K.U.N.
Subfaculteit Wiskunde

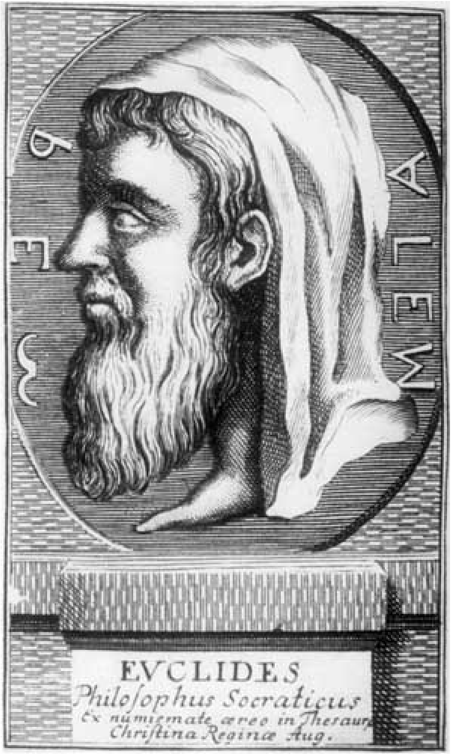
Cursus:

Wiskundig denken

Les 6:

Catalangetallen

Frans Keune

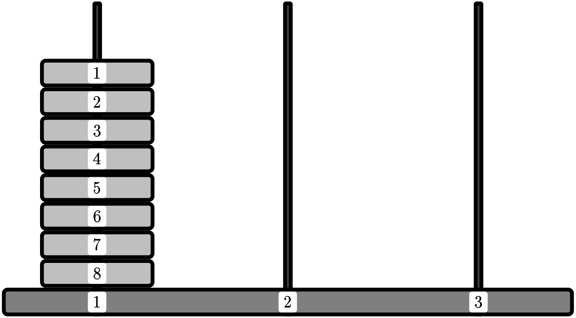


Laatste wijziging: 11 december 2001
Versie 1.0

Catalangetallen treden in de wiskunde bij veel telproblemen op. We laten zien waar ze optreden en leiden er formules voor af, recursieve en directe.

1. Stacks

Een *stack* is een belangrijke datastructuur in de informatica. Er kunnen data in worden opgeslagen met de beperking dat toevoegingen en weglatingen slechts aan één uiteinde van de stack (de zogeheten *top*) kunnen plaatsvinden. We gaan de getallen 1 t/m n in die volgorde op een stack plaatsen en gaan het aantal volgordes tellen waarmee ze de stack kunnen verlaten. We beschrijven dat met schijven genummerd van 1 t/m n. Deze staan hieronder op pin 1:



Pin 2 is de stack waar de schijven één voor één op komen door ze van pin 1 naar pin 2 te verplaatsen. Staan er schijven op pin 2, dan kan de bovenste van deze schijven de pin verlaten. We plaatsen hem dan op pin 3 zodat op deze pin de schijven van onderen naar boven gerangschikt zijn in de volgorde waarin ze de stack (pin 2) hebben verlaten. Ze vormen daar een rangschikking van $\{1, \ldots, n\}$. Hoeveel van deze rangschikkingen kunnen zo ontstaan?

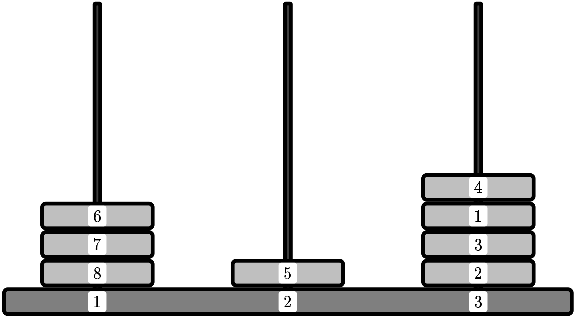
Een eindtoestand wordt bereikt na precies $2n$ zetten. Om iedere tussentijdse toestand en iedere eindtoestand te beschrijven kun je de 'geschiedenis' geven die tot die toestand heeft geleid. Er zijn twee typen zetten:

- type `0` waarbij een schijf van pin 1 naar pin 2 wordt verplaatst; dit is het plaatsen van een getal op de stack,
- type `1` waarbij een schijf van pin 2 naar pin 3 wordt verplaatst; dit is het verwijderen van een getal van de stack.

Met een rijtje van nullen en enen kan dan aangegeven worden welke zetten er zijn gedaan en ook in welke volgorde. Het rijtje

`001011010`

geeft dan aan dat er eerst twee keer een schijf van pin 1 naar pin 2 is verplaatst, dan een van 2 naar 3, een van 1 naar 2, twee van 2 naar 3, een van 1 naar 2, een van 2 naar 3 en tenslotte een van 1 naar 2. Het aantal nullen geeft aan hoeveel getallen er op de stack werden geplaatst, het aantal enen hoeveel er van de stack zijn verwijderd. Het gegeven rijtje beschrijft de toestand



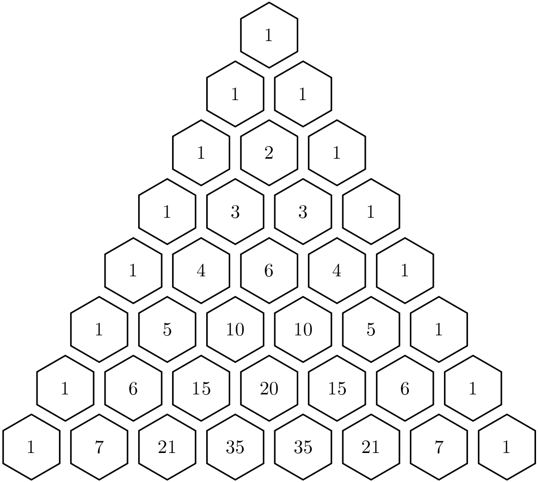
Het verschil tussen het aantal nullen en het aantal enen is het aantal schijven op pin 2. Het aantal enen is dus hoogstens gelijk aan het aantal nullen. Dat geldt voor iedere tussentoestand. Een rijtje nullen en enen beschrijft dus alleen een toestand als in ieder beginstuk van het rijtje het aantal enen hoogstens gelijk is aan het aantal nullen. Zo'n rijtje zullen we *toegestaan* rijtje noemen. Het gegeven rijtje is toegestaan, want de beginstukken zijn

`0` `00` `001` `0010` `00101` `001011` `0010110` `00101101` `001011010`

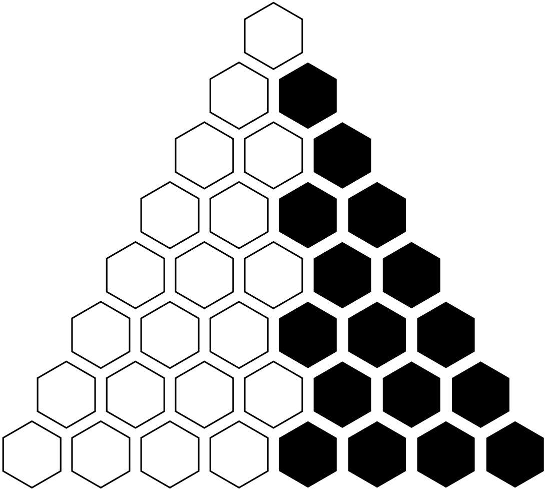
en voor deze rijtjes geldt dat het aantal enen hoogstens gelijk is aan het aantal nullen. Het aantal eindtoestanden is gelijk aan het aantal toegestane rijtjes van lengte $2n$. Het probleem van het aantal mogelijke rangschikkingen op pin 3 is daarmee vertaald in het probleem: hoeveel toegestane rijtjes van lengte $2n$ zijn er?

2. Aantallen toegestane rijtjes

De binomiaalcoëfficiënt $\binom{n}{k}$ is het aantal rijtjes nullen en enen van lengte n met precies k enen. Zo'n rijtje bepaalt een weg in de figuur



van vakje $(0,0)$ naar vakje (n,k) (vakje k in rij n). Het getal $\binom{n}{k}$ is het aantal wegen van $(0,0)$ naar (n,k). Toegestane wegen gaan alleen via de vakjes aan de linker kant, inclusief de vakjes in het midden. Deze wegen gaan alleen door de witte vakjes van:



Voor het aantal toegestane rijtjes van lengte n met k enen voeren we een notatie in:

Definitie 1. Laten n en k natuurlijke getallen zijn met $k \leq [\frac{n}{2}]$. Dan definiëren we

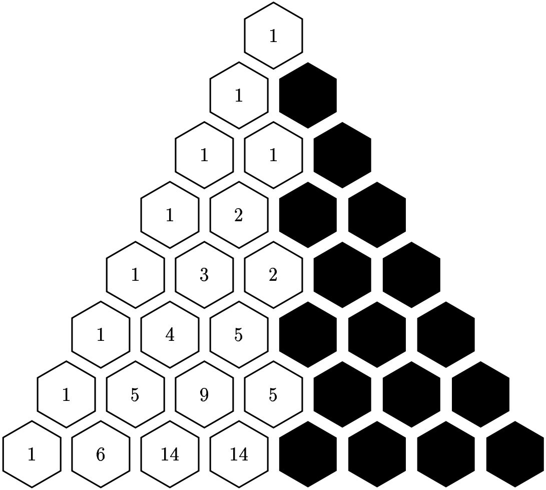
$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle$$

als het aantal rijtjes in $\{0, 1\}$ van lengte n waarvan precies k termen gelijk zijn aan 1 en waarvan ieder beginstuk minstens zoveel termen 0 heeft als termen 1. Het n-de *Catalangetal* is het getal

$$c_n = \left\langle {2n \atop n} \right\rangle.$$

Eugène Charles Catalan *(Brugge 1814 – Luik 1894) is bekend geworden door deze naar hem genoemde getallen. Bij Catalan ging het om het aantal manieren waarop je in een uitdrukking haakjes kunt plaatsen. Een product* abc *kun je zien als* $(ab)c$ *en als* $a(bc)$*. Bij 4 factoren kan het op 5 manieren:* $(a(bc))d$, $((ab)c)d$, $(ab)(cd)$, $a((bc)d)$ *en* $a(b(cd))$*. Bij een product met* $n+1$ *factoren kan het op* c_n *manieren.*

De aantallen $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ kun je net zo berekenen als de binomiaalcoëfficiënten:



De getallen $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ liggen namelijk vast door:

$$\begin{cases} \left\langle {n \atop 0} \right\rangle = 1 & \text{voor alle } n \in \mathbb{N} \\ \left\langle {2n \atop n} \right\rangle = \left\langle {2n-1 \atop n-1} \right\rangle & \text{voor alle } n \in \mathbb{N}^* \\ \left\langle {n \atop k} \right\rangle = \left\langle {n-1 \atop k-1} \right\rangle + \left\langle {n-1 \atop k} \right\rangle & \text{voor alle } n, k \in \mathbb{N} \text{ met } 0 < k < [\frac{n}{2}], \end{cases}$$

d.w.z. in ieder vakje is het getal gelijk aan de som van de getallen in de vakjes die er onmiddellijk boven liggen. Door een aantal van de getallen $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ op deze manier uit te rekenen kun je de volgende stelling gaan vermoeden:

Stelling 1. *Laten n en k natuurlijke getallen zijn met $0 < k < [\frac{n}{2}]$. Dan*

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \binom{n}{k} - \binom{n}{k-1}.$$

Bewijs: We schrijven

$$c(n,k) = \begin{cases} \binom{n}{k} - \binom{n}{k-1} & \text{als } 0 < k < [\frac{n}{2}] \\ 1 & \text{als } k = 0, \end{cases}$$

en laten zien dat deze getallen voldoen aan de regels waarmee de Catalan-getallen zijn vastgelegd:

- $c(n,0) = 1$ per definitie.

- Voor $n \in \mathbb{N}^*$ hebben we

$$\begin{aligned}
c(2n,n) &= \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} \\
&= \binom{2n-1}{n-1} + \binom{2n-1}{n} - \binom{2n-1}{n-2} - \binom{2n-1}{n-1} \\
&= \binom{2n-1}{n} - \binom{2n-1}{n-2} = \binom{2n-1}{n-1} - \binom{2n-1}{n-2} \\
&= c(2n-1,n-1).
\end{aligned}$$

- Voor $n, k \in \mathbb{N}$ met $0 < k < [\frac{n}{2}]$ geldt:

$$\begin{aligned}
&c(n-1,k-1) + c(n-1,k) \\
&\qquad = \binom{n-1}{k-1} - \binom{n-1}{k-2} + \binom{n-1}{k} - \binom{n-1}{k-1} \\
&\qquad = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} - \binom{n-1}{k-2} - \binom{n-1}{k-1} \\
&\qquad = \binom{n}{k} - \binom{n}{k-1} = c(n,k).
\end{aligned}$$

■

In het bijzonder hebben we nu een formule voor het n-de Catalangetal:

Stelling 2. *Zij $n \in \mathbb{N}$. Dan*

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

BEWIJS: Uit de vorige stelling volgt

$$\begin{aligned} c_n &= \left\langle {2n \atop n} \right\rangle = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} \\ &= \binom{2n}{n} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \binom{2n}{n} - \frac{n}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \end{aligned}$$

■

Het aantal rangschikkingen op pin 3 bij n schijven is dus gelijk aan $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

3. Een directe manier

Het aantal $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ van toegestane rijtjes nullen en enen van lengte n met k enen kun je ook rechtstreeks bepalen door op een slimme manier het aantal niet-toegestane rijtjes te tellen. Dat aantal moet gelijk zijn aan $\binom{n}{k-1}$. Hoe is dat in te zien?

Laat $c_1c_2c_3\ldots c_n$ een niet-toegestaan rijtje zijn met k enen, waarbij $0 < k < [\frac{n}{2}]$. Dan zijn er getallen m met $0 < m \leq n$ zo dat $c_1c_2\ldots c_m$ een niet-toegestaan rijtje is (bijvoorbeeld $m = n$). Laat nu m met $0 < m \leq n$ het kleinst zijn zo dat het beginstuk van lengte m niet-toegestaan is. Voor dit beginstuk geldt dan dat het met een `1` eindigt en dat het aantal enen 1 groter is dan het aantal nullen. Bijvoorbeeld

`0100111110000000001011111100000`

is een niet-toegestaan rijtje van lengte 31 en het kleinste niet-toegestane beginstuk is

`0100111`

Vervang nu in het kleinste niet-toegestane beginstuk alle nullen door enen en alle enen door nullen De rest laten we ongewijzigd. In het voorbeeld krijg je dan

`1011000110000000001011111100000.`

Het zo verkregen rijtje is een rijtje van lengte n met $k-1$ enen. Van zulke rijtjes zijn er $\binom{n}{k-1}$. Elk van deze rijtjes wordt op deze manier verkregen uit een niet-toegestaan rijtje van lengte n met k enen. Dat is als volgt in te zien. Als je een rijtje van lengte n hebt met $k-1$ enen, dan heeft het minder enen dan nullen en is er dus een kleinste beginstuk met minder enen dan nullen. Vervang in dit beginstuk de enen door nullen en de nullen door enen. Dat levert een niet-toegestaan rijtje van lengte n met k enen. Het is eenvoudig in te zien dat zo niet-toegestane rijtjes van lengte n met k enen corresponderen met rijtjes van lengte n met $k-1$ enen. Daarvan zijn er $\binom{n}{k-1}$.

4. Een recursieve beschrijving

We hebben gezien dat de getallen $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ op eenzelfde manier berekend kunnen worden als binomiaalcoëfficiënten. Voor de Catalangetallen $c_n = \left\langle {2n \atop n} \right\rangle$ is er een recursieve beschrijving die het mogelijk maakt ze een voor een te berekenen:

$$\begin{cases} c_0 = 1 \\ c_n = c_0 c_{n-1} + c_1 c_{n-2} + \cdots + c_{n-2} c_1 + c_{n-1} c_0 \quad \text{(voor alle } n \in \mathbb{N}^*\text{).} \end{cases}$$

De laatste formule kun je als volgt in de $\sum$-notatie schrijven:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1-k}.$$

Dus:

$$\begin{aligned} c_0 &= 1 \\ c_1 &= 1 \cdot 1 = 1 \\ c_2 &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2 \\ c_3 &= 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5 \\ c_4 &= 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 14 \\ c_5 &= 1 \cdot 14 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 14 \cdot 1 = 42 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Deze recursieve beschrijving van c_n kun je als volgt begrijpen. Laat n een natuurlijk getal ≥ 1 zijn. Bij ieder toegestaan rijtje van n nullen en n enen is er een kleinste $m > 0$ zo dat het beginstuk van lengte $2m$ uit evenveel enen als nullen bestaat. Dit beginstuk begint met een `0` en eindigt met een `1`. Daartussen staat een toegestaan rijtje van lengte $2m - 2$. De rij is dus opgebouwd uit achtereenvolgens

1. een `0`,
2. een toegestaan rijtje van $m - 1$ nullen en $m - 1$ enen,
3. een `1`,
4. een toegestaan rijtje met $n - m$ nullen en $n - m$ enen.

Bij een gegeven m zijn er $c_{m-1}c_{n-m}$ van zulke rijtjes. Het totale aantal is dus

$$c_0c_{n-1} + c_1c_{n-2} + c_2c_{n-3} + \cdots + c_{n-2}c_1 + c_{n-1}c_0.$$

► Toelichting 1

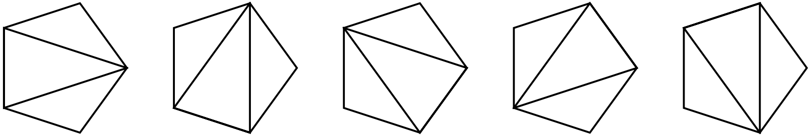
Opgaven

1. Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt

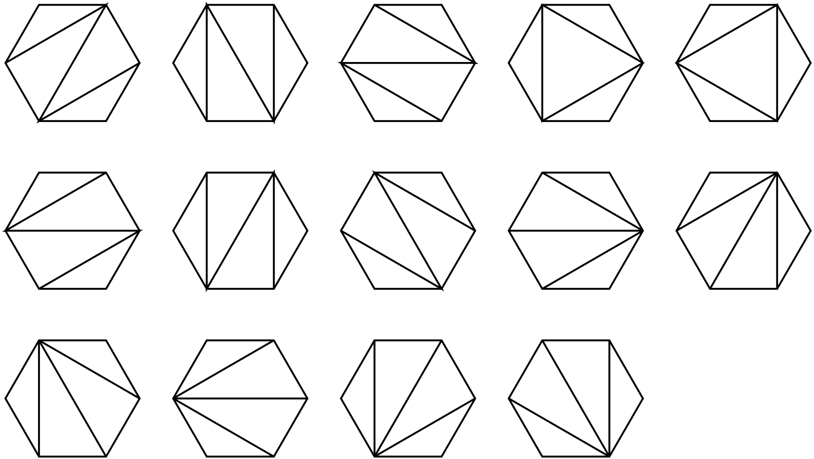
$$c_n = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n-2)}{(n+1)!}$$

en leid hier een andere recursieve beschrijving van de Catalangetallen uit af.

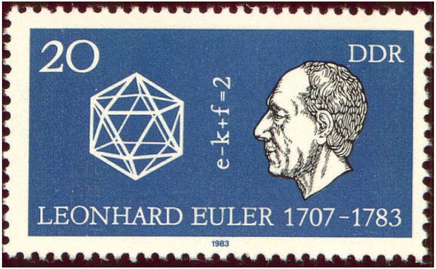
2. Vind een formule voor het aantal manieren waarop een n-hoek (zonder inspringende hoeken) door elkaar niet snijdende diagonalen in driehoeken verdeeld kan worden. Geef een bewijs voor de gevonden formule. Voor een 5-hoek zijn er 5 manieren:



En voor een 6-hoek zijn er 14:



Dit probleem is afkomstig van Euler. Hij kende de Catalangetallen, alleen heetten die toen nog niet zo. De betekenis van ***Leonhard Euler*** *(Basel 1707 – St. Petersburg 1783) voor de ontwikkeling van de wiskunde is enorm. Deze postzegels vermelden twee van zijn stellingen:*


20
DDR
e-k+f=2
LEONHARD EULER 1707-1783
1983


PRO JUVENTUTE 1957
e iφ =cos φ+i sin φ
LEONHARD EULER 1707-1783
5
+5 HELVETIA

Opdrachten

Opdracht 1. Catalan toonde aan dat je bij een product van $n+1$ factoren op precies c_n manieren de haakjes kunt plaatsen. Geef er zelf een bewijs voor.

Toelichtingen en hints

Toelichting 1. In termen van de stack uit de eerste paragraaf betekent dit dat je moet letten op het moment dat de 1 de stack verlaat. Dat is de eerste keer dat de stack weer leeg is. Is de 1 het m-de getal dat de stack verlaat, dan hebben daarvoor de getallen 2 t/m m de stack verlaten. Dat kan op c_{m-1} manieren. Daarna komen de getallen $m+1$ t/m n aan de beurt. Deze kunnen op c_{n-m} manieren de stack verlaten. ◀

Opgave 1. Bereken $\frac{c_{n+1}}{c_n}$.

◀

Opgave 2. Neem één zijde vast en beschouw bij een gegeven onderverdeling de driehoek die deze zijde als zijde heeft. Bij een $(n+2)$-hoek verdeelt deze driehoek de $(n+2)$-hoek in een $(m+2)$-hoek en een $(n-m+1)$-hoek. Dit leidt tot een recursieve betrekking.