K.U.N.
Subfaculteit Wiskunde

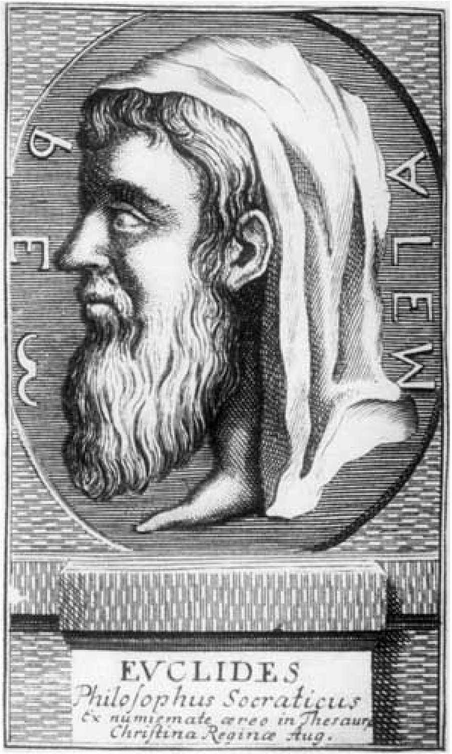
Cursus:

Wiskundig denken

Les 5:
Recursie

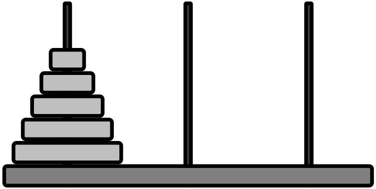
Frans Keune

 keune@sci.kun.nl
Laatste wijziging: 4 december 2001
Versie 1.0



Worden getallen a_n *(afhankelijk van* $n \in \mathbb{N}$*) gedefinieerd, dan kunnen in de definitie van* a_n *de getallen* a_k *voor* $k < n$ *voorkomen. Zo'n definitie noemt men een inductieve definitie. Men spreekt ook van recursie.*

1. De Toren van Hanoi



We komen nog even terug op de puzzel 'De toren van Hanoi'. We hebben al bewezen dat hij voor ieder aantal schijven oplosbaar is. Nu interesseren we ons voor het minimale aantal zetten dat nodig is voor de oplossing. Laten we met a_n het kleinste aantal zetten aangeven dat voor een oplossing nodig is in het geval van n schijven. Het bewijs zegt hoe uit een oplossing van de puzzel met n schijven een oplossing van de puzzel met $n+1$ schijven volgt: eerst a_n zetten om de bovenste n schijven op een andere pin te krijgen, vervolgens de grootste schijf verplaatsen en dan weer a_n zetten om de andere schijven op de grootste te krijgen. In totaal zijn dit $2a_n+1$ zetten. Is dit ook het kleinste benodigde aantal? Dat is inderdaad het geval. Om dit in te zien, kun je het best op de grootste schijf letten. Deze zal een keer verplaatst moeten worden en om dat mogelijk te maken zul je de andere n schijven eerst verplaatst moeten hebben: dat is de puzzel met n schijven. Nadat je de grootste op z'n plaats hebt, moet je nogmaals de puzzel met n schijven oplossen. De grootste schijf hoeft dus maar één keer verplaatst te worden. Conclusie: $a_{n+1} = 2a_n + 1$. We hebben dus

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = 2a_n + 1 \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Hiermee ligt de rij $a_0, a_1, a_2, \ldots$ vast: heb je een beginstuk $a_0, \ldots, a_n$ van de rij, dan weet je ook wat de volgende term in de rij is. Het is een manier om de rij vast te leggen, d.w.z. om hem te definiëren. We spreken van een *inductieve* of *recursieve* definitie. Willen we een indruk van de rij getallen krijgen, dan kunnen we een beginstuk uitrekenen:

n:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
a_n:	0	1	3	7	15	31	63	127	255	$\cdots$

▶ Toelichting 1

Het lijkt er sterk op dat voor alle natuurlijke getallen n geldt $a_n = 2^n - 1$; voor $n \leq 8$ klopt het. Laten we het bewijzen. Beschouw de rij $b_0, b_1, b_2, \ldots$ met $b_n = 2^n - 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Voor deze rij geldt:

- $b_0 = 2^0 - 1 = 0$.
- Laat n een natuurlijk getal zijn. Dan

$$2b_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1 = b_{n+1}.$$

  Dus: voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt $b_{n+1} = 2b_n + 1$.

De rij $b_0, b_1, b_2, \ldots$ voldoet dus aan de beschrijving waarmee de rij $a_0, a_1, a_2, \ldots$ is vastgelegd. Het is dus dezelfde rij, d.w.z. $a_n = b_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Het minimale aantal zetten dat nodig is voor de oplossing van de puzzel met n schijven is dus $2^n - 1$.

2. Rekenkundige en meetkundige rijen

Definitie 1. Gegeven zijn $a, v \in \mathbb{R}$. De rij $a_0, a_1, a_2, \ldots$ gedefinieerd door

$$\begin{cases} a_0 = a \\ a_{n+1} = a_n + v \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

heet een *rekenkundige* rij. Het getal v heet het *verschil* van de rekenkundige rij.

Het is niet moeilijk om een formule voor de n-de term van een rekenkundige rij te vinden: $a_n = a + nv$. Voor het bepalen van een formule voor de *somrij* $s_0, s_1, s_2, \ldots$ met

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

van deze rekenkundige rij kunnen we te werk gaan als in de vorige les bij $S_1(n)$:

$$\begin{array}{ccccccccc} s_n & = & a & + & a+v & + & \cdots & + & a+nv \\ s_n & = & a+nv & + & a+(n-1)v & + & \cdots & + & a \\ \hline 2s_n & = & 2a+nv & + & 2a+nv & + & \cdots & + & 2a+nv \end{array}$$

Dus $s_n = \frac{1}{2}(n+1)(2a+nv) = \frac{1}{2}(n+1)(a_0+a_n)$, de helft van het aantal termen maal de som van de begin- en eindterm.

Definitie 2. Gegeven zijn $a, r \in \mathbb{R}$. De rij $a_0, a_1, a_2, \ldots$ gedefinieerd door

$$\begin{cases} a_0 = a \\ a_{n+1} = ra_n \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

heet een *meetkundige* rij. Het getal r heet de *reden* van de meetkundige rij.

Ook hier is het niet moeilijk een formule te geven voor de n-de term:

$$a_n = ar^n \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N}.$$

Een formule voor de somrij is in dit geval met een kleine handigheid makkelijk te bepalen:

$$\begin{array}{rcccccccccccc} s_n & = & a & + & ar & + & ar^2 & + & \cdots & + & ar^n & & \\ rs_n & = & & & ar & + & ar^2 & + & \cdots & + & ar^n & + & ar^{n+1} \\ \hline s_n - rs_n & = & a & & & & & & & & & - & ar^{n+1} \end{array}$$

Dus

$$(1-r)s_n = a(1-r^{n+1})$$

en als $r \neq 1$, dan

$$s_n = a\frac{1-r^{n+1}}{1-r}.$$

3. Fibonaccigetallen

We definiëren de *Fibonaccigetallen* $f_0, f_1, f_2, \ldots$. Deze vormen een rij getallen die wordt gegeven door een recursieve definitie:

$$\begin{cases} f_0 = 0 \\ f_1 = 1 \\ f_{n+2} = f_n + f_{n+1} & \text{voor alle } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Dus: een volgende term in de rij is de som van de laatste twee termen; zijn er geen laatste twee termen, dan is er een aparte beschrijving. De rij wordt dus gevormd door met 0 en 1 te beginnen en vervolgens steeds de som van de laatste twee termen te nemen. Het is makkelijk om termen één voor één te berekenen:

n:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\cdots$
f_n:	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	$\cdots$

De Fibonaccigetallen zijn genoemd naar ***Fibonacci*** *(Pisa(?) 1170 – Pisa(?) 1250), wiens echte naam* ***Leonardo Pisano*** *was. Hij heeft er veel toe bijgedragen de wiskunde in Europa weer tot leven te brengen. Hij is nu nog bekend door de Fibonaccigetallen die hij in zijn zijn boek* Liber abaci *had beschreven. In dat boek introduceerde hij ook de decimale schrijfwijze van getallen in Europa. Deze schrijfwijze is afkomstig uit India en de Arabische wereld.*

De Fibonaccigetallen zijn recursief gedefinieerd. We zullen van deze getallen ook een niet-recursieve beschrijving geven. D.w.z. we geven een *directe* formule voor het n-de Fibonacci-getal. Heb je al de formule, dan kun je laten zien dat hij aan de gestelde eisen voldoet en zo aantonen dat hij juist is. We zullen hier een manier aangeven om de formule te vinden. We beschouwen alle rijen $a = (a_n)$ waarvoor iedere term de som is van de twee voorgaande, als die er zijn:

$$V = \{\, a \in \mathcal{R}(\mathbb{R}) \mid a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \text{ voor alle } n \in \mathbb{N}\,\}.$$

(Met de notatie $\mathcal{R}(A)$ geven we de verzameling van alle rijen in een verzameling A aan.) Belangrijke constateringen zijn:

- Als $a, b \in V$, dan is ook de som $a + b$ van deze rijen in V. Met $a + b$

bedoelen we de rij met $(a+b)_n = a_n + b_n$.

- Als $a \in V$ en $r \in \mathbb{R}$, dan is ook de rij ra in V. Met ra bedoelen we de rij met $(ra)_n = ra_n$.

Een rij van V wordt bepaald door de met 0 en 1 genummerde termen. Hebben we elementen van V (dat zijn rijen in A) gevonden, dan kunnen we nieuwe rijen maken met hetgeen we hierboven geconstateerd hebben. We gaan meetkundige rijen zoeken die element van V zijn. We kunnen wel aannemen dat de 0-de term 1 is. Zo'n rij heeft dan de gedaante

$$a_n = r^n.$$

Stel a is zo'n rij, dan geldt voor iedere $n \in \mathbb{N}$ dat $r^{n+2} = r^n + r^{n+1}$ en in het bijzonder dat $r^2 - r - 1 = 0$. We vinden dus dat de rijen a en b met $a_n = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})^n$ en $b_n = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5})^n$ elementen van V zijn. We hebben

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5}, \quad b_0 = 1, \quad b_1 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$

en vinden de rij van de Fibonaccigetallen als combinatie van a en b, zeg $f = xa + yb$, waarbij $x, y \in \mathbb{R}$ zo dat

$$\begin{cases} xa_0 + yb_0 = 0 \\ xa_1 + yb_1 = 1, \end{cases}$$

ofwel

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 0 \\ (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})x & + & (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5})y & = & 1. \end{array} \right.$$

Oplossen geeft $x = \frac{1}{\sqrt{5}} = -y$, en dus voor alle $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n = \frac{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})^n - (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5})^n}{\sqrt{5}}.$$

Dit zijn natuurlijke getallen, maar in de formule komen ook andere getallen voor.

4. Aantal rangschikkingen

Zijn $a_1, a_2, \dots, a_n$ elementen van een verzameling A, dan noemen we $a_1, a_2, \dots, a_n$ (in deze volgorde) een rijtje van lengte n in de verzameling A. Zo is $2, 1, 3, 4, 3$ een rijtje van lengte 5 in $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Een rijtje van lengte 0 noemen we een leeg rijtje.

Definitie 3. Laat A een eindige verzameling zijn van n elementen. Onder een *rangschikking* van A verstaan we een rijtje $a_1, \dots, a_n$ van lengte n waarvoor geldt: $a_i \neq a_j$ voor alle i, j met $i \neq j$.

▶ Toelichting 2

Laat r_n het aantal rangschikkingen van de verzameling $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$ zijn. De verzameling A_n heeft n elementen. We spreken af dat $A_0 = \emptyset$, dan heeft A_0 dus inderdaad 0 elementen. Er is slechts één rangschikking van A_0: het lege rijtje. Er is een verband tussen r_{n+1} en r_n. Een rangschikking van A_{n+1} krijg je uit een rangschikking van A_n door het extra getal

$n+1$ er aan toe te voegen. Dat kan op $n+1$ verschillende plaatsen. Dus $r_{n+1} = (n+1)r_n$. Dus liggen de aantallen r_n vast door

$$\begin{cases} r_0 = 1 \\ r_{n+1} = (n+1)r_n \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Deze getallen treden vaak op en zoals bekend hebben ze een aparte naam:

Definitie 4. De natuurlijke getallen $n!$, waarbij $n \in \mathbb{N}$, zijn recursief gedefinieerd door

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = (n+1) \cdot n! \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

('$n!$' wordt uitgesproken als 'n faculteit'.)

Dus bijvoorbeeld $5! = 5 \cdot 4! = 5 \cdot 4 \cdot 3! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. We hebben:

n:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
$n!$:	1	1	2	6	24	120	720	5040	40320	$\cdots$

We schrijven vaak gewoon $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$. Algemener hebben we:

Definitie 5. Laat A een verzameling zijn en k een natuurlijk getal. We zeggen dat een rijtje $a_1, \ldots, a_k$ in A van lengte k *zonder herhalingen* is als geldt: $a_i \neq a_j$ voor alle i, j met $i \neq j$.

Het is niet moeilijk om af te leiden dat het aantal rijtjes zonder herhalingen in $\{1, 2, \ldots, n\}$ van lengte k gelijk is aan

$$n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

5. De driehoek van Pascal

Definitie 6. Laten n en k natuurlijke getallen zijn met $k \leq n$. We geven met $\mathcal{P}_{n,k}$ de verzameling aan die bestaat uit de deelverzamelingen van $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ met k elementen, dus:

$$\mathcal{P}_{n,k} = \{\, U \mid U \subseteq A_n \text{ en } \#(U) = k \,\}.$$

We definiëren

$$\binom{n}{k}$$

als het aantal elementen van $\mathcal{P}_{n,k}$, dus als het aantal deelverzamelingen met k elementen van de verzameling $\{1, 2, \ldots, n\}$. Dit getal heet een *binomiaalcoëfficiënt*.

Er zijn $\frac{n!}{(n-k)!}$ rijtjes zonder herhalingen van lengte k in A_n. Elk van deze rijtjes bepaalt een deelverzameling met k elementen en elk van deze deelverzamelingen komt van $k!$ rijtjes, want dat is het aantal rangschikkingen van de elementen van de deelverzameling. We hebben dus:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

▶ Toelichting 3

Laat k een natuurlijk getal zijn zo dat $0 < k < n$. (Dus $n \geq 2$.) We kunnen twee soorten deelverzamelingen van A_n met k elementen onderscheiden.

1. Deelverzamelingen U met $n \in U$.
2. Deelverzamelingen U met $n \notin U$.

Deelverzamelingen van de eerste soort corresponderen met deelverzamelingen van A_{n-1} met $k-1$ elementen. Daarvan zijn er $\binom{n-1}{k-1}$. Deelverzamelingen van de tweede soort zijn deelverzamelingen van A_{n-1} met k elementen en daarvan zijn er $\binom{n-1}{k}$. We hebben dus afgeleid:

Propositie 1. *Laten n en k natuurlijke getallen zijn met $0 < k < n$. Dan*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Andere eigenschappen zijn:

Propositie 2. *Laten n en k natuurlijke getallen zijn met $k \leq n$. Dan:*

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad en \qquad \binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}.$$

BEWIJS: Dit volgt uit:

1. De lege deelverzameling van A_n is de enige met 0 elementen.
2. A_n is de enige deelverzameling van A_n met n elementen.
3. Deelverzamelingen U van A_n met k elementen corresponderen met deelverzamelingen V van A_n met $n-k$ elementen: neem

$$V = \{\, a \in A_n \mid a \notin U \}.$$

■

▶ Toelichting 4

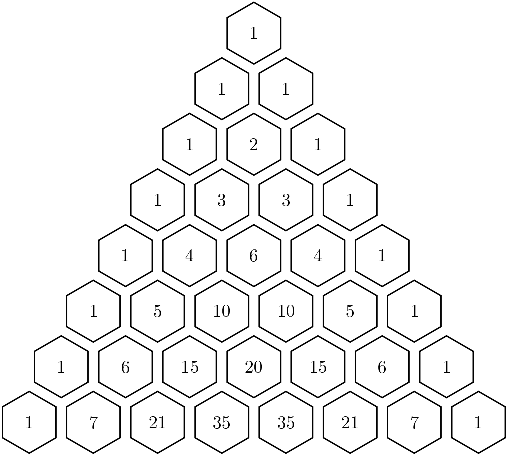
We kunnen de getallen overzichtelijk weergeven in een driehoekig diagram, de *driehoek van Pascal*:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
&&&&&&&\binom{0}{0}&&&&&&& \\
&&&&&&\binom{1}{0}&&\binom{1}{1}&&&&&& \\
&&&&&\binom{2}{0}&&\binom{2}{1}&&\binom{2}{2}&&&&& \\
&&&&\binom{3}{0}&&\binom{3}{1}&&\binom{3}{2}&&\binom{3}{3}&&&& \\
&&&\binom{4}{0}&&\binom{4}{1}&&\binom{4}{2}&&\binom{4}{3}&&\binom{4}{4}&&& \\
&&\binom{5}{0}&&\binom{5}{1}&&\binom{5}{2}&&\binom{5}{3}&&\binom{5}{4}&&\binom{5}{5}&& \\
&\binom{6}{0}&&\binom{6}{1}&&\binom{6}{2}&&\binom{6}{3}&&\binom{6}{4}&&\binom{6}{5}&&\binom{6}{6}& \\
\binom{7}{0}&&\binom{7}{1}&&\binom{7}{2}&&\binom{7}{3}&&\binom{7}{4}&&\binom{7}{5}&&\binom{7}{6}&&\binom{7}{7}
\end{array}
$$

etc.

Met behulp van de Proposities 1 en 2 is de driehoek eenvoudig rij voor rij in te vullen. Je kunt het zien als een recursieve definitie voor de rij van rijen van de driehoek.

Je kunt de aantallen opvatten als het aantal wegen in de volgende figuur van boven naar beneden die in het bovenste vakje beginnen. Het aantal wegen naar een vakje is immers gelijk aan de som van de aantallen wegen naar de vakjes die er onmiddellijk boven liggen.



Een weg ontstaat door herhaald voor links of rechts te kiezen: ga je een vakje naar beneden, dan heb je steeds de keuze tussen een linker en een rechter vakje. In welke rij je zo terecht komt hangt af van het aantal keuzes voor links of rechts. Na n keuzes kom je in rij nummer n. Heb je op een totaal van n keuzes k keer voor rechts gekozen, dan kom je in het vakje

(n, k). De wegen naar dit vakje corresponderen dus met deelverzamelingen van $\{1, 2, \ldots, n\}$ met k elementen.

Blaise Pascal *(Clermont 1623 – Parijs 1662) was een Frans wiskundige die zich in zijn jeugd al bezig hield met het mechanisch optellen van getallen. De apparaten die hij bouwde zijn te beschouwen als voorlopers van de computer. De driehoek van Pascal is naar hem genoemd, maar was overigens al eeuwen bekend. Wel gebruikte Pascal de driehoek in verband met de kansrekening en heeft hij eigenschappen ervan afgeleid. Daarbij had hij een heldere manier van redeneren, hoewel hij liever woorden dan formules gebruikte. Verder heeft hij bijgedragen aan de projectieve meetkunde. In de driehoek van Pascal zullen we nog veel regelmatigheden ontdekken. Zo kun je bijvoorbeeld voor deze eerste rijen constateren dat de som in elke rij gelijk is aan* 2^n, *waarbij* n *het rijnummer is. Dit is het totale aantal deelverzamelingen van een verzameling met* n *elementen. In de rij staan deze aantallen verder uitgesplitst naar het aantal elementen van de deelverzamelingen.*

Opgaven

1. De rij $a_0, a_1, a_2, \ldots$ van natuurlijke getallen is gedefinieerd door

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = 9a_n + 4 \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Bewijs dat $a_n = \frac{9^n - 1}{2}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

2. Wat valt je op bij de somrij $s_n = f_0 + f_1 + \cdots + f_n$ van de rij van Fibonaccigetallen? Bewijs het.

3. De rij $l_0, l_1, l_2, \ldots$ van de zogeheten *Lucas-getallen* is gedefinieerd door

$$\begin{cases} l_0 = 2 \\ l_1 = 1 \\ l_{n+2} = l_n + l_{n+1} \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Vind een directe formule voor l_n. Wat is het verband met de Fibonaccigetallen?

4. Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}^*$ geldt $f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n$.
(f_n is het n-de Fibonaccigetal.)

5. De getallen $g_0, g_1, g_2, \ldots$ zijn recursief gedefinieerd door:

$$\begin{cases} g_0 = 1 \\ g_1 = 5 \\ g_{n+2} = g_n + 2g_{n+1} \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Geef een directe formule voor g_n.

6. Bewijs Propositie 1 en Propositie 2 met behulp van de formule $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

7. Bepaal

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \quad \text{en} \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k},$$

de som en de 'alternerende' som van de binomiaalcoëfficiënten in de n-de rij van de driehoek van Pascal.

8. Bewijs dat er (bij vaste $n \in \mathbb{N}$) voor de getallen $S_m(n)$ de volgende recursieve beschrijving is:

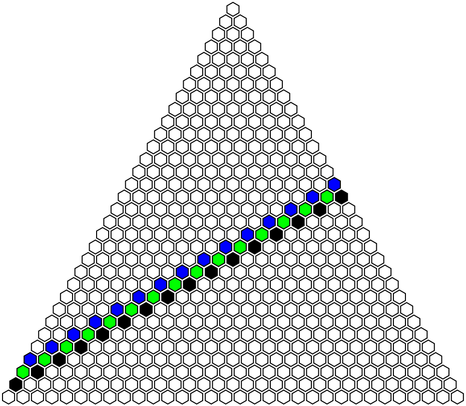
$$\begin{cases} S_0(n) = n \\ S_{m+1}(n) = \frac{1}{m+2}\left(n^{m+2} - \sum_{k=0}^{m} \binom{m+2}{k} S_k(n)\right) \quad \text{voor alle } m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Opdrachten

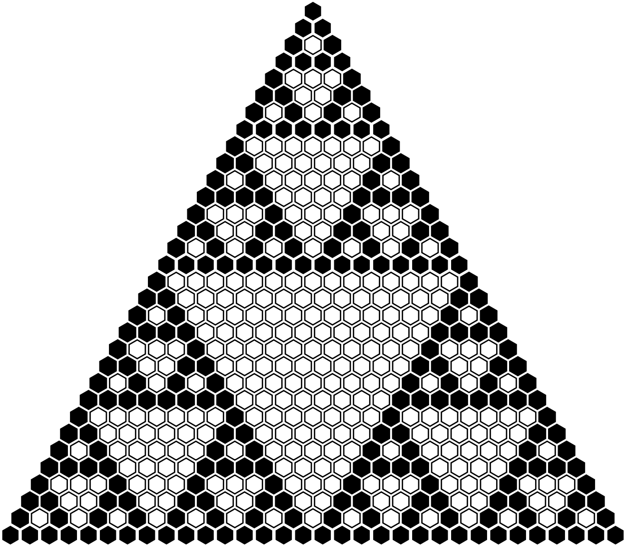
Opdracht 1. Leid de volgende betrekking tussen Fibonaccigetallen en binomiaalcoëfficiënten:

$$f_{n+1} = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n-k}{k}$$

voor alle $n \in \mathbb{N}$. (Met $[x]$ bedoelen we het grootste gehele getal $\leq x$.) Aanwijzing:



Opdracht 2. Kleur je in de driehoek van Pascal de oneven getallen zwart en de even getallen wit, dan ontstaat er het volgende patroon:



Hoe is aan de getallen n, k direct te zien dat $\binom{n}{k}$ oneven is? Geef er een bewijs van. (Aanwijzing: de binaire schrijfwijze van k en $n - k$.)

Toelichtingen en hints

Toelichting 1. Dat er maar één rij getallen a_n is die voldoet aan

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = 2a_n + 1 \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

is met volledige inductie eenvoudig te bewijzen. In dit geval kun je het eerste principe gebruiken.

Stel je hebt ook een rij $c_0, c_1, c_2, \cdots$ met

$$\begin{cases} c_0 = 0 \\ c_{n+1} = 2c_n + 1 \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Dan $a_0 = 0 = c_0$.

Stel voor een $n \in \mathbb{N}$ geldt $a_n = c_n$. Dan $a_{n+1} = 2a_n + 1 = 2c_n + 1 = c_{n+1}$.

Dus voor alle n met $a_n = c_n$ geldt ook $a_{n+1} = c_{n+1}$. Uit het eerste principe van volledige inductie volgt dan dat $a_n = c_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

De rij a_n met

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = 2a_n + 1 \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

is dus uniek. ◀

Toelichting 2. De verzameling $\{1, 2, 3\}$ heeft in totaal 6 rangschikkingen:

$$1, 2, 3 \quad 1, 3, 2 \quad 2, 1, 3 \quad 2, 3, 1 \quad 3, 1, 2 \quad 3, 2, 1$$

De verzameling $\{1, 2, 3, 4\}$ heeft er 24. ◀

Toelichting 3. Een deelverzameling U van $\{1, 2, \dots, n\}$ kun je laten corresponderen met een rij nullen en enen: deze nullen en enen geven van de getallen 1 t/m n dan achtereenvolgens aan of ze niet of wel tot de deelverzameling U behoren. De deelverzameling $\{3, 4, 6\}$ van $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ correspondeert dan met `0011010`. Het getal $\binom{n}{k}$ is dus ook te beschrijven als het aantal rijtjes van lengte n in $\{0, 1\}$ bestaande uit k enen en $n-k$ nullen.

De getallen $\binom{n}{k}$ heten binomiaalcoëfficiënten omdat ze optreden als coëfficiënten als je het 'binomium' $(a+b)^n$ uitwerkt:

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 \cdot a^0 b^0 \\
(a+b)^1 &= 1 \cdot a^1 b^0 + 1 \cdot a^0 b^1 \\
(a+b)^2 &= 1 \cdot a^2 b^0 + 2 \cdot a^1 b^1 + 1 \cdot a^0 b^2 \\
(a+b)^3 &= 1 \cdot a^3 b^0 + 3 \cdot a^2 b^1 + 3 \cdot a^1 b^2 + 1 \cdot a^0 b^3 \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

In het algemeen geldt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

de zogeheten **binomiaalformule van Newton**. Deze is met inductie te bewijzen. Ook is hij in te zien door te bedenken dat, als je $(a+b)^n$ uitwerkt, ofwel

$$(a+b)(a+b)(a+b)\cdots(a+b),$$

uitvermenigvuldigt, je termen van de vorm $a^{n-k}b^k$ krijgt door bij k van de factoren de b te kiezen (en dus $n-k$ keer de a). Het aantal keren dat de term $a^{n-k}b^k$ optreedt, is dus gelijk aan het aantal deelverzamelingen met k elementen van een verzameling met n elementen. ◀

Toelichting 4. Merk op dat bovenstaande proposities ook makkelijk zijn af te leiden uit de formule $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Ook met de beschrijving van $\binom{n}{k}$ als het aantal rijtjes van lengte n bestaande uit k enen en $n-k$ nullen zijn ze eenvoudig in te zien. ◀

Opgave 1. Toon aan dat de rij getallen $\frac{9^n-1}{2}$ aan dezelfde beschrijving voldoet als die waarmee de rij van de getallen a_n is vastgelegd.

◀

Opgave 2. Bereken eerst s_n voor een aantal kleine waarden van n.

Opgave 3. We hebben een algemene formule afgeleid voor rijen (a_n) die voldoen aan $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$. Vind de formule voor l_n op dezelfde wijze als de formule voor de Fibonaccigetallen gevonden is.

◀

Opgave 4. Vervang in het linkerlid f_{n+1} en één factor f_n van f_n^2 door respectievelijk $f_{n-1} + f_n$ en $f_{n-2} + f_{n-1}$. Geef een inductiebewijs.

Opgave 5. Als bij de Fibonaccigetallen: probeer eerst meetkundige rijen (r^n) die voldoen aan het gegeven verband tussen drie opeenvolgende termen.

◀

Opgave 6. Voor het bewijs van Propositie 1: vereenvoudig het rechter lid door de twee breuken onder één noemer te brengen.

◀

Opgave 7. De eerste som geeft het totale aantal deelverzamelingen van $\{1, 2, \ldots, n\}$. Gebruik Propositie 1 voor de tweede som. Of: gebruik in beide gevallen de binomiaalformule van Newton en kies daarbij geschikte getallen a en b.

◀

Opgave 8. Gebruik de methode uit de vorige les in combinatie met de binomiaalformule.