap voor geordende paren is:

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ en } b = d.$$

▶ **Toelichting 1**

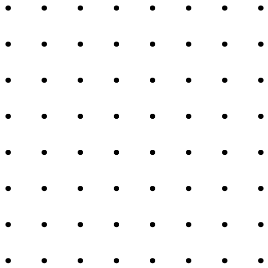
Geordende paren zijn geschikt om *relaties* vast te leggen.

Voorbeeld 1. Voor elementen m en n van $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ kan gelden $m \mid n$. Dat m een deler is van n is een relatie tussen de elementen m en n. Voor deze verzameling kunnen we de relatie vastleggen door alle geordende tweetallen (m, n) op te sommen waarvoor $m \mid n$: $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(1, 5)$, $(1, 6)$, $(1, 7)$, $(1, 8)$, $(2, 2)$, $(2, 4)$, $(2, 6)$, $(2, 8)$, $(3, 3)$, $(3, 6)$, $(4, 4)$, $(4, 8)$, $(5, 5)$, $(6, 6)$, $(7, 7)$. Dit zijn allemaal elementen van de verzameling van alle geordende paren (m, n) met $m, n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, d.w.z. zij vormen een deelverzameling van die verzameling. In de wiskunde identificeert men graag relaties met dergelijke deelverzamelingen.

Definitie 1. Is A een verzameling, dan geven we met A^2 de verzameling aan van alle geordende paren (a, b), waarbij $a, b \in A$. Dus:

$$A^2 = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ en } b \in A \}.$$

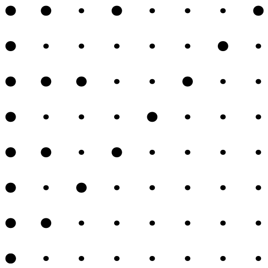
Voorbeeld 2. Voor $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ kunnen we A^2 overzichtelijk weergeven in een plaatje:



Hierbij wordt (a, b) voorgesteld door de b-de stip van onderen in de a-de kolom.

Definitie 2. Een *relatie* in een verzameling A is een deelverzameling van A^2.

Voorbeeld 3. De relatie 'is een deler van' in de verzameling $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ is dan aan te geven als:



Is R een relatie in A, dan is $(a, b) \in R$ een goede notatie. Vaak gebruikt men voor relaties de notatie $a\,R\,b$, de zogeheten *infix*-notatie.

2. Speciale relaties

Definitie 3. Een relatie R in een verzameling A heet *reflexief* als voor alle $a \in A$ geldt dat $a\,R\,a$ (d.w.z. $(a, a) \in R$).

Voorbeeld 4. De relatie 'is deler van' van Voorbeeld 1 is reflexief, omdat ieder getal een deler van zichzelf is. Dit geldt ook voor deze relatie in de verzameling $\mathbb{Z}$.

Definitie 4. Een relatie R in een verzameling A heet *transitief* als voor alle $a, b, c \in A$ geldt

$$\text{als } a\,R\,b \text{ en } b\,R\,c\,, \text{ dan } a\,R\,c.$$

Voorbeeld 5. De relatie 'is deler van' is transitief: een deler van een deler is een deler.

Definitie 5. Een relatie R in een verzameling A heet *symmetrisch* als voor alle $a, b \in A$ geldt

$$\text{als } \ a\,R\,b, \text{ dan } \ b\,R\,a.$$

Voorbeeld 6. De relatie 'is het tegengestelde van' in de verzameling $\mathbb{Z}$ is symmetrisch. (-3 is het tegengestelde van 3 en omgekeerd.)

Definitie 6. Een relatie R in een verzameling A heet *antisymmetrisch* als voor iedere $a, b \in A$ geldt

$$\text{als } \ a\,R\,b \ \text{ en } \ b\,R\,a\,, \text{ dan } a = b.$$

Voorbeeld 7. De relatie $\leq$ in $\mathbb{N}^*$ is antisymmetrisch en dat geldt dus ook voor $\geq$. Ook 'is deler van' in $\mathbb{N}^*$ is antisymmetrisch.

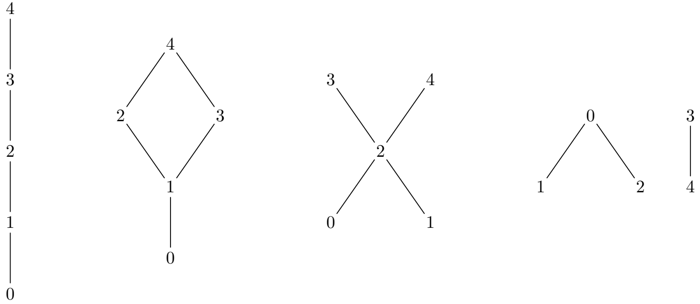
3. Ordeningen

Deze paragraaf gaat over een speciaal soort relatie: de ordening. Om een willekeurige ordening aan te geven gebruiken we hier vaak het symbool $\preceq$ in plaats van R.

Definitie 7. Een relatie $\preceq$ in een verzameling A heet een *ordening* van A als hij reflexief, transitief en antisymmetrisch is. We zeggen dan dat $(A, \preceq)$ een *geordende* verzameling is.

Voorbeelden 8. Een geordende verzameling $(A, \preceq)$ is dus een verzameling A met een ordening $\preceq$ van die verzameling. Voor de hand liggende voorbeelden van geordende verzamelingen zijn: $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{N}, \geq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \geq)$ en $(\mathbb{N}^*, |)$.

Ordeningen van niet al te grote verzamelingen kun je in een plaatje weergeven. Hier is bijvoorbeeld een viertal ordeningen van $\{0, 1, 2, 3, 4\}$:



Kun je van a naar b gaan door langs verbindingen van beneden naar boven te lopen, dan $a \preceq b$. Zo'n plaatje wordt wel een *Hasse-diagram* genoemd. We zullen enkele typen van ordeningen onderscheiden.

Definitie 8. Een ordening $\preceq$ van een verzameling A heet *totaal* als voor iedere $a, b \in A$ geldt: $a \preceq b$ of $b \preceq a$. We zeggen dan dat $(A, \preceq)$ een *totaal* geordende verzameling is.

Voorbeelden 9. De ordeningen $\leq$ en $\geq$ van de verzamelingen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ zijn totaal. Voor de ordening 'is deler van' van $\mathbb{N}^*$ geldt dat niet: $2 \nmid 3$ en $3 \nmid 2$.

Definitie 9. Laat $\preceq$ een ordening zijn van een verzameling A en laat U een deelverzameling zijn van A. Dan heet $a \in A$ het *kleinste* element van U (m.b.t. de ordening $\preceq$) als

- $a \in U$,
- $a \preceq u$ voor alle $u \in U$.

▶ Toelichting 2

Voorbeelden 10. De deelverzameling $\mathbb{Z}$ van $\mathbb{Z}$ heeft geen kleinste element m.b.t. $\leq$.

De deelverzameling $\mathbb{N}$ van $\mathbb{N}$ heeft geen kleinste element m.b.t. $\geq$. De deelverzameling $\{4, 8, 13, 100\}$ van $\mathbb{N}$ heeft wel een kleinste element m.b.t. de ordening $\geq$, nl. het element 100. M.b.t. $\leq$ is 4 het kleinst en m.b.t. 'is deler van' heeft deze verzameling geen kleinste element.

Definitie 10. Een ordening $\preceq$ van een verzameling A heet een *welordening* als iedere niet-lege deelverzameling van A een kleinste element heeft m.b.t. $\preceq$.

Voorbeeld 11. De welordeningseigenschap van de natuurlijke getallen uit de vorige les zegt dat de ordening $\leq$ van $\mathbb{N}$ een welordening is.

We zullen hier geen theorie opbouwen over ordeningen. We hebben ons beperkt tot definities en voorbeelden, en zullen hier alleen een eenvoudige eigenschap van welordeningen afleiden. Uit de voorbeelden is duidelijk dat er totale ordeningen zijn die geen welordeningen zijn. We hebben geen voorbeelden gezien van welordeningen die niet totaal zijn. Dat kan natuurlijk komen doordat we zo weinig welordeningen gezien hebben, het kan ook zijn dat ze eenvoudigweg niet bestaan. Je kunt voorbeelden van welordeningen proberen te vinden die niet totaal zijn. Als dat alsmaar niet wil lukken, dan ben je geneigd te denken dat ze niet gevonden kunnen worden, omdat ze niet bestaan. Of dat echt het geval is, kun je alleen maar inzien door er een bewijs voor te geven.

Stelling 1. *Zij $\preceq$ een welordening van een verzameling A. Dan is $\preceq$ een totale ordening.*

BEWIJS:

Laten a, b elementen zijn van A. Dan is $\{a, b\}$ een deelverzameling van A. Omdat $\preceq$ een welordening is, heeft deze verzameling een kleinste element. Als a het kleinste element is, dan geldt $a \preceq b$. Is b het kleinste element, dan $b \preceq a$. Dus: $a \preceq b$ of $b \preceq a$.

Dus voor alle $a, b \in A$ geldt: $a \preceq b$ of $b \preceq a$. Ofwel: $\preceq$ is totaal. ■

Machtsverzamelingen

Een belangrijk voorbeeld van een ordening is de relatie 'is deelverzameling van'. Dit is een relatie in de verzameling van alle deelverzamelingen van een gegeven verzameling.

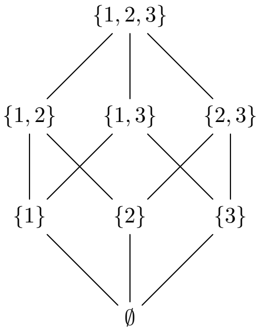
Definitie 11. Laat B een verzameling zijn. De verzameling waarvan de elementen de deelverzamelingen van B zijn heet de *machtsverzameling* van B. Deze wordt genoteerd als $\mathcal{P}(B)$. Dus:

$$\mathcal{P}(B) = \{\, U \mid U \subseteq B \,\}.$$

Voorbeeld 12. Zij B een verzameling. De deelverzamelingen van B vormen een geordende verzameling: $(\mathcal{P}(B), \subseteq)$. De verzameling $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$ heeft 8 elementen:

$$\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

Een Hasse-diagram van deze geordende verzameling:



Deze ordening is niet totaal en dus ook geen welordening.

4. Equivalentierelaties

Definitie 12. Een relatie heet een *equivalentierelatie* als hij reflexief, symmetrisch en transitief is.

Voor een willekeurige ordening gebruiken we vaak het symbool $\preceq$. Een willekeurige equivalentierelatie zullen we vaak met $\sim$ aangeven. De bedoeling van een equivalentierelatie $\sim$ is dat elementen a en b met $a \sim b$ op de een of andere manier bij elkaar horen: je kunt de elementen in 'hokjes' onderbrengen zo dat $a \sim b$ dan en slechts dan als a en b in hetzelfde hokje zitten. Zo'n verdeling van een verzameling A noemt men een *partitie* van A.

Definitie 13. Zij $\sim$ een equivalentierelatie in A. Dan heet

$$[a] = \{ x \in A \mid x \sim a \}$$

de *equivalentieklasse* van a.

Voorbeeld 13. De relatie $\equiv_5$ in $\mathbb{Z}$ is gedefinieerd door:

$$a \equiv_5 b \iff 5 \mid a - b$$

voor alle $a, b \in \mathbb{Z}$. (Men spreekt $a \equiv_5 b$ uit als: *a is congruent met b modulo* 5). Het is een equivalentierelatie:

- $5 \mid a - a$ en dus $a \equiv_5 a$.
- Als $5 \mid a - b$, dan ook $5 \mid b - a$. Dit is de symmetrie.
- Als $5 \mid a - b$ en $5 \mid b - c$, dan $5 \mid (a - b) + (b - c)$, ofwel $5 \mid a - c$. Dus is de relatie transitief.

Evenals dat bij ordeningen van eindige verzamelingen het geval is, kun je ook van equivalentierelaties in eindige verzamelingen een overzichtelijk plaatje maken: je plaatst equivalente elementen in eenzelfde hokje. De relatie $a \sim b$ kun je dan vertalen in: a en b behoren tot hetzelfde hokje. Beperk je de relatie $\equiv_5$ tot $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 12\}$, dan krijg je

0 5 10	1 6 11	2 7 12	3 8	4 9

Modulorekenen

De equivalentierelatie $\equiv_5$ in $\mathbb{Z}$ verdeelt $\mathbb{Z}$ in 5 klassen:

$$\begin{array}{|r|r|r|r|r|}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
-5 & -4 & -3 & -2 & -1 \\
0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\hline
\end{array}$$

Getallen zijn equivalent als ze bij deling door 5 dezelfde rest geven. In een kolom staan de getallen met dezelfde rest bij deling door 5: in de eerste kolom rest 0, in de tweede rest 1, enzovoort. (Getallen in dezelfde rij zijn trouwens de getallen met hetzelfde quotiënt bij deling door 5.) De kolom waar a in staat geven we aan met $\overline{a}$. Dus bijvoorbeeld $\overline{30} = \overline{0}$ en $\overline{-127} = \overline{3}$. De vijf kolommen vormen een verzameling met 5 elementen:

$$\mathbb{Z}_5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}.$$

In deze verzameling met 5 elementen kun je optellen en vermenigvuldigen:

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b} \quad \text{en} \quad \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{ab}.$$

Dus:

$$\overline{3} + \overline{4} = \overline{7} = \overline{2}.$$

Twee klassen optellen betekent dus: kies in elk van de klassen een getal, tel deze getallen op en neem de klasse waar dit getal toe behoort. Het kiezen van elementen in een klasse is niet van invloed op het eindresultaat. Dit volgt eenvoudig uit de definitie van $\equiv_5$.

Je kunt in $\mathbb{Z}_5$ net zo rekenen als in $\mathbb{Z}$. Zo is $\overline{a}(\overline{b}+\overline{c}) = \overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{c}$. Dat volgt eenvoudig uit

$$\overline{a}(\overline{b}+\overline{c}) = \overline{a}\cdot\overline{b+c} = \overline{a(b+c)}$$

en

$$\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{c} = \overline{ab}+\overline{ac} = \overline{ab+ac}.$$

De optellingstabel:

	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$

De vermenigvuldigingstabel:

	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

In $\mathbb{Z}$ heeft de vergelijking $2x = 3$ geen oplossing. In $\mathbb{Z}_5$ heeft $\overline{2}x = \overline{3}$ dat wel. Kijk maar in de vermenigvuldigingstabel. De vergelijking $x^2 = -1$ heeft zelfs in $\mathbb{R}$ geen oplossing. In $\mathbb{Z}_5$ heeft $x^2 = -\overline{1}$ wel oplossingen.

Toetsen

Begin Toets Geef van elk van de volgende uitspraken aan of ze waar of onwaar zijn.

1. Een antisymmetrische relatie is niet symmetrisch.

☐ waar ☐ onwaar

2. Een totaal geordende verzameling heeft een kleinste element.

☐ waar ☐ onwaar

3. In de lege verzameling zijn geen relaties.

☐ waar ☐ onwaar

4. Een symmetrische antisymmetrische relatie is reflexief.

☐ waar ☐ onwaar

5. Er zijn precies 3 ordeningen van een verzameling met 2 elementen.

☐ waar ☐ onwaar

6. Er zijn precies 3 reflexieve relaties in een verzameling met 2 elementen.

☐ waar ☐ onwaar

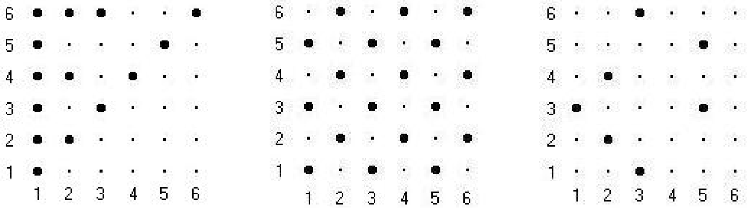
7. In $\mathbb{Z}_5$ is ieder element het kwadraat van een element.

☐ waar ☐ onwaar

Einde Toets Score: Corrigeer

Opgaven

1. We bekijken drie relaties in $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Noem ze achtereenvolgens R, S en T.



Geef van elk van de drie relaties aan of zij reflexief, transitief, symmetrisch en/of antisymmetrisch is.

2. We kijken nog eens naar de relatie R uit opgave 1.

(a) Bewijs dat R een ordening is.

(b) Maak een Hasse-diagram bij deze ordening.

(c) Beschrijf de ordening R met woorden: Er geldt $aRb \iff \ldots$.

3. We kijken nog eens naar de relatie S uit opgave 1.

(a) Bewijs dat S een equivalentierelatie is.

(b) Geef de opdeling van $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ die hoort bij deze equivalentierelatie.

(c) Beschrijf de relatie S met woorden: Er geldt $aSb \iff \ldots$.

4. De relatie T uit opgave 1 is een 'fantasierelatie'. Er is zomaar een plaatje getekend. Elk plaatje in $V \times V$ levert een relatie. In deze opgave tellen we hoeveel relaties er zijn in $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(a) Hoeveel relaties zijn er in totaal in V?

(b) Hoeveel reflexieve relaties zijn er?

(c) Hoeveel reflexieve, symmetrische relaties zijn er?

(d) Hoeveel reflexieve, antisymmetrische relaties zijn er?

Een relatie R op $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ heet een functie als er bij elke $a \in V$ precies één $b \in V$ bestaat met aRb.

(e) Geef een voorbeeld van een functie op V. (Maak een plaatje in $V \times V$).

(f) Hoeveel functies zijn er op V?

5. Laat A de verzameling van alle delers van 72 zijn. Zoals je weet is de relatie $|$ een ordening op A.

(a) Maak een Hasse-diagram bij deze ordening op A.

(b) Heeft de deelverzameling $\{2, 6, 9\}$ van A een kleinste element t.a.v. de ordening $|$?

6. We maken nog een andere relatie op de verzameling A uit opgave 5.

(a) Laat zien dat je elk element van A kunt schrijven als $2^m \cdot 3^n$, met m en n natuurlijke getallen.

We maken de relatie $\preceq$ op A als volgt.
Laat $a, b \in A$. Schrijf $a = 2^m \cdot 3^n$ en $b = 2^s \cdot 3^t$. Dan geldt

$$a \preceq b \iff m < s \text{ of } (m = s \text{ en } n \leq t).$$

(b) Bewijs dat $9 \preceq 2$.

(c) Bewijs dat $\preceq$ een ordening is.

(d) Maak een Hasse-diagram bij deze ordening.

(e) Wat is het kleinste element van de deelverzameling $\{4, 18, 24\}$ t.a.v. deze ordening?

7. We bekijken de bekende relatie $\leq$ op $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Z}$. Ga van elk van onderstaande deelverzamelingen U na of ze een kleinste element hebben. Zo ja, wat is dan dit kleinste element?

(a) $(\mathbb{R}, \leq)$ en $U = \{\, x \in \mathbb{R} \mid a^2 \leq 2 \,\}$

(b) $(\mathbb{Q}, \leq)$ en $U = \{\, x \in \mathbb{Q} \mid a^2 \leq 2 \,\}$

(c) $(\mathbb{Z}, \leq)$ en $U = \{\, x \in \mathbb{Z} \mid a^2 \leq 2 \,\}$

(d) $(\mathbb{R}, \leq)$ en $U = \{\, x \in \mathbb{R} \mid a^2 < 2 \,\}$

(e) $(\mathbb{Q}, \leq)$ en $U = \{\, x \in \mathbb{Q} \mid a^2 < 2 \,\}$

(f) $(\mathbb{Z}, \leq)$ en $U = \{\, x \in \mathbb{Z} \mid a^2 < 2 \,\}$

8. In het dictaat is $\mathbb{Z}_5$ geconstrueerd. We kunnen zo ook $\mathbb{Z}_6$ maken. Bekijk de equivalentierelatie $\equiv_6$ op $\mathbb{Z}$ die als volgt gedefinieerd is.

$$a \equiv_6 b \iff 6 \mid a - b.$$

(a) Maak een plaatje van de opdeling van $\mathbb{Z}$ bij deze equivalentierelatie.

De verzameling $\mathbb{Z}$ wordt door deze equivalentierelatie opgedeeld in zes stukken. Die duiden we aan met $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}$. Dit zijn de elementen van $\mathbb{Z}_6$.

(b) Maak een optellingstabel en een vermenigvuldigingstabel.

Een element a in $\mathbb{Z}_6$ heet een nuldeler als $a \neq \overline{0}$ en er een $b \neq \overline{0}$ in $\mathbb{Z}_6$ bestaat met $ab = \overline{0}$.

(c) Wat zijn de nuldelers in $\mathbb{Z}_6$?

(d) Los op in $\mathbb{Z}_6$: $x(x + \overline{1}) = \overline{0}$

(e) Los op in $\mathbb{Z}_6$: $\overline{5}x = \overline{1}$

(f) Hoeveel oplossingen heeft $x^2 - x = \overline{0}$ in $\mathbb{Z}_6$?

Toelichtingen en hints

Toelichting 1. Als je graag wilt dat het een verzameling is, dan zou je de volgende definitie kunnen gebruiken voor (a, b):

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

◄

Toelichting 2. Heeft U een kleinste element, dan is dat element uniek. Dit volgt eenvoudig uit het antisymmetrisch zijn van $\preceq$:

> Zijn a en b kleinste elementen van U, dan $a, b \in U$ (de eerste eis voor kleinste element) en dus $a \preceq b$ (de tweede eis) en evenzo $b \preceq a$.

Het hangt van U en $\preceq$ af of een kleinste element bestaat. ◄