RINGEN EN LICHAMEN 1

Hertentamen, maandag 7 juli 2014, 12:30–15:30.

— Schrijf op elk blad dat je inlevert je naam. Schrijf op de eerste pagina ook het nummer van je collegekaart.
— Geef volledige en duidelijke argumenten voor de beweringen die je doet. Je mag alle resultaten gebruiken die zijn behandeld, mits je steeds duidelijk aangeeft wat je gebruikt.
— Schrijf *leesbaar* en lever geen kladwerk in. Stukken tekst die niet gemakkelijk zijn te ontcijferen worden genegeerd.

Opgave 1. Zij R een (mogelijk niet-commutatieve) ring met $1 \neq 0$.

(i) (Theorievraag) Geef de definitie van wanneer we een element $r \in R$ een *nuldeler* noemen en van wanneer we r een *eenheid* noemen.

(ii) (Theorievraag) Bewijs dat een element $r \in R$ niet tegelijk een eenheid en een nuldeler kan zijn.

(iii) Beschouw de ring $\mathbb{F}_2[X]/(X^3)$. Deze ring heeft 8 elementen, namelijk de 8 klassen van de vorm $a + bX + cX^2 \pmod{X^3}$ met a, b, $c \in \mathbb{F}_2$. (NB: $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.) Geef van elk van deze 8 elementen aan of het een eenheid is en of het een nuldeler is. (Geef je antwoorden bij voorkeur in de vorm van een tabel.)

Opgave 2.

(i) (Theorievraag) Formuleer de Chinese reststelling voor ringen.

(ii) Beschouw de idealen I, $J \subset \mathbb{Q}[X,Y]$ gegeven door $I = (X, X^2Y + Y + 3)$ en $J = (Y - 1)$. Bewijs dat deze idealen onderling ondeelbaar zijn.

(iii) Bewijs dat de ring

$$\mathbb{Q}\big[X,Y,Z\big] \;/\; \big(XY - X,\ X^2Y + Y - Z,\ YZ + 3Y - Z - 3\big)$$

isomorf is met $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}[T]$.

Opgave 3. Zij R een commutatieve ring met $1 \neq 0$. Gegeven zijn verder twee idealen I en J van R.

(i) Als $I \cup J$ een ideaal is, bewijs dat $I \subseteq J$ of $J \subseteq I$.

(ii) Als $I \cap J$ een priemideaal is, bewijs dat $I \subseteq J$ of $J \subseteq I$.

Zie achterzijde voor Opgaven 4 en 5

Opgave 4.

(i) Is het ideaal $(X^2+Y, Y+1) \subset \mathbb{C}[X,Y]$ een priemideaal? Is het een maximaal ideaal? Licht je antwoorden zorgvuldig toe.

(ii) Geef van elk de volgende idealen van de ring $\mathbb{Z}[X]$ aan of het een priemideaal is en of het een maximaal ideaal is:

$$(20, X)\,, \quad \bigl(7, X^2-2\bigr)\,, \quad \bigl(7, X^3-2\bigr)\,.$$

Licht je antwoorden zorgvuldig toe.

Opgave 5. Hieronder volgen drie uitspraken. Bepaal van elk van deze uitspraken of deze in het algemeen *waar* is of *onwaar*. Als een uitspraak waar is, geef dan een bewijs. Als een uitspraak onwaar is, geef dan een concreet voorbeeld waaruit dit blijkt. In deze uitspraken zijn R en S commutatieve ringen met $1 \neq 0$ en zijn $f\colon R \to S$ en $g\colon R \to S$ unitaire homomorfismen.

(a) De afbeelding $h\colon R \to S$ gegeven door $h(r) = f(r) + g(r)$ is weer een homomorfisme van ringen.

(b) Als $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(g)$ dan is er een unitair homomorfisme $\alpha\colon R \to R$ zo dat $f = g \circ \alpha$.

(c) De afbeelding $\phi\colon R \to S \times S$ gegeven door $\phi(r) = \bigl(f(r), g(r)\bigr)$ is weer een unitair homomorfisme van ringen.