K.U.N.
Subfaculteit Wiskunde

Cursus:

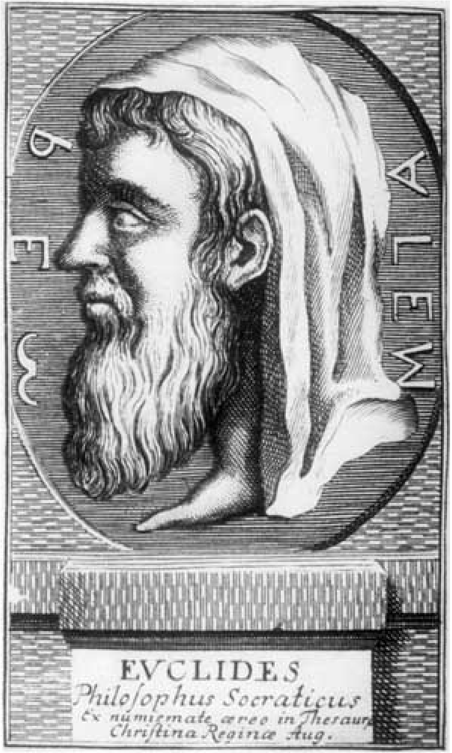
Wiskundig denken

Les 4:

Volledige inductie

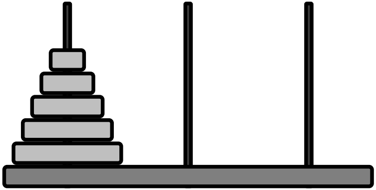
Frans Keune

 keune@sci.kun.nl
Laatste wijziging: 27 november 2001
Versie 1.0



De welordeningseigenschap van de natuurlijke getallen hebben we in Les 2 aannemelijk gemaakt. Voor ons is het een axioma. Er zijn equivalente eigenschappen die elk ook als axioma genomen hadden kunnen worden. We zullen ze hier uit de welordening afleiden.

1. Het eerste principe van volledige inductie



De puzzel *De Toren van Hanoi* wordt gedaan met een n-tal schijven van verschillende diameters die een gat in het midden hebben. Deze schijven kunnen op drie verticale pinnen geplaatst worden. De schijven zijn op pin 1 geplaatst zo dat geen van de schijven boven een kleinere geplaatst is. Het is de bedoeling alle schijven op pin 2 te krijgen door de schijven één voor één naar een andere pin te verplaatsen zonder dat daarbij ooit een schijf op een kleinere komt te liggen. De Toren van Hanoi is bedacht door Edouard Lucas in de negentiende eeuw.

▶ Toelichting 1

We beperken ons eerst tot het geval van 8 schijven. We zullen zien dat de puzzel voor 8 schijven oplosbaar is. Het belangrijkste idee waar de oplossing op berust is:

Lemma *Als we de puzzel met 7 in plaats van 8 schijven kunnen oplossen, dan kunnen we hem ook met 8 schijven oplossen.*

BEWIJS: Ga als volgt te werk. Laat de grootste schijf voorlopig liggen. Omdat de puzzel voor 7 schijven oplosbaar is, kunnen we de andere 7 schijven volgens de regels overbrengen op pin 3. Verplaats dan de grootste schijf naar pin 2. Breng tenslotte de 7 schijven die op pin 3 liggen ook naar pin 2. ■

Wat we hier bedacht hebben voor 7 en 8 schijven geldt natuurlijk ook voor 6 en 7 schijven en algemener voor n en $n+1$ schijven, waarbij n een 'willekeurig' natuurlijk getal is.

Laten we een natuurlijk getal n *mooi* noemen als de puzzel met n schijven oplosbaar is. De vraag is: zijn alle natuurlijke getallen ≥ 1 mooi?

Het getal 1 is zeker mooi: je hebt 1 schijf op pin 1 en in 1 zet staat deze op pin 2. Verder hebben we gezien: als n mooi is, dan is $n+1$ ook mooi. Is dit voldoende om te concluderen dat alle natuurlijke getallen ≥ 1 mooi zijn? Het getal $n+1$ komt direct na het getal n. We zullen $n+1$ de *opvolger* van n noemen. We hebben dus:

1. 1 is mooi,
2. de opvolger van een mooi getal is ook mooi.

Het volgende principe is hierop van toepassing.

Stelling 1. (Het eerste principe van volledige inductie)
Gegeven is een eigenschap van natuurlijke getallen die we hier met mooi *aanduiden en een vast natuurlijk getal n_0. De eigenschap 'mooi' voldoet aan:*

1. *n_0 is mooi,*
2. *de opvolger van een mooi getal is ook mooi.*

Dan is ieder natuurlijk getal $\geq n_0$ mooi.

Bewijs: We bewijzen dit principe met de welordening van $\mathbb{N}$. Getallen groter dan n_0 die niet mooi zijn noemen we lelijk. Zijn er lelijke getallen? We redeneren uit het ongerijmde.

> Stel er zijn lelijke getallen. Dan is er ook een kleinste lelijk getal. Laten we dit getal l noemen. Gegeven is dat n_0 mooi is, dus $l > n_0$. Daaruit volgt dat $l - 1$ een natuurlijk getal $\geq n_0$ is. Omdat l het kleinste lelijke getal is, is $l - 1$ een mooi getal. De opvolger van dit getal is ook mooi. Dus is l mooi. Tegenspraak.

Er zijn dus geen lelijke getallen. Alle getallen $\geq n_0$ zijn dus mooi. ■

Hieruit volgt dus (met $n_0 = 1$) dat de puzzel met ieder aantal schijven oplosbaar is.

▶ Toelichting 2

Ook in het volgende voorbeeld zie je hoe dit principe te gebruiken is.

Voorbeeld 1. We gaan de uitspraak

$$\text{voor alle } n \in \mathbb{N} \text{ geldt } 7 \mid n^7 - n$$

met het eerste principe van volledige inductie bewijzen. We noemen de natuurlijke getallen n die voldoen aan $7 \mid n^7 - n$ *mooi*.
Is 0 mooi? Ja, want $0^7 - 0 = 0$ en dus $7 \mid 0^7 - 0$.

Zij n een mooi natuurlijk getal. Is $n + 1$ dan ook mooi? We hebben:

$$(n + 1)^7 = n^7 + 7n^6 + 21n^5 + 35n^4 + 35n^3 + 21n^2 + 7n + 1.$$

Daaruit volgt

$(n+1)^7-(n+1)=n^7-n+n^7+7n^6+21n^5+35n^4+35n^3+21n^2+7n.$

Omdat n mooi is, is n^7-n een 7-voud. Uit bovenstaande gelijkheid volgt dat ook $(n+1)^7-(n+1)$ een 7-voud is. Dus is ook $n+1$ mooi.

De opvolger van een mooi getal is dus mooi. Met het eerste principe van volledige inductie volgt dus dat alle natuurlijke getallen mooi zijn.

Voorbeeld 2. We gaan bewijzen dat de som van de eerste n natuurlijke getallen gelijk is aan $\frac{1}{2}n(n-1)$, ofwel

$$0+1+\cdots+(n-1)=\tfrac{1}{2}n(n-1).$$

Wil je een meer precieze notatie zonder $\cdots$, dan kun je de $\sum$-notatie gebruiken:

$$\sum_{k=0}^{n-1} k=\tfrac{1}{2}n(n-1).$$

We bewijzen dat dit juist is voor alle natuurlijke getallen $n\geq 1$. Laten we de getallen n waarvoor het geldt mooi noemen. Zijn alle getallen ≥ 1 mooi? We gebruiken weer volledige inductie. Is 1 mooi? Ja, want

$$\sum_{k=0}^{0} k=0=\tfrac{1}{2}1(1-1).$$

Laat n een mooi getal zijn. Is zijn opvolger dan ook mooi? Er geldt

$$\sum_{k=0}^{n} k = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right) + n.$$

Omdat we hebben verondersteld dat n mooi is, hebben we dus

$$\sum_{k=0}^{n} k = \tfrac{1}{2}n(n-1) + n = \tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{1}{2}n + n = \tfrac{1}{2}(n+1)n.$$

Dus is $n+1$, de opvolger van n, ook mooi.

Ieder mooi getal heeft dus een mooie opvolger. Uit het eerste principe van volledige inductie volgt dat alle getallen ≥ 1 mooi zijn.

Een **tweede manier** om het te bewijzen gaat zo (we noemen de som daarbij S):

$$\begin{array}{ccccccccc} S & = & 0 & + & 1 & + & \cdots & + & (n-1) \\ S & = & (n-1) & + & (n-2) & + & \cdots & + & 0 \\ \hline 2S & = & (n-1) & + & (n-1) & + & \cdots & + & (n-1) \end{array}$$

en dus $2S = n(n-1)$, ofwel $S = \frac{1}{2}n(n-1)$. Op deze manier is niet alleen de juistheid van de formule bewezen, maar wordt de formule zelfs gevonden.

2. Het tweede principe van volledige inductie

Het eerste principe komt er op neer dat als je wilt bewijzen dat alle getallen in $V = \{\, n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0 \,\}$ een bepaalde eigenschap hebben, je als volgt te werk kunt gaan:

> je gaat de eigenschap bewijzen voor een willekeurig getal in V met de aanname dat de eigenschap geldt voor de voorganger van dat getal, behalve als hij in V geen voorganger heeft (het getal n_0). In dat laatste geval moet je het apart bewijzen.

Hierbij is n aangeduid als de *voorganger* van $n+1$.

Het tweede principe is hierop een variatie. Om een eigenschap te bewijzen voor alle getallen in V is het voldoende om de eigenschap voor een willekeurig getal in V te bewijzen onder de aanname dat de eigenschap geldt voor alle kleinere getallen in V.

Stelling 2. (Het tweede principe van volledige inductie)
Gegeven is een eigenschap van getallen in $V = \{\, n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0 \,\}$ die we aanduiden met mooi en die voor iedere $n \in V$ voldoet aan:

> *zijn alle getallen in V kleiner dan n mooi, dan is n ook mooi.*

Dan is ieder getal in V mooi.

Bewijs: Noem een getal in V *lelijk* als het niet mooi is. We bewijzen dat er geen lelijke getallen zijn.

> Stel er zijn lelijke getallen. Laat n het kleinste lelijke getal zijn. Dan zijn alle getallen in V die kleiner zijn dan n mooi. Volgens het gegeven is n dan ook mooi. Tegenspraak.

Er zijn dus geen lelijke getallen. ■

Het gebruik van dit principe wordt geïllustreerd met twee voorbeelden.

Voorbeeld 3. We tonen met dit tweede principe aan dat iedere $n \in \mathbb{N}^*$ te ontbinden is als een product van een aantal priemfactoren. We spreken af dat 1 een product is van 0 priemgetallen en dat een priemgetal een product is van 1 priemgetal. We hebben

ontbinding	aantal priemfactoren	aantal priemdelers
$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 3299$	5	5
$3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 31$	6	3
17^{21}	21	1
31	1	1
1	0	0

Het is duidelijk dat als $a, b \in \mathbb{N}^*$ een priemfactorontbinding hebben, dat dat ook geldt voor ab. (Waarom is dat duidelijk?)

Laten we alle getallen in $\mathbb{N}^*$ die een priemfactorontbinding hebben wit noemen. We gaan bewijzen dat alle getallen in $\mathbb{N}^*$ wit zijn. (We nemen hier dus $n_0 = 1$.)

Laat voor een $n \in \mathbb{N}^*$ gelden dat alle kleinere natuurlijke getallen in $\mathbb{N}^*$ wit zijn. We bewijzen dat n dan ook wit is. We doen dit met gevalsonderscheiding.

1. n is een priemgetal. Dan heeft n een priemfactorontbinding met slechts 1 priemfactor. (Dat kleinere getallen wit zijn gebruiken we hier niet.) Dus n is wit.
2. $n = 1$. Het getal 1 is volgens afspraak wit.

3. n is geen priemgetal. Dan heeft n een deler d met $1 < d < n$, zeg $n = cd$. Dan ook $1 < c < n$. Omdat $c, d < n$, zijn beide wit en hebben dus een priemfactorontbinding. Maar dan heeft n ook een priemfactorontbinding en is dus ook wit.

In elk van de gevallen is n dus wit.

Uit het tweede principe van volledige inductie volgt dus dat alle getallen in $\mathbb{N}^*$ wit zijn.

▶ **Toelichting 3**

Voorbeeld 4. We tonen aan dat ieder natuurlijk getal binair te schrijven is, dat wil zeggen dat iedere $n \in \mathbb{N}$ te schrijven is als

$$n = c_0 + c_1 \cdot 2 + c_2 \cdot 2^2 + \cdots + c_r \cdot 2^r,$$

waarbij $c_j = 0$ of $c_j = 1$ voor $j = 0, \ldots, r$, of met de $\sum$-notatie:

$$n = \sum_{k=0}^{r} c_k \cdot 2^k.$$

We zijn gewend aan de tientallige (decimale) notatie van getallen. Hier staat dus dat het ook tweetallig (binair) kan. In de decimale notatie gebruikt men de symbolen $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. In de binaire alleen `0` en `1`. Voor 147 schrijf je dan

```
10011011
```

en dit betekent

$$1\cdot 2^0+1\cdot 2^1+0\cdot 2^2+1\cdot 2^3+1\cdot 2^4+0\cdot 2^5+0\cdot 2^6+1\cdot 2^7 = 2^0+2^1+2^3+2^4+2^7.$$

Laten we de natuurlijke getallen die binair te schrijven zijn mooi noemen. We bewijzen dat alle natuurlijke getallen mooi zijn.

Stel n is een natuurlijk getal en alle kleinere natuurlijke getallen zijn mooi. We bewijzen dat n mooi is. We onderscheiden drie gevallen.

1. n is even en $n > 0$. Dan is er een natuurlijk getal m met $n = 2m$. Omdat $n > 0$ geldt $0 < m < n$. Dus is m mooi, zeg

$$m = c_0 \cdot 2^0 + c_1 \cdot 2^1 + c_2 \cdot 2^2 + \cdots + c_r \cdot 2^r$$

met $c_0, \ldots, c_r \in \{0, 1\}$. Maar dan is n ook mooi:

$$n = 2(c_0 \cdot 2^0 + c_1 \cdot 2^1 + c_2 \cdot 2^2 + \cdots + c_r \cdot 2^r) \qquad = c_0 \cdot 2^1 + c_1 \cdot 2^2$$
$$= 0 \cdot 2^0 + c_0 \cdot 2^1 + c_1 \cdot 2^2 + c_2 \cdot 2^3 + \cdots + c_r \cdot 2^{r+1}.$$

2. n is oneven. Dan is er een natuurlijk getal m met $n = 2m + 1$. Omdat $m \leq 2m < 2m + 1 = n$ is m mooi. Verder als in het vorige geval.
3. $n = 0$. Dit geval is geen probleem: $0 = 0 \cdot 2^0$. Dus 0 is mooi.

In elk van de gevallen is m dus mooi.

Uit het tweede principe van volledige inductie volgt dus dat alle natuurlijke getallen mooi zijn.

▶ Toelichting 4

3. Sommen van machten van natuurlijke getallen

We hebben al een formule voor de som van de eerste n natuurlijke getallen. We gaan ook een formule afleiden voor de som van de kwadraten van de eerste n natuurlijke getallen. algemener definiëren we

Definitie 1. Zij $m \in \mathbb{N}$. We definiëren $S_m(n)$ als de som van de m-de machten van de eerste n natuurlijke getallen. Dus:

$$S_m(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k^m = 0^m + 1^m + 2^m + \cdots + (n-1)^m.$$

We hebben al bewezen dat $S_1(n) = \frac{1}{2}n(n-1)$ en wel op twee manieren. De eerste manier was een inductiebewijs. Bij de tweede manier hoefde je de formule niet te kennen; op die manier kon je hem juist vinden. We doen het op een derde manier. Deze manier heeft het voordeel dat je niet alleen een formule vindt maar dat je zo ook formules voor $S_m(n)$ kunt vinden voor hogere waarden van m.
De derde manier: Voor natuurlijke getallen k geldt $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$.

We schrijven dit op voor $k = 0, \ldots, n-1$:

$$\begin{aligned} 1^2 - 0^2 &= 2 \cdot 0 + 1 \\ 2^2 - 1^2 &= 2 \cdot 1 + 1 \\ &\vdots \\ (k+1)^2 - k^2 &= 2 \cdot k + 1 \\ &\vdots \\ n^2 - (n-1)^2 &= 2 \cdot (n-1) + 1 \end{aligned}$$

Links en rechts optellen geeft

$$n^2 = 2 \cdot S_1(n) + n,$$

ofwel

$$S_1(n) = \tfrac{1}{2}(n^2 - n) = \tfrac{1}{2}n(n-1).$$

We leiden nu een formule af voor de som van de kwadraten van de eerste n natuurlijke getallen. Om deze formule te vinden beginnen we als in het derde bewijs van de formule voor $S_1(n)$. Voor natuurlijke getallen k geldt

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1.$$

(Dit ga je eenvoudig na door in $(k+1)^3$ de haakjes uit te werken; merk daarbij op dat $(k+1)^3 = (k+1)(k+1)^2$.)

Dit schrijven we weer op voor $k = 0, \ldots, n-1$:

$$\begin{aligned} 1^2 - 0^2 &= 3 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + 1 \\ 2^2 - 1^2 &= 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 \\ &\vdots \\ (k+1)^2 - k^2 &= 3 \cdot k^2 + 3 \cdot k + 1 \\ &\vdots \\ n^2 - (n-1)^2 &= 3 \cdot (n-1)^2 + 3 \cdot (n-1) + 1 \end{aligned}$$

Links en rechts optellen geeft

$$n^3 = 3 \cdot S_2(n) + 3 \cdot S_1(n) + n,$$

en dus

$$3 \cdot S_2(n) = n^3 - \tfrac{3}{2}n(n-1) - n = \tfrac{1}{2}n(2n^2 - 3n + 3 - 2) = \tfrac{1}{2}n(n-1)(2n-1).$$

De formule wordt dus

$$S_2(n) = \tfrac{1}{6}n(n-1)(2n-1).$$

▶ **Toelichting 5**

Opgaven

1. Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen n geldt $7 \mid 12^n + 6 \cdot 5^n$.

2. Wat is er mis met de volgende redenering die moet aantonen dat alle mensen dezelfde kleur ogen hebben.

> We bewijzen met volledige inductie de uitspraak: ieder n-tal mensen (met $n \geq 1$) heeft dezelfde kleur ogen. Voor $n = 1$ is het duidelijk. Stel de uitspraak geldt voor een $n \geq 1$. We bewijzen dat hij dan ook geldt voor de opvolger van n. Nummer een $(n+1)$-tal mensen met 1 t/m $n+1$. De nummers 1 t/m n vormen een n-tal en hebben dus allen dezelfde kleur ogen. Hetzelfde geldt voor het n-tal genummerd van 2 t/m $n+1$. De nummers 2 t/m n maken deel uit van beide n-tallen. Dus heeft het $(n+1)$-tal mensen dezelfde kleur ogen. Met het eerste principe van volledige inductie volgt nu dat in iedere groep mensen alle mensen dezelfde kleur ogen hebben.

3. Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}^*$ geldt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

(Geef twee bewijzen: één met inductie en één door te gebruiken dat $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.)

4. Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}^*$ geldt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

5. Laat n een natuurlijk getal zijn met $n \geq 1$. Bewijs dat er natuurlijke getallen k en m bestaan zo dat $n = 3^k m$ en $3 \nmid m$.

6. Bepaal een formule voor $S_3(n)$, de som van de derdemachten van de eerste n natuurlijke getallen.

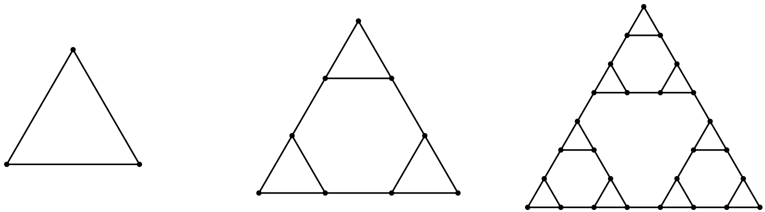
Opdrachten

Opdracht 1. Analyseer het volgende spel: twee spelers nemen om beurten 1, 2 of 3 lucifers van een hoopje lucifers. Wie de laatste lucifer pakt heeft gewonnen. Geef een strategie voor de eerste of tweede speler, afhankelijk van het aantal lucifers waarmee wordt begonnen. Bewijs de juistheid van de strategie.

Opdracht 2. **(Een nim-spel)** Analyseer het volgende spel voor twee spelers. Er wordt begonnen met vijf hoopjes lucifers van respectievelijk 1, 3, 5, 7 en 9 lucifers. Om beurten nemen de spelers een willekeurig aantal lucifers van één van de hoopjes. Wie de laatste lucifer pakt heeft verloren.

Opdracht 3. Van een puzzel als De Toren van Hanoi kun je een graaf maken. Een graaf heeft hoekpunten en ribben. Ribben zijn verbindingen tussen hoekpunten.

In de n-Hanoigraaf (= graaf van de toren van Hanoi met n schijven) stellen de hoekpunten de verschillende toestanden van de puzzel met n schijven voor. De ribben corresponderen met de toegestane zetten. Voor $n = 1, 2, 3$ krijg je de grafen:



We kunnen een toestand aangeven door van elk van de schijven op te schrijven op welke pin hij zich bevindt: pin `1`, pin `2` of pin `3`. We doen dat in de volgorde van groot naar klein:

`23112`

betekent dat in de puzzel met 5 schijven de grootste schijf zich op pin `2` bevindt, de op een na grootste op pin `3`, de middelste in grootte op pin `1`, de op een na kleinste op pin `1` en de kleinste op pin `2`.
Schrijf de toestanden bij de hoekpunten van de n-Hanoigraaf voor $n = 1, 2, 3$.
Hoe krijg je de $n+1$-Hanoigraaf uit de n-Hanoigraaf?
Hoeveel toestanden heeft de puzzel met n schijven?
Hoeveel ribben heeft de n-Hanoigraaf?
Kun je vanuit de normale begintoestand iedere andere positie bereiken?

Toelichtingen en hints

Toelichting 1.

Edouard Lucas (Amiens 1842 – Parijs 1891) is bekend geworden door zijn werk in de getaltheorie. Hij toonde aan dat $2^{127} - 1$ een priemgetal is: het grootste priemgetal dat ooit zonder hulp van computers is gevonden. Het is een voorbeeld van een Mersenne-getal. Voor zulke getallen had hij een test bedacht waarmee onderzocht kan worden of het priemgetallen zijn. Voor een biografie van Lucas zie The MacTutor History of Mathematics Archive.

Lucas is de uitvinder van de Toren van Hanoi. Deze puzzel liet hij in 1883 onder de naam N.CLAUS (DE SIAM), een anagram van LUCAS (D'AMIENS), verschijnen. Dat het spel uit het verre oosten komt heeft Lucas erbij verzonnen. Ook vermeldt hij dat in een tempel in Benares in India een versie van het spel zou zijn onder de naam Heilige Toren van Brahma. Een versie met 64 schijven. Monniken zouden hier onafgebroken mee bezig zijn. Als zij klaar zijn zou dat het einde van de wereld betekenen. (Als ze iedere seconde een schijf verplaatsen, wanneer is dan het einde van de wereld?) ◀

Toelichting 2. De puzzel is trouwens ook voor 0 schijven oplosbaar en wel in 0 zetten. We hadden hier eventueel ook $n_0 = 0$ kunnen nemen. ◀

Toelichting 3. Dit bewijs vertelt je hoe je in principe een priemfactorontbinding kunt vinden. Bijvoorbeeld: als je systematisch naar delers van 139 zoekt, zul je alleen 1 en 139 vinden. Daaruit volgt dat 139 een priemgetal is.

Zie je dat 7 een deler is van 147, dan geeft dat $147 = 7 \cdot 21$. Het probleem van het ontbinden van 147 is dan teruggebracht tot het ontbinden van 7 en 21. Voor deze kleinere getallen is het probleem eenvoudiger: 7 is een priemgetal en 21 is het product van 3 en 7. We hebben dan $147 = 3 \cdot 7^2$.

◀

Toelichting 4. Het gegeven bewijs geeft een manier om ieder natuurlijk getal binair te schrijven:

$$\begin{array}{rcrrcr}
147 & = & 2\cdot & 73 & + & 1 \\
73 & = & 2\cdot & 36 & + & 1 \\
36 & = & 2\cdot & 18 & + & 0 \\
18 & = & 2\cdot & 9 & + & 0 \\
9 & = & 2\cdot & 4 & + & 1 \\
4 & = & 2\cdot & 2 & + & 0 \\
2 & = & 2\cdot & 1 & + & 0 \\
1 & = & 2\cdot & 0 & + & 1
\end{array}$$

en dus

$$147 = \mathtt{10001011}.$$

Toelichting 5. Op deze manier is de formule dus gevonden en tegelijk ook bewezen. Is de formule (op wonderbaarlijke wijze of op grond van een vermoeden) gegeven, maar is er nog een bewijs nodig, dan kan dat eenvoudig met volledige inductie.

Bewijs met volledige inductie: Voor $n = 1$ gaat men eenvoudig na dat de formule klopt.

Stel $n \in \mathbb{N}^*$ zo dat $S_2(n) = \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$. Dan te bewijzen dat $S_2(n+1) = \frac{1}{6}(n+1)n(2n+1)$. Er geldt

$$S_2(n+1) = S_2(n) + n^2 = \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) + n^2 = \frac{1}{6}(n+1)n(2n+1).$$

Dus is de formule met het eerste principe van volledige inductie bewezen.

◀

Opgave 1. Bewijs dit met het eerste principe van volledige inductie. Gebruik voor de inductiestap: als $7 \mid 12^n + 6 \cdot 5^n$, dan $7 \mid 12^{n+1} + 12 \cdot 6 \cdot 5^n$.

Opgave 2. Klopt het bewijs van de inductiestap voor alle natuurlijke getallen n?

◀

Opgave 3. Gebruik het eerste principe van volledige inductie. Voor een tweede bewijs: kijk goed wat er allemaal wegvalt.

◀

Opgave 4. Gebruik het eerste principe van volledige inductie.

Opgave 5. Gebruik het tweede principe van volledige inductie. Voor welke getallen heb je voor het bewijs niet nodig dat de eigenschap voor kleinere getallen geldt? ◀

Opgave 6. Zie de berekening van $S_2(n)$ in de tekst. Gebruik nu

$$(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1.$$