Categorieën en homologische algebra—project voor 25 april 2016

In wat volgt is A een abelse categorie die voldoende injectieven heeft. Ter herinnering: een resolutie van een object M is een complex $C^\bullet$ plus een morfisme van complexen $\varphi\colon M[0] \to C^\bullet$ dat een isomorfisme geeft op homologiegroepen. In het bijzonder is $C^\bullet$ exact in graden $\neq 0$ en hebben we $M \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^0(C^\bullet)$. In de praktijk zullen we bovendien steeds aannemen dat $C^i = 0$ voor $i < 0$ (zoals we vandaag steeds doen) of juist dat $C^i = 0$ voor alle $i > 0$ (zoals van toepassing is wanneer we bijvoorbeeld covariante rechts-exacte functoren bekijken). In het eerste geval is de rij

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \xrightarrow{d^1} C^2 \xrightarrow{d^2} \cdots$$

dus exact.

Als $C^\bullet$ een complex is, dan zal ik typisch d_C^i schrijven voor de differentialen. Indien mogelijk laat ik de boven-indices weg, dus dan wordt het gewoon d_C.

Het eerste resultaat dat we vandaag willen bewijzen is het volgende.

Propositie. *Zij $u\colon M \to N$ een morfisme in A. Zij $\varphi\colon M \to C^\bullet$ een resolutie van M en zij $\psi\colon N \to I^\bullet$ een injectieve resolutie van N. Dan bestaat er een morfisme van complexen $U\colon C^\bullet \to I^\bullet$ zo dat $U \circ \varphi = \psi \circ u$, en op homotopie na is U uniek bepaald.*

Als eerste gaan we de existentie van een U bewijzen.

(1) Merk op dat $\varphi\colon M \to C^0$ een monomorfisme is. We hebben het morfisme $\psi \circ u\colon M \to I^0$. Omdat I^0 een injectief object is, bestaat er een $U^0\colon C^0 \to I^0$ zo dat $U^0 \circ \varphi = \psi \circ u$. (Teken een diagram.) Zorg dat je dit in detail begrijpt.

(2) Als volgende construeren we $U^1\colon C^1 \to I^1$ zo dat $U^1 \circ d_C = d_I \circ U^0$. Merk op dat $d_C\colon C^0 \to C^1$ factoriseert als

$$C^0 \twoheadrightarrow C^0/\varphi(M) \hookrightarrow C^1\,. \tag{2.1}$$

Verder factoriseert $d_I \circ U^0\colon C^0 \to I^1$ via $C^0/\varphi(M)$. (Waarom?) Omdat I^1 een injectief object is, bestaat er een $U^1\colon C^1 \to I^1$ zo dat $U^1 \circ d_C = d_I \circ U^0$. (Teken dit in het eerder getekende een diagram.)

(3) Ga nu met inductie verder en bewijs de existentie van een $U\colon C^\bullet \to I^\bullet$ zoals gewenst.

Nu willen we bewijzen dat U uniek is op homotopie na. Stel dus dat $V\colon C^\bullet \to I^\bullet$ ook een morfisme is met $V \circ \varphi = \psi \circ u$. We willen aantonen dat het verschil $V - U$ homotoop is met de nulafbeelding van $C^\bullet$ naar $I^\bullet$. Dit betekent dat we afbeeldingen $h^i\colon C^i \to I^{i-1}$ moeten construeren. We beginnen met $h^0 = 0$. (Dat moet ook wel, want $I^{-1} = 0$.)

(4) Als volgende zoeken we een $h^1\colon C^1 \to I^0$ zo dat $V^0 - U^0 = h^1 \circ d_C$. Gebruik hiertoe (2.1) en merk op dat $(V^0 - U^0)\colon C^0 \to I^0$ factoriseert via $C^0/\varphi(M)$. (Waarom?) Concludeer, met hetzelfde trucje als hierboven (I^0 is injectief), dat er een h^1 bestaat zoals gewenst.

(5) Vervolgens gaan we een $h^2\colon C^2 \to I^1$ zoeken zo dat $(V^1 - U^1) = h^2 \circ d_C + d_I \circ h^1$. Factoriseer $d_C\colon C^1 \to C^2$ als

$$C^1 \twoheadrightarrow \mathrm{Coker}(d_C^0) \hookrightarrow C^2\,.$$

(Waarom is er zo'n factorisatie? Waarom is de tweede pijl een monomorfisme?) Merk op dat $V^1 - U^1 - (d_I \circ h^1)\colon C^1 \to I^1$ factoriseert via $\mathrm{Coker}(d_C^0)$. (Waarom?) Concludeer nu weer dat er een h^2 bestaat zoals gewenst.

(6) Maak het bewijs van uniciteit op homotopie na af met inductie.

Het is goed om een conclusie te formuleren die van belang is bij de constructie van afgeleide functoren. Ter herinnering: we schrijven $\mathsf{K}(\mathsf{A})$ voor de homotopiecategorie van complexen van objecten van A. Overtuig je er van dat je begrijpt hoe de volgende uitspraak volgt uit de propositie:

Gevolg. *Zij M een object van A. Als $\varphi\colon M \to I^\bullet$ en $\psi\colon M \to J^\bullet$ twee injectieve resoluties ijn van M dan is er een uniek morfisme $U\colon I^\bullet \to J^\bullet$ in $\mathsf{K}(\mathsf{A})$ zo dat $U \circ \varphi = \psi$, en deze U is een isomorfisme in $\mathsf{K}(\mathsf{A})$.*

Nu komt het echte werk. We bekijken een covariante links-exacte functor $F\colon \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ tussen abelse categorieën, waarbij we nog steeds aannemen dat A voldoende injectieven heeft. Ons doel is de afgeleide functoren $R^iF\colon \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ te construeren. (Lees de paragraaf uit het boek van Hartshorne die op de webpagina staat voor verdere uitleg over wat we daarmee precies bedoelen. Ik kom hier in het volgende hoorcollege natuurlijk op terug.)

(7) De functor F induceert een functor $F\colon \mathsf{C}(\mathsf{A}) \to \mathsf{C}(\mathsf{B})$: pas gewoon F toe op elke term in een complex. Subtieler (en belangrijker) is echter dat deze F ook een functor $F\colon \mathsf{K}(\mathsf{A}) \to \mathsf{K}(\mathsf{B})$ induceert. Zorg dat je dit begrijpt. Wat je moet nagaan is dat als $f, g\colon K^\bullet \to L^\bullet$ twee morfismen in $\mathsf{C}(\mathsf{A})$ zijn met $f \sim g$, dan zijn ook $F(f)$ en $F(g)\colon F(K^\bullet) \to F(L^\bullet)$ homotoop.

(8) Zij $\mathscr{H}^i\colon \mathsf{C}(\mathsf{B}) \to \mathsf{B}$ de functor die een complex stuurt naar zijn homologie in graad i. Ook deze functor factoriseert via de homotopiecategorie; met andere woorden, we krijgen een functor $\mathscr{H}^i\colon \mathsf{K}(\mathsf{B}) \to \mathsf{B}$. Het punt hier is dat als f en g morfismen in $\mathsf{C}(\mathsf{B})$ zijn die homotoop zijn, er geldt dat $\mathscr{H}^i(f) = \mathscr{H}^i(g)$.

Om de afgeleiden functoren R^iF te definiëren, doen we iets dat in eerste instantie vreselijk klinkt: we kiezen voor elk object M in A een injectieve resolutie $\varphi_M\colon M \to I_M^\bullet$. We zullen zien dat dit—dankzij het resultaat dat we hierboven hebben bewezen—minder willekeurig is dan het in eerste instantie lijkt.

Voor $i \geqslant 0$, definieer $R^iF(M) := \mathscr{H}^i\big(F(I_M^\bullet)\big)$. Dit is een object van B.

Als $u\colon M \to N$ een morfisme is, dan bestaat er volgens de propositie die we hebben bewezen een *uniek* morfisme $U\colon I_M^\bullet \to I_N^\bullet$ in $\mathsf{K}(\mathsf{A})$ zo dat $U \circ \varphi_M = \varphi_N \circ u$. Volgens wat we in (7) en (8) hebben gezien, kunnen we de functor $\mathscr{H}^i \circ F\colon \mathsf{K}(\mathsf{A}) \to \mathsf{B}$ toepassen; dit geeft een morfisme

$$R^iF(u) := (\mathscr{H}^i \circ F)\big(U\big)\colon R^iF(M) \to R^iF(N)$$

in B.

(9) Bewijs dat voor morfismen $t\colon L \to M$ en $u\colon M \to N$ in A geldt dat $R^iF(u \circ t) = R^iF(u) \circ R^iF(t)$. Bewijs ook dat $R^iF(\mathrm{id}_M)$ de identiteit is op $R^iF(M)$, voor alle $i \geqslant 0$. Concludeer dat we functoren $R^iF\colon \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ hebben geconstrueerd, en ga na dat deze functoren additief zijn.

(10) Laat zien dat R^0F hetzelfde is als de functor F. (Beter: we hebben een canoniek isomorfisme van functoren $F \xrightarrow{\sim} R^0F$.)

Op isomorfie na, hangen de functoren R^iF die we hebben geconstrueerd niet af van de gekozen injectieve resoluties. Dat kun je bewijzen door gebruik te maken van een abstracte karakterisering van deze functoren. We kunnen het echter ook tamelijk eenvoudig met de hand nagaan. Stel daartoe dat we een andere keuze doen voor de injectieve resoluties; dus voor elk object M in A kiezen we een (mogelijk) andere injectieve resolutie $\varphi'_M\colon M \to J^\bullet_M$. Herhalen we het bovenstaande met deze keuzes, dan geeft dit functoren $\tilde{R}^iF\colon \mathsf{A} \to \mathsf{B}$.

Passen we het bovenstaande Gevolg toe, dan vinden we dat er voor elk object M een uniek morfisme van resoluties $U_M\colon I^\bullet_M \to J^\bullet_M$ in $\mathsf{K}(\mathsf{A})$ is, en deze U_M zijn isomorfismen. Definieer dan

$$\alpha_M = (\mathscr{H}^i \circ F)\bigl(U_M\bigr)\colon R^iF(M) \xrightarrow{\sim} \tilde{R}^iF(M)\,.$$

(11) Bewijs dat deze α_M een isomorfisme van functoren $R^iF \xrightarrow{\sim} \tilde{R}^iF$ definiëren.

Tot zover voor vandaag. Wat nog ontbreekt in het bovenstaande plaatje, zijn de randafbeeldingen. De volgende keer zal ik uitleggen, hoe we bij elk kort exact rijtje

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

in A, randafbeeldingen

$$\delta^i\colon R^iF(M'') \to R^{i+1}F(M')$$

kunnen maken, op zo'n manier dat we een lange exacte rij

$$\cdots \longrightarrow R^{i-1}F(M'') \xrightarrow{\delta^{i-1}} R^iF(M') \longrightarrow R^iF(M) \longrightarrow R^iF(M'') \xrightarrow{\delta^i} R^{i+1}F(M') \longrightarrow \cdots$$

krijgen. Daarna zullen we natuurlijk snel in voorbeelden proberen te begrijpen wat dit allemaal te betekenen heeft. Volgende hoorcollege: maandag 9 mei. Tot dan!