

RADBOUD UNIVERSITEIT NIJMEGEN



FACULTEIT DER NATUURWETENSCHAPPEN, WISKUNDE EN INFORMATICA

Breuklijn vrije Betegelingen

EEN STELLING VAN R. L. GRAHAM

BACHELOR SCRIPTIE WISKUNDE

Auteur:
Annemiek van Hoorn
s4760387

Begeleider:
Wieb Bosma

Tweede lezer:
Sep Thijssen

Juli 2019

Inhoud

1	Introductie	2
2	Een breuklijn vrije betegeling	4
3	1-bij-2 tegel	8
4	Stelling van R. L. Graham	14
4.1	Voorwaarde 1	15
4.2	Voorwaarde 2	19
4.3	Het bewijs	23
5	Stelling van R. L. Graham met specifieke tegels	42
6	Het herschrijven van voorwaarde 2 van stelling van R. L. Graham	45
7	Vervolg onderzoek	51

1 Introductie

Je herinnert je vast wel dat je als kind een zo'n hoog mogelijke toren of muur wilde bouwen voor je bunker of kunstwerk. Je wilt dat je bunker niet zo maar instort en je toren moet zo hoog mogelijk worden. Hierbij werkt stevigheid sterk samen met de hoogte van de bouwwerk, hoe steviger hoe hoger je gebouw kan worden zonder om te vallen. Je maakt je bouwwerk stevig door blokken te laten overlappen. We zien dit ook terug in het metselen van muren.

In deze scriptie gaan we betegelingen op platte p -bij- q rechthoekige figuren bekijken, met rechthoekige a -bij- b tegels. Voor elke betegeling gebruiken we tegels van allemaal dezelfde afmetingen. Om precies te zijn gaan we breuklijnrije betegelingen van eindige rechthoeken p -bij- q met rechthoekige a -bij- b tegels bekijken.

In het bijzonder zijn we in deze scriptie geïnteresseerd in de vraag wanneer zo'n breuklijnrije betegeling bestaat. Maar voordat we naar het bestaan van breuklijnrije betegeling gaan kijken is het eerst handig om te kijken, bekijken we het bestaan van een betegeling in het algemeen. Eerst bekijken we dus wanneer een betegeling van een eindige p -bij- q rechthoek met rechthoekige a -bij- b tegels bestaat. Hiervoor hebben we de volgende stelling[1]:

Stelling 1.1. *Neem aan dat $pq \geq ab$ en $\text{ggd}(a, b) = 1$, dan geldt de volgende bewering:*

Een p -bij- q rechthoek R kunnen we betegelen met a -bij- b tegels dan en slechts dan als er aan de volgende punten wordt voldaan:

- *a en b delen p of q .*
- *We kunnen p en q schrijven als $xa + yb$ met $x, y \geq 0$.*

Vervolgens kwam R. L. Graham met een stelling[3] die voorwaarden geeft voor het bestaan van breuklijnrije betegelingen.

Stelling 1.2 (Stelling van R. L. Graham). $p, q, a, b \in \mathbb{N}$. *Neem aan dat $a \neq b$, $pq > ab$ en $\text{ggd}(a, b) = 1$.*

*Een breuklijnrije betegeling van een p -bij- q rechthoek met a -bij- b tegels bestaat dan en slechts dan als er wordt voldaan aan voorwaarden **1** t/m **3**.*

- 1. Zowel a als b delen p of q .*
- 2. Zowel p als q kunnen we uitdrukken als $xa + yb$ met $x, y > 0$ op minstens twee verschillende manieren.*
- 3. Voor $\{a, b\} = \{1, 2\}$ geldt $(p, q) \neq (6, 6)$.*

Zoals je ziet geeft deze stelling een desda relatie tussen drie voorwaarden en het bestaan van een breuklijnrije betegeling.

Voorwaarde **1** (en voorwaarde **2**) zorgen volgens Stelling 1.1 ervoor dat een betegeling bestaat. Dat een betegeling bestaat is geen garantie voor het bestaan van een breuklijnrije betegeling. Daarom is voorwaarde **2** strikter dan dat Stelling 1.1

geeft. Als laatste is er één specifieke uitzondering, deze voldoet aan voorwaarde **1** en **2** maar een breuklijnvrrije betegeling is niet mogelijk. Voorwaarde **3** zorgt ervoor dat er rekening wordt gehouden met deze uitzondering.

Dit is een erg mooie algemene stelling, maar het bewijs is nog nergens gegeven. Dus in deze scriptie gaan we Stelling 1.2 bewijzen.

Voordat we aan de slag gaan met het bewijs moeten we natuurlijk eerst wat definities bespreken en uitleggen. Om vervolgens het bewijs van deze algemene stelling te kunnen geven gaan we eerst kijken naar een specifiek geval; de 1-bij-2 tegel. Hierbij leren we principes die ook weer terug komen in het algemene geval. Vervolgens geven we het algemene bewijs van Stelling 1.2, waarbij in Subsectie 4.1 ook het bewijs voor Stelling 1.1 wordt gegeven.

Naast het bewijs van de Stelling van R. L. Graham bekijken we voorwaarde **2** van deze stelling uitvoeriger. Deze voorwaarde is voor een gegeven p en q niet zo makkelijk te checken, dus zoeken we naar mogelijke herschrijvingen of implicaties van voorwaarde **2**.

Opmerking. In deze scriptie werken we altijd alleen met de gehele getallen \mathbb{Z} . Dus alle variabelen, x, y, m, n etc. zijn altijd elementen uit de gehele getallen \mathbb{Z} .

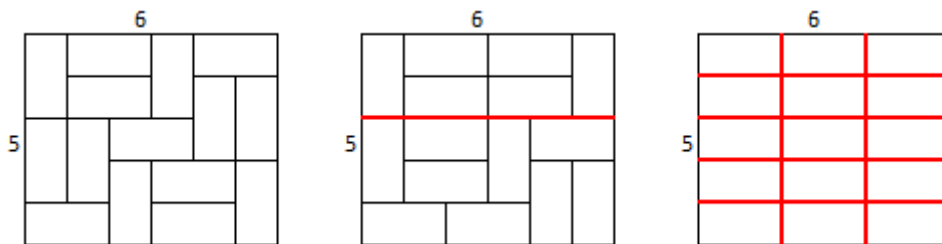
Opmerking. In deze scriptie gaan we uit van de volgende verzameling $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, als we spreken over de natuurlijke getallen. Daarbij gaan we er vanuit dat de maten/lengtes van de tegels en rechthoeken a, b, p, q overal elementen van de natuurlijke getallen zijn (dus $p, q, a, b > 0$).

2 Een breuklijnrije betegeling

Het specifieke onderwerp van mijn scriptie is: "breuklijnrije betegelingen". Om een idee te krijgen wat dit onderwerp inhoudt hebben we eerst enkele definities[3] nodig.

Definitie 2.1. Een *breuklijn* is een rechte lijn die het (niet lege) rechthoekig oppervlak volledig in twee niet lege rechthoeken splitst en die niet door een tegel snijdt.

Definitie 2.2. Een betegeling noemen we *breuklijnrij* als er geen breuklijnen in de betegeling zitten.



Figuur 1: Voorbeelden betegeling.

Hierboven zie je voorbeelden van betegelingen van een 5-bij-6 rechthoek met 1-bij-2 tegels. De linker betegeling is breuklijnrij, je ziet dat er geen enkele horizontale en/of verticale breuklijn aanwezig is. De andere twee betegelingen zijn voorbeelden van betegelingen met breuklijnen. De breuklijnen zijn met rood aangegeven.

Nu is de vraag, welke p -bij- q rechthoeken zijn breuklijnrij te betegelen. Dit ligt natuurlijk ook aan wat voor a -bij- b tegels we hebben.

Ronald L. Graham gaf hiervoor Stelling 1.2:

Stelling 1.2 (Stelling van R.L. Graham). $p, q, a, b \in \mathbb{N}$. *Neem aan dat $a \neq b$, $pq > ab$ en $\text{ggd}(a, b) = 1$.*

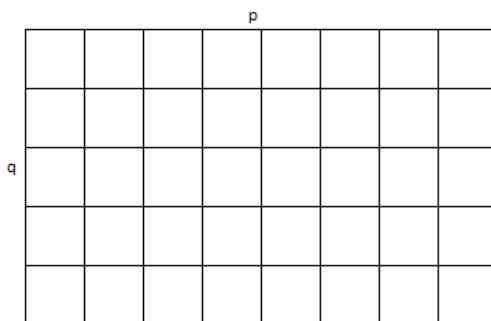
Een breuklijnrijje betegeling van een p -bij- q rechthoek met a -bij- b tegels bestaat dan en slechts dan als er wordt voldaan aan voorwaarden 1 t/m 3.

1. *Zowel a als b delen p of q .*
2. *Zowel p als q kunnen we uitdrukken als $xa + yb$ met $x, y > 0$ op minstens twee verschillende manieren.*
3. *Voor $\{a, b\} = \{1, 2\}$ geldt $(p, q) \neq (6, 6)$.*

We zien dat Stelling 1.2 hierbij drie dingen aanneemt, namelijk $a \neq b$, $pq > ab$ en $\text{ggd}(a, b) = 1$.

Aanname 1: $a \neq b$

Als eerste is er geen breuklijn vrije betegeling van een p -bij- q rechthoek met a -bij- a tegels mogelijk. Dit komt doordat als een betegeling van een p -bij- q rechthoek met a -bij- a tegels bestaat er maar één manier is om zo'n betegeling te maken (zie in Figuur 2) en deze is niet breuklijn vrij.



Figuur 2: Voorbeeld van een betegeling met vierkante tegels.

Opmerking. Zo'n betegeling als hierboven bestaat alleen als p en q deelbaar zijn door a en heeft het maximaal aantal mogelijk breuklijnen: $\frac{p}{a} - 1 + \frac{q}{a} - 1 = \frac{p+q}{a} - 2$.

Aangezien voor een vierkante tegel er geen breuklijn vrije betegeling bestaat kan je voor een breuklijn vrije betegeling altijd aannemen dat $a \neq b$.

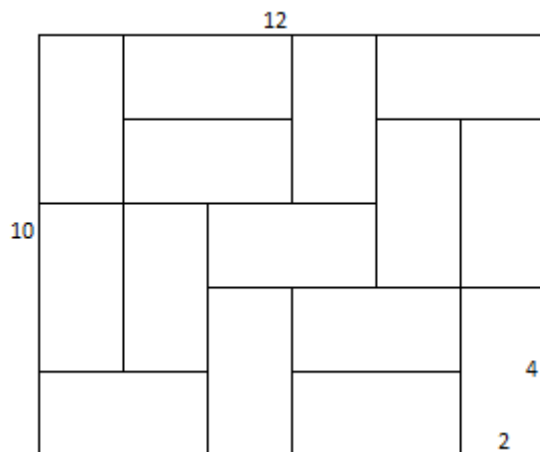
Er bestaan echter wel breuklijn vrije betegelingen die niet aan de laatste twee aannames voldoen.

Aanname 2: $pq > ab$

pq is de oppervlakte van het te betegelen oppervlak, ab is de oppervlakte van een enkele tegel, dus moet voor elke betegeling van p -bij- q rechthoek met a -bij- b tegels gelden dat $pq \geq ab$. Toch nemen we in Stelling 1.2 aan dat $pq > ab$. We laten de triviale (breuklijn vrije) betegeling voor het enkele geval $pq = ab$ achterwege aangezien deze niet zo interessant/bijzonder is. Als $pq = ab$, dan is een betegeling alleen mogelijk als het p -bij- q rechthoek dezelfde afmeting heeft als de a -bij- b tegel. De betegeling bestaat uit één enkele tegel en deze is dan per definitie breuklijn vrij. Om deze optie niet elke keer apart te moeten bekijken nemen we in Stelling 1.2 voor het gemak aan dat $pq > ab$.

Aanname 3: $\text{ggd}(a, b) = 1$

Stelling 1.2 neemt ook aan dat $\text{ggd}(a, b) = 1$ maar er zijn zeker breuklijn vrije betegelingen voor bijvoorbeeld 2-bij-4 tegels ($\text{ggd}(2, 4) = 2 \neq 1$), zoals we zien in Figuur 3.



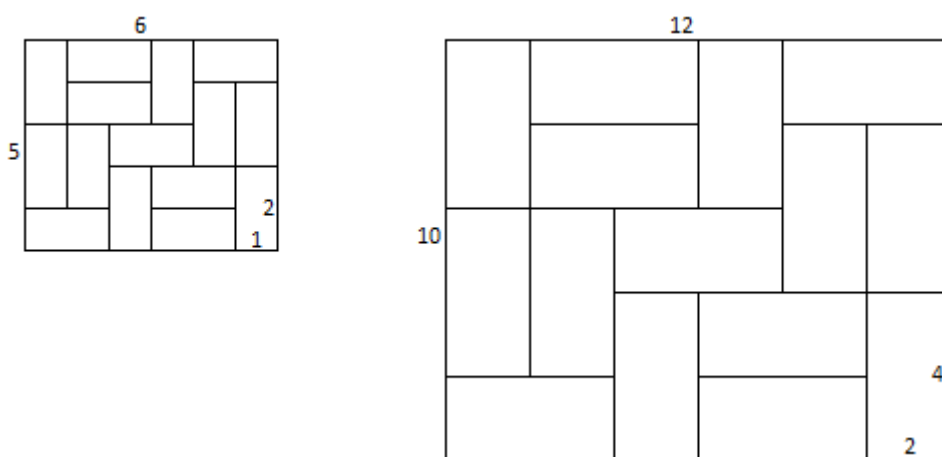
Figuur 3: Voorbeeld voor een breuklijnrije betegeling van een 10-bij-12 rechthoek met 2-bij-4 tegels.

Stel $\text{ggd}(a, b) = s > 1$. Dan geldt het volgende:

Een p -bij- q rechthoek is breuklijnrij te betegelen met a -bij- b tegels desda er wordt aan de volgende punten voldaan:

- p en q kunnen we schrijven als $p = sw$ en $q = sv$ met $w, v > 1$.
- Er bestaat een breuklijnrije betegeling van een w -bij- v rechthoek met $\frac{a}{s}$ -bij- $\frac{b}{s}$ tegels.

Dit wordt nog duidelijker als we het voorbeeld uit Figuur 3 nog een keertje bekijken en vergelijken met de breuklijnrije betegeling van een 5-bij-6 rechthoek met 1-bij-2 tegels (Figuur 1).



Figuur 4: Vergelijking tussen een breuklijnrije betegeling met 1-bij-2 tegels en eentje met 2-bij-4 tegels.

Je ziet dat ze praktisch het zelfde zijn betegeld. Zo geldt ook dat als zo'n breuklijn-vrije betegeling van een w -bij- v rechthoek met $\frac{a}{s}$ -bij- $\frac{b}{s}$ tegels niet bestaat er ook geen breuklijn-vrije betegeling van een p -bij- q rechthoek met a -bij- b tegels bestaat. Dit komt omdat zowel de a -bij- b en $\frac{a}{s}$ -bij- $\frac{b}{s}$ tegels als de p -bij- q en w -bij- v rechthoeken dezelfde verhoudingen hebben.

Dus de gevallen voor $\text{ggd}(a, b) = s > 1$ vloeien voort uit de gevallen waarbij $\text{ggd}(a, b) = 1$, daarom nemen we voor het gemak in Stelling 1.2 aan dat $\text{ggd}(a, b) = 1$.

3 1-bij-2 tegel

Zoals al in de introductie aangegeven gaan we nu eerst een specifiek geval, betegelingen met 1-bij-2 tegels, bekijken. Hierdoor leren we de principes die nodig zijn voor een breuklijn vrije betegeling, die we dan later ook terug zien in het algemene geval.

Bekijk de vraag: "Welke p -bij- q rechthoeken zijn breuklijn vrij te betegelen?" in het geval dat we 1-bij-2 tegels hebben. Hiervoor hebben we de onderstaande stelling[3]. Het bewijs is gebaseerd op de suggesties uit het artikel van Ronald L. Graham[3].

Stelling 3.1. $p, q \in \mathbb{N}$. *Neem aan dat $pq > 2$.*

Een breuklijn vrije betegeling met 1-bij-2 tegels van een p -bij- q rechthoek bestaat dan en slechts dan als er wordt aan voorwaarde 1 t/m 3 voldaan.

1. pq is deelbaar door 2.
2. $p \geq 5$ en $q \geq 5$.
3. $(p, q) \neq (6, 6)$.

Bewijs. We gaan beide kanten op apart bewijzen.

(\Rightarrow): Neem aan dat een breuklijn vrije betegeling met 1-bij-2 tegels van een p -bij- q rechthoek bestaat.

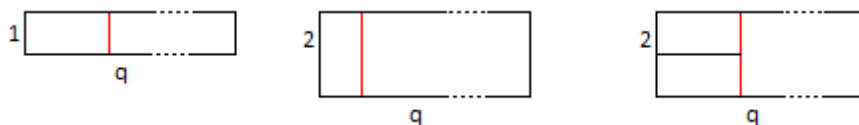
Als een breuklijn vrije betegeling van een p -bij- q rechthoek bestaat, dan bestaat er een betegeling van een p -bij- q rechthoek. Dat betekent dat de oppervlakte van het p -bij- q rechthoek ($p \cdot q$) deelbaar is door de oppervlakte van onze tegel ($1 \cdot 2$).

Dus voorwaarde 1 geldt.

Om te bewijzen dat er aan voorwaarde 2 wordt voldaan gebruiken het principe bewijzen uit het ongerijmde.

Stel $p < 5$. We gaan de alle vier de gevallen $p = 1, 2, 3, 4$ na.

$p = 1$ en $p = 2$ levert de volgende mogelijke eerste stukjes van betegelingen op:

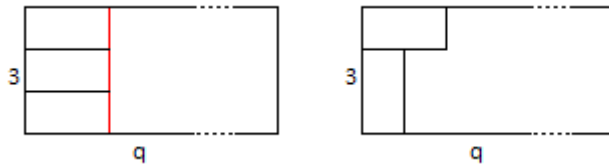


Figuur 5: Betegeling voor $p = 1$ en $p = 2$. (illustratie uit [3])

Je ziet dat er altijd een breuklijn ontstaat (rode lijn), dit is in tegenspraak met onze aanname.

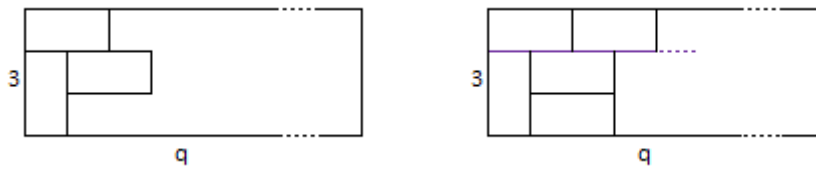
Opmerking. Je zou kunnen zeggen dat als we $q = 2$ in de linker constructie of $q = 1$ in de middelste constructie van Figuur 5 nemen we een breuklijn vrije betegeling hebben. Dit komt omdat ons rechthoekig oppervlak dan met 1 tegel betegeld wordt. Maar deze optie hebben we eruit gehaald door aan te nemen dat $pq > 2$.

$p = 3$ levert de volgende mogelijke eerste stukjes van betegelingen op:



Figuur 6: Betegeling voor $p = 3$. (illustratie uit [3])

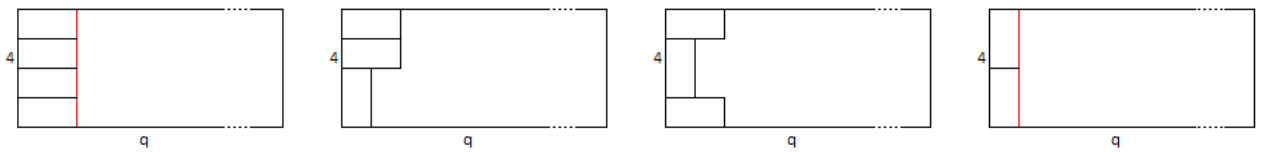
De enige manier om een breuklijn vrije betegeling hieruit proberen te maken is de rechter constructie pakken en verder te betegelen tot:



Figuur 7: Verdere betegeling voor $p = 3$. (illustratie uit [3])

Om de mogelijke breuklijn (paarse lijn) te breken moet je ergens een verticale tegel plaatsen die deze lijn breekt. Met als gevolg dat je daar een verticale breuklijn krijgt. Wat een tegenspraak met onze aanname oplevert.

$p = 4$ levert de volgende mogelijke eerste stukjes van betegelingen op:



Figuur 8: Betegeling voor $p = 4$.

De enige manieren om een breuklijn vrije betegeling hieruit te maken zijn de middelste constructies te pakken en verder te betegelen tot:



Figuur 9: Verdere betegeling voor $p = 4$.

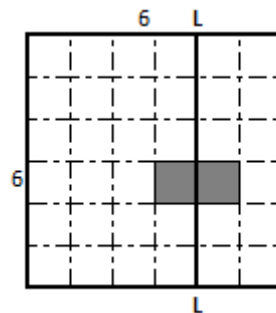
Om de mogelijke breuklijnen (paarse lijn) te breken moet je in beide gevallen ergens een verticale tegel plaatsen die deze lijn breekt. Met als gevolg dat je in beide gevallen daar een verticale breuklijn krijgt. Wat een tegenspraak met onze aanname oplevert.

Dus de gevallen $p = 1, 2, 3, 4$ leveren een tegenspraak op. Oftewel er moet gelden: $p \geq 5$.

Op analoge manier kunnen we ook $q \geq 5$ bewijzen. **Dus voorwaarde 2 geldt.**

Om te bewijzen dat er ook moet worden voldaan aan voorwaarde 3 bekijken we het geval $(p, q) = (6, 6)$. Belangrijk om te weten is dat elke 1-bij-2 tegel precies 1 breuklijn breekt.

Claim: Bij een breuklijnrije betegeling van een 6-bij-6 rechthoek met 1-bij-2 tegels wordt elke breuklijn door minstens twee tegels gebroken.



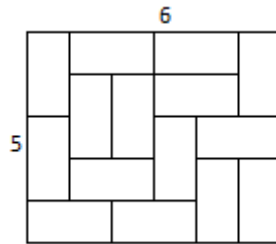
Figuur 10: Breuklijn L wordt door één tegel gebroken. (illustratie uit [3])

Stel een breuklijn (L) wordt door precies één tegel gebroken. Dan moeten we het oppervlak aan de rechterkant (en linkerkant) van lijn L kunnen betegelen met 1-bij-2 tegels. Dit is echter niet mogelijk, want $6 \cdot L - 1$ is oneven en dus niet deelbaar door twee (de oppervlakte van onze tegel). Dus elke breuklijn wordt door minstens twee tegels gebroken (**claim** is bewezen).

We hebben in onze 6-bij-6 rechthoek tien mogelijke breuklijnen (vijf horizontale en vijf verticale). Voor een breuklijnrije betegeling hebben we dan $10 \cdot 2 = 20$ tegels nodig. Twintig tegels hebben een oppervlakte van $20 \cdot 2 = 40$. Onze 6-bij-6 rechthoek heeft een oppervlakte van $6 \cdot 6 = 36$. Een breuklijnrije betegeling van 6-bij-6 rechthoek met 1-bij-2 tegels is niet mogelijk, want $36 < 40$. **Dus voorwaarde 3 geldt.**

Dus als een breuklijnrije betegeling met 1-bij-2 tegels van een p -bij- q rechthoek bestaat, dan gelden voorwaarden 1 t/m 3.

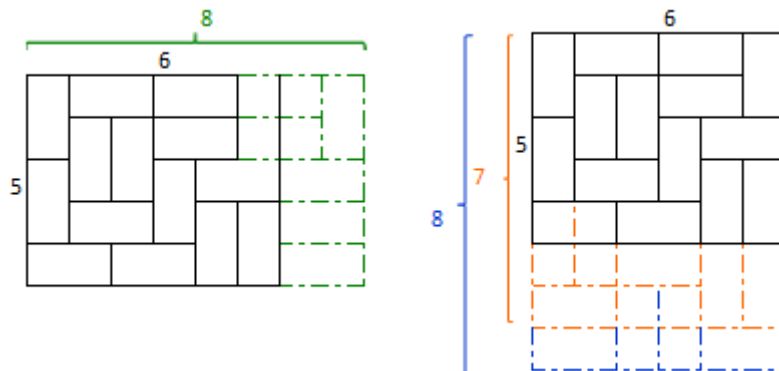
(\Leftarrow): We nemen een p -bij- q rechthoek die voldoet aan voorwaarde 1 t/m 3. Nu gaan we door middel van inductie per constructie bewijzen dat we een breuklijnrije betegeling kunnen maken. Als basis hebben we de breuklijnrije betegeling van een 5-bij-6 rechthoek.



Figuur 11: De basis voor onze inductie. (illustratie uit [3])

Opmerking. Dit is het kleinste oppervlakte (van p -bij- q rechthoek) die voldoet aan voorwaarde 1 en 2, dus is het kleinste oppervlakte waarvoor er een breuklijnrije betegeling met 1-bij-2 tegels bestaat. Als je een kleiner oppervlak (p -bij- q rechthoek) neemt dat voldoet deze niet aan voorwaarde 1 of 2.

We kunnen dit figuur uitbreiden naar een breuklijnrije betegeling van een $(5 + r)$ -bij- $(6 + 2s)$ rechthoek, waarbij $r, s \geq 0$ en $(r, s) \neq (1, 0)$ in verband met voorwaarde 3.

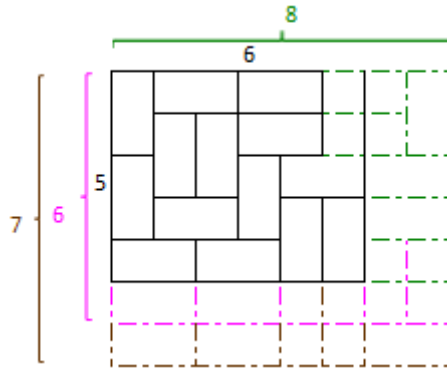


Figuur 12: Het begin van de inductie.

We kunnen de betegeling nog verder uitbreiden naar rechts door meerdere keren de groene constructie toe te passen en nog verder naar beneden door meerdere keren de blauwe constructie toe te passen.

Opmerking. Een 6-bij-6 breuklijnvrĳe betegeling met 1-bij-2 tegels bestaat niet dus wil je de 5-bij-6 constructie alleen naar beneden uitbreiden (f -bij-6 rechthoek, $f > 5$) dan is de eerst volgende breuklijnvrĳe constructie een 7-bij-6 rechthoek (oranje constructie). Deze constructie kan je vervolgens telkens   n rij tegels naar beneden uitbreiden door middel van de blauwe constructie.

Als we onze basis constructie eerst uitbreiden naar rechts (d.m.v. groene constructie) kunnen we wel per rij tegels onze constructie naar beneden uitbreiden.

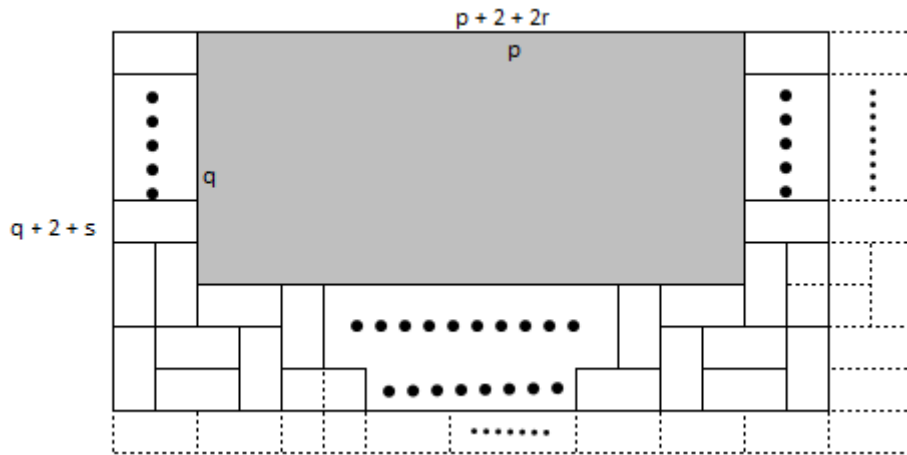


Figuur 13: Vervolg van de inductie.

Inductie stap: Als we een p -bij- q breuklijnvrĳe betegeling hebben dan kunnen we door middel van de volgende constructie daar een $(p + 2 + 2r)$ -bij- $(q + 2 + s)$ breuklijnvrĳe constructie van maken, met $r, s \in \mathbb{N}$.

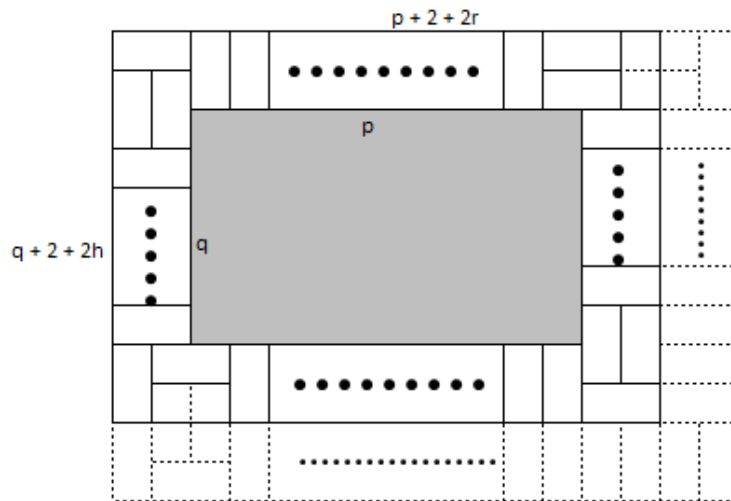
We nemen dus aan dat de p -bij- q breuklijnvrĳe betegeling bestaat, dan moeten p en q voldoen aan voorwaarde 1 t/m 3. Omdat $p, q \geq 5$ geldt dat $p + 2 + 2r, q + 2 + s \geq 5$. Dus onze uitbreiding voldoet altijd aan voorwaarde 2. Daarnaast moet gelden dat p of q even is.

Stel p is even, dan is $p + 2 + 2r$ even. Dus onze uitbreiding voldoet ook aan de drie voorwaarden. Door middel van de volgende constructie kunnen we dan ook een breuklijnvrĳe betegeling maken.



Figuur 14: Inductiestap met p even.

Stel nu p is oneven, dan moet volgens voorwaarde 2, q even zijn. Daarnaast geldt ook dat $p + 2 + 2r$ oneven is. Aangezien voorwaarden 1 t/m 3 ook moeten gelden op het $p + 2 + 2r$ -bij- $q + 2 + s$ rechthoek, moet $q + 2 + s$ even zijn. Aangezien q even is, moet gelden dat $s = 2h$ met $h \in \mathbb{N}$ (want $s \in \mathbb{N}$). Dan kunnen we door middel van de volgende constructie een breuklijnrijve betegeling maken.



Figuur 15: Inductiestap met p oneven.

Inductie toont aan dat een breuklijnrijve betegeling van rechthoek p -bij- q bestaat als aan voorwaarden 1 t/m 3 wordt voldaan.

□

4 Stelling van R. L. Graham

Aan de hand van het geval van de 1-bij-2 tegel heeft Ronald Lewis Graham (Amerikaans wiskundige) een algemene stelling voor het bestaan van breuklijn vrije tegels gepubliceerd.

De Stelling van R. L. Graham luidde als volgt:

Stelling 1.2 (Stelling van R.L. Graham). $p, q, a, b \in \mathbb{N}$. *Neem aan dat $a \neq b$, $pq > ab$ en $\text{ggd}(a, b) = 1$.*

*Een breuklijn vrije betegeling van een p -bij- q rechthoek met a -bij- b tegels bestaat dan en slechts dan als er wordt voldaan aan voorwaarden **1** t/m **3**.*

- 1. Zowel a als b delen p of q .*
- 2. Zowel p als q kunnen we uitdrukken als $xa + yb$ met $x, y > 0$ op minstens twee verschillende manieren.*
- 3. Voor $\{a, b\} = \{1, 2\}$ geldt $(p, q) \neq (6, 6)$.*

Nu willen we deze stelling natuurlijk graag bewijzen. Om dit te doen hebben we eerst wat voorwerk nodig. In volgende twee subsecties worden enkele hulplemma's gegeven om te bewijzen dat als zo'n breuklijn vrije betegeling bestaat voorwaarden 1 en 2 moeten gelden.

In Subsectie 4.3 geven we vervolgens het volledige bewijs van Stelling 1.2

4.1 Voorwaarde 1

Zoals in de introductie al aangegeven, kan een breuklijnvrĳe betegeling van rechthoek p -bij- q met a -bij- b tegels niet bestaan als er op dit rechthoek überhaupt geen betegeling bestaat.

Voorwaarde **1** van De Stelling van R. L. Graham is noodzakelijk voor het bestaan van een betegeling zoals blijkt uit Stelling 1.1.

Als een betegeling van een rechthoek p -bij- q met a -bij- b tegels bestaat, dan moet gelden dat het oppervlakte van het rechthoek (pq) deelbaar moet zijn door de oppervlakte van onze tegel (ab). Voorwaarde **1** impliceert dit dan ook, maar het is geen dan en slechts dan als relatie.

Lemma 4.1. Neem aan dat $a, b, p, q \in \mathbb{N}$ en $\text{ggd}(a, b) = 1$. Dan geldt het volgende: Als zowel a als b delers zijn van p of q , dan geldt dat ab een deler is van pq .

Bewijs. Neem aan dat a als b delers zijn van p of q . Dit betekent dat zowel a als b delers zijn van pq , dus $\text{kgv}(a, b)$ deelt pq . Nu geldt dat $\text{kgv}(a, b) = ab$, want we hadden aangenomen dat $\text{ggd}(a, b) = 1$. Dus ab is een deler van pq . \square

Maar voor de omgekeerde implicatie kunnen we een tegenvoorbeeld geven.

Tegenvoorbeeld: Neem $p = 22$, $q = 30$, $a = 4$ en $b = 3$. $a = 4$ is geen deler van $p = 22$ en geen deler van $q = 30$, maar $ab = 3 \cdot 4 = 12$ is wel een deler van $pq = 22 \cdot 30 = 660$ ($660/12 = 55$).

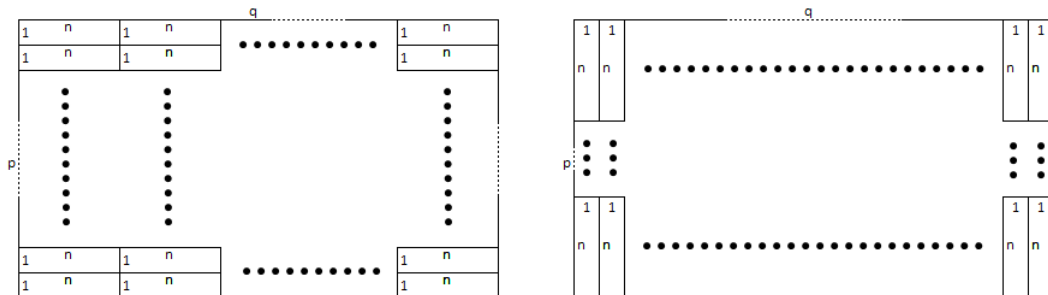
Hieruit blijkt dat de voorwaarde voor het bestaan van een betegeling van een rechthoek p -bij- q met a -bij- b tegels strikter is dan eisen dat ab een deler van pq is. We gaan nu bekijken waarom dit zo is, oftewel we gaan naar het bewijs van Stelling 1.1 toe werken. De beweringen inclusief bewijzen zijn geïnspireerd door David A. Klarner[1].

Lemma 4.2. Zij $n \in \mathbb{N}$

Een p -bij- q rechthoek R kunnen we betegelen met een 1-bij- n tegel dan en slechts dan als n is een deler van p of q .

Bewijs. We gaan beide kanten op apart bewijzen.

(\Leftarrow) Als n een deler is van p of q kunnen we rechthoek R betegelen op een triviale manier.

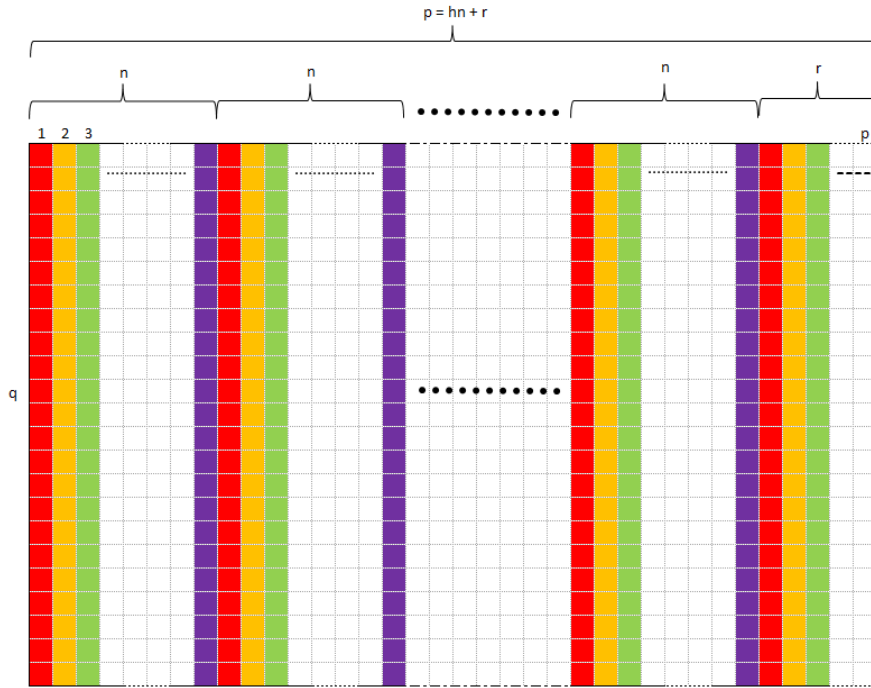


Figuur 16: Triviale 1-bij- n betegeling.

(\Rightarrow) Stel dat we een p -bij- q rechthoek R hebben betegeld met 1-bij- n tegels en dat n geen deler van p is.

Aangezien n is geen deler van p is kunnen we schrijven $p = hn + r$, $0 < r < n$.

Nummer de kolom cellen aan de zijde van rechthoek R met lengte p als volgt: $1, 2, \dots, p$ van links naar rechts. Laat f_1, f_2, \dots, f_n de verschillende kleuren van de kolommen zijn. De k^{de} kolom heeft kleur f_i dan en slechts dan als $k \equiv i \pmod{n}$.



Figuur 17: Het kleuren van de kolommen met kleuren f_1, f_2, \dots, f_n .

Laat c_i het aantal cellen zijn die in de rechthoek R kleur f_i hebben.

Als $1 \leq i \leq r$ dan zijn er $h + 1$ kolommen die de kleur f_i hebben, dan zijn er $(h + 1)q = hq + q$ cellen die kleur f_i hebben. Als $r + 1 \leq i \leq n$ dan zijn er h kolommen die de kleur f_i hebben, dan zijn er hq cellen die kleur f_i hebben. Dus $c_i = hq + q$ als $1 \leq i \leq r$ en $c_i = hq$ als $r + 1 \leq i \leq n$.

Laat x het aantal rechthoeken van 1-bij- n zijn waarvan er precies 1 cel de kleur f_i ($i = 1, 2, \dots, n$) heeft.

Laat y_i het aantal rechthoeken van 1-bij- n zijn waarvan alle cellen de kleur f_i ($i = 1, 2, \dots, n$) hebben.

Opmerking. Als er x aantal 1-bij- n rechthoeken zijn waarvan er precies 1 cel de kleur f_i heeft dan zijn er ook x aantal 1-bij- n rechthoeken waarvan er precies 1 cel de kleur f_j ($i = 1, 2, \dots, n, i \neq j$) heeft.

Er is geen enkele rechthoek van 1-bij- n waarvan er meer dan 1 en minder dan n cellen de kleur f_i ($i = 1, 2, \dots, n$) hebben, want de k^{de} kolom heeft kleur f_i dan en slechts dan als $k \equiv i \pmod{n}$.

Dus $c_i = x + ny_i$.

Dan hebben we

$$c_i = x + ny_i \equiv x + ny_j = c_j \pmod{n}$$

In het bijzonder, $c_1 = hq + q \equiv hq = c_{r+1} \pmod{n}$, oftewel $q \equiv 0 \pmod{n}$. Dus n is een deler van q .

Het geval dat n geen deler is van q gaat analoog, dan is n een deler van p .

□

Met behulp van Lemma 4.2 gaan we Stelling 1.1 bewijzen.

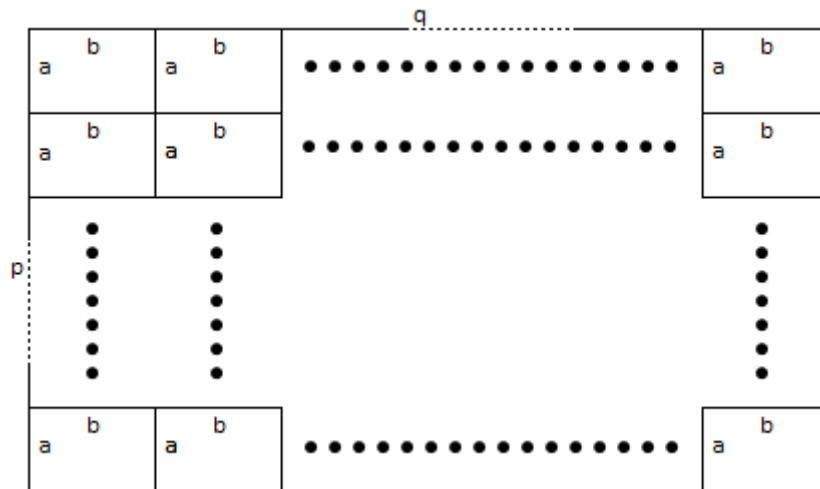
Stelling 1.1 *Neem aan dat $pq \geq ab$ en $\text{ggd}(a,b) = 1$, dan geldt de volgende bewering:*

Een p -bij- q rechthoek R kunnen we betegelen met a -bij- b tegels dan en slechts dan als er aan de volgende punten wordt voldaan:

- a en b delen p of q .
- We kunnen p en q schrijven als $xa + yb$ met $x, y \geq 0$.

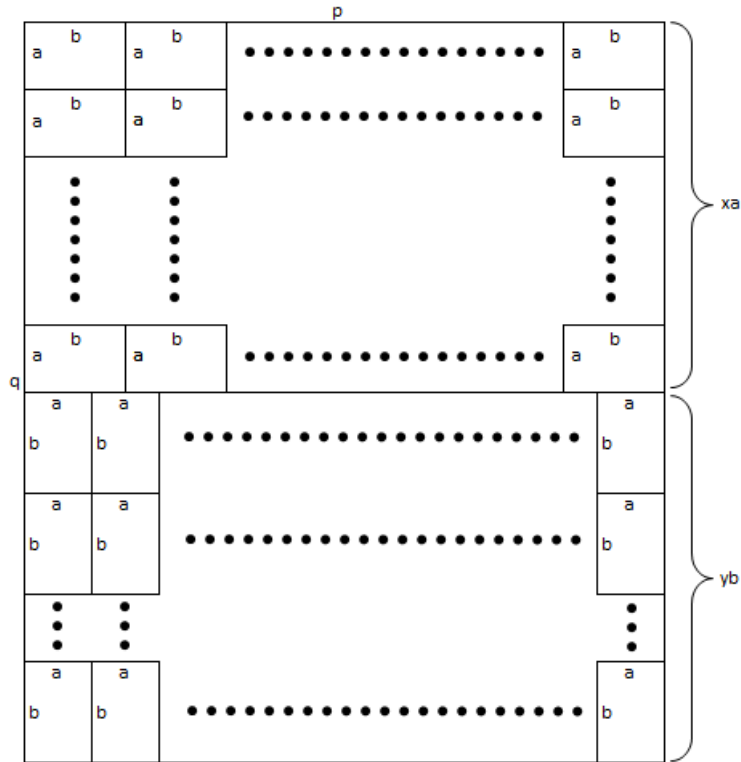
Bewijs. We gaan beide kanten op apart bewijzen.

(\Leftarrow) Als $a \mid p$ en $b \mid q$ dan kunnen we rechthoek R op een triviale manier betegelen. Het geval $a \mid q$ en $b \mid p$ gaat analoog.



Figuur 18: Triviale a -bij- b betegeling.

Stel $a \mid p$ en $b \mid p$. Er geldt ook dat we kunnen schrijven $q = xa + yb$ met $x, y \geq 0$. Dit betekent dat we p -bij- q rechthoek R als volgt kunnen betegelen:



Figuur 19: Betegeling van rechthoek R als a en b delers van p zijn.

Het geval $a \mid q$ en $b \mid q$ gaat analoog.

(\Rightarrow) Stel we kunnen een p -bij- q rechthoek R betegelen met a -bij- b tegels ($\text{ggd}(a, b) = 1$). Dan kunnen we p en q uitdrukken in de vorm $xa + yb$ met $x, y \geq 0$, want zowel lijnstuk p als lijnstuk q is een vereniging van lijnstukken van lengte a en b . Aangezien we een p -bij- q rechthoek R betegelen met a -bij- b tegels, kunnen we p -bij- q rechthoek R betegelen met a -bij-1 tegels. Volgens Lemma 4.2 moet a dan een deler zijn van p of q . Aangezien we een p -bij- q rechthoek R betegelen met a -bij- b tegels, kunnen we ook p -bij- q rechthoek R betegelen met 1-bij- b tegels. Volgens Lemma 4.2 moet b dan een deler zijn van p of q .

□

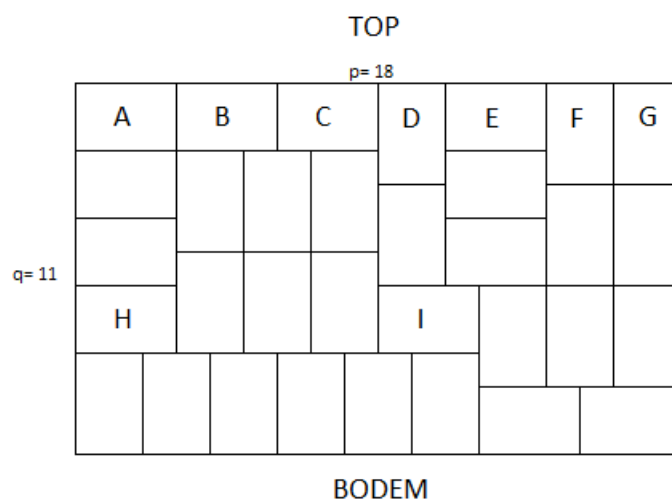
4.2 Voorwaarde 2

Nu weten we wanneer een betegeling van een rechthoek p -bij- q met a -bij- b tegels bestaat. Maar we willen nu ook nog dat er een breuklijn vrije betegeling bestaat. In Sectie 3 zagen we in het geval van de 1-bij-2 tegel dat p en q groter-gelijk aan 5 moesten zijn. Maar voor het algemene geval ziet voorwaarde **2** er toch iets anders uit. Om beter te begrijpen waarom voorwaarde **2** in Stelling 1.2 wordt geëist voor het bestaan van een breuklijn vrije betegeling, zullen we eerst wat begrippen definiëren die zijn geïnspireerd door Peter J. Robinson[2].

Definitie 4.3. Een *diepte k band* is een complete collectie van parallel aangrenzende a -bij- b tegels waarvan de bovenkant op diepte k in de p -bij- q rechthoek liggen.

Definitie 4.4. Een *diepte k band verzameling* is een complete collectie van parallel liggende a -bij- b tegels waarvan de bovenkant op diepte k in de p -bij- q rechthoek liggen.

Definitie 4.5. De *breedte van een diepte k band verzameling* is de som van de breedtes van de banden bevat in de band verzameling.



Figuur 20: Breuklijn vrije betegeling met 2-bij-3 tegels.

Bijvoorbeeld, in Figuur 20 vormen tegels A, B en C een diepte 0 band met breedte 9 terwijl A, B, C en E een band verzameling van breedte 12 vormen. De tegels H en I vormen een diepte 6 band verzameling met breedte 6.

In Figuur 20 hebben we op diepte 0 vier banden:

- A, B en C
- D
- E
- F en G

Als we de eerste rij (diepte 0) betegelen met x tegels met lengte a horizontaal en y tegels met lengte b horizontaal dan hebben we een diepte 0 band verzameling van breedte xa en een diepte 0 band verzameling van breedte yb . We kunnen dus schrijven $p = xa + yb$.

Dit levert het volgende lemma op:

Lemma 4.6. In een breuklijnvrĳe betegeling van een p -bij- q rechthoek met a -bij- b tegels ($\text{ggd}(a, b) = 1$) moeten we p en q kunnen uitdrukken als $xa + yb$ met $x, y > 0$ en $xa > ab$ of $yb > ab$.

Bewijs. Stel de TOP en BODEM van p -bij- q rechthoek (zoals in Figuur 20 is weergegeven) heeft lengte p .

Dan moeten we p kunnen schrijven als $xa + yb$ met $x, y > 0$. Als dit niet het geval is, hebben we alleen een diepte 0 band verzameling van breedte xa of yb , dit levert op diepte b of a respectievelĳk meteen een breuklijn op, wat niet mogelijk is aangezien we een breuklijnvrĳe betegeling moeten hebben.

Stel nu $xa \leq ab$ en $yb \leq ab$ oftewel beide band breedtes van diepte 0 band verzameling zijn $\leq ab$. Aangezien $\text{ggd}(a, b) = 1$ geldt dat $\text{kgv}(a, b) = ab$, hierdoor geldt dat onder elke band (Definitie 4.3) een andere band van precies dezelfde breedte komt. De breedte van elke band op diepte 0 is kleiner of gelijk aan ab (aangezien $xa \leq ab$ en $yb \leq ab$). Dus als we dan een volgende band aan tegels onder een band op diepte 0 neerleggen, moet deze van dezelfde breedte zijn.

Omdat we de breedte van de banden niet kunnen veranderen als we van boven naar beneden in het p -bij- q rechthoek bewegen (want $\text{kgv}(a, b) = ab$), moeten alle banden een keertje op hetzelfde level komen om mogelijke verticale breuklijnen te kunnen breken.

Gebeurt dit voordat we de volledige p -bij- q rechthoek hebben betegeld, dan ontstaat er een horizontale breuklijn. Als de banden voor het eerst op hetzelfde level komen zodra we het volledige p -bij- q rechthoek hebben betegeld (oftewel we hebben de bodem bereikt), dan ontstaat er een verticale breuklijn, gelegen tussen een tegel met lengte a horizontaal en een tegel met lengte b horizontaal op diepte 0 (trek deze rechte lijn door naar beneden tot de bodem).

Dit levert een tegenspraak, aangezien we een breuklijnvrĳe betegeling moeten hebben. Dus we kunnen p schrijven als $xa + yb$ met $x, y > 0$ en $xa > ab$ of $yb > ab$.

Het geval dat de TOP en BODEM van ons p -bij- q rechthoek lengte q heeft gaat analoog. Dus ook q kunnen schrijven als $xa + yb$ met $x, y > 0$ en $xa > ab$ of $yb > ab$. □

Lemma 4.7. Als we p maar op precies één manier als $xa + yb$ met $x, y > 0$ kunnen uitdrukken, dan moet $xa, yb \leq ab$ gelden.

Bewijs. We nemen aan dat we maar op één manier kunnen schrijven: $p = xa + yb$ met $x, y > 0$.

Stel nu dat $xa > ab$ geldt. Dan moet $x > b$ gelden en kunnen we schrijven $x = b + n$

met $n > 0$.

Hierdoor kunnen we schrijven:

$$\begin{aligned}p &= xa + yb \\p &= (b + n)a + yb \\p &= na + ab + yb \\p &= na + (a + y)b\end{aligned}$$

$n, y, a > 0$ dus komt hieruit dat we p op twee manieren als $xa + yb$ met $x, y > 0$ kunnen uitdrukken, wat in tegenspraak is met onze aanname. Dus moet gelden $xa \leq ab$. Op analoge wijze geldt dat $yb \leq ab$ is. □

Gevolg 4.8 (Gevolg Stelling 1.1). Neem aan dat een rechthoek een breuklijnrije betegeling heeft met a -bij- b tegels. Als deze betegeling een diepte 0 band verzameling heeft met een breedte die geen veelvoud is van ab , dan is de diepte van onze rechthoek een veelvoud van de diepte van de tegels in deze band verzameling.

Bewijs. We hebben een p -bij- q rechthoek, de breedte van het rechthoek is p en diepte van het rechthoek is q . We hebben een diepte 0 band verzameling met breedte $x \cdot a$, met $x > 0$. Dus de tegels liggen met lengte a parallel aan de TOP (lengte p) en de diepte is b . Stel dat de breedte van deze band verzameling geen veelvoud is van ab . Dat betekent dat b geen deler is van p . Volgens Stelling 1.1 moet dan gelden dat b een deler moet zijn van q . Dus de diepte van onze rechthoek is een veelvoud van de diepte van de band verzameling. □

Nu is het best vervelend om elke keer te checken of we p (of q) kunnen schrijven als $xa + yb$ met $x, y > 0$ op twee verschillende manieren. Het is makkelijker om maar één schrijfwijze ergens van te vinden. Ronald L. Graham gaf voor voorwaarde **2** de onderstaande suggestie[3], die we vervolgens zelf hebben bewezen.

Lemma 4.9. Neem aan dat $a, b, p, q \in \mathbb{N}$, $pq > ab$ en $\text{ggd}(a, b) = 1$. Dan geldt de volgende equivalentie:

We kunnen p schrijven als $xa + yb$ met $x, y \in \mathbb{N}$ op minstens twee verschillende manieren dan en slechts dan als we kunnen $p - ab$ schrijven als $xa + yb$ met $x, y \in \mathbb{N}$ op minstens één manier.

Bewijs. We gaan beide kanten op apart bewijzen.

(\Leftarrow): We nemen aan dat $\exists x, y \in \mathbb{N}$ zodanig dat $p - ab = xa + yb$.

Dan kunnen we schrijven:

$$p = xa + yb + ab$$

Dit betekent dat we ook kunnen schrijven:

$$p = (x + b)a + yb \qquad p = xa + (y + a)b$$

$x \neq x + b > 0$ en $y \neq y + a > 0$, want $a, b, x, y \in \mathbb{N}$. Dus hiermee geven we twee gewenste verschillende manieren waarop we p kunnen schrijven.

(\Rightarrow): Stel $p = xa + yb$ en $p = x'a + y'b$ met $x, y, x', y' \in \mathbb{N}$ zijn de twee verschillende manieren, dus er geldt $x \neq x'$ en $y \neq y'$. Dan kunnen we schrijven:

$$p - ab = xa + yb - ab \qquad p - ab = x'a + y'b - ab$$

Dit betekent dat we ook kunnen schrijven:

$$\begin{aligned} p - ab &= (x - b)a + yb & p - ab &= (x' - b)a + y'b \\ p - ab &= xa + (y - a)b & p - ab &= x'a + (y' - a)b \end{aligned}$$

Dus als een van de volgende vier gevallen $a < y$, $b < x$, $a < y'$, $b < x'$ geldt dan kunnen we op minstens één manier $p - ab$ in de gewenste vorm schrijven. Want, stel $a < y$, dan $(y - a) \in \mathbb{N}$, dan is $p - ab = xa + (y - a)b$ de gezochte schrijfwijze. Dit gaat analoog voor de andere drie gevallen ($b < x$, $a < y'$ en $b < x'$).

Stel geen van deze vier gevallen geldt, dan geldt er $a \geq y$, $b \geq x$, $a \geq y'$ en $b \geq x'$.

Neem zonder verlies van algemeenheid aan dat $x' < x$. Dan geldt dat $y < y'$, want $xa + yb = p = x'a + y'b$.

$xa + yb = x'a + y'b$ levert ons de vergelijking: $(x - x')a = (y' - y)b$.

Aangezien $\text{ggd}(a, b) = 1$ moet gelden $a \mid (y' - y)$ en $b \mid (x - x')$.

Dan moet gelden $x - x' \geq b$.

Hierdoor geldt $x = x - x' + x' \geq b + x' > b$ (want $x' \in \mathbb{N}$) en dit geeft een tegenspraak aangezien we hadden aangenomen dat $b \geq x$.

Dus er geldt altijd één van de vier gevallen ($a < y$, $b < x$, $a < y'$, $b < x'$) waardoor we $p - ab$ dus altijd kunnen schrijven als $xa + yb$ met $x, y \in \mathbb{N}$ op minstens één manier. □

Dus als we Lemma 4.9 toepassen op p en q dan zouden we voorwaarde **2** van de stelling van R.L. Graham kunnen vervangen door:

We kunnen $p - ab$, $q - ab$ schrijven als $xa + yb$ met $x, y \in \mathbb{N}$ op minstens één manier.

4.3 Het bewijs

Nu het nodige voorbereidingswerk is gedaan gaan we weer terug naar de Stelling van R. L. Graham en gaan we deze ook daadwerkelijk bewijzen.

Stelling 1.2 (Stelling van R. L. Graham) $p, q, a, b \in \mathbb{N}$. *Neem aan dat $a \neq b$, $pq > ab$ en $\text{ggd}(a, b) = 1$.*

*Een breuklijnvrĳe betegeling van een p -bij- q rechthoek met a -bij- b tegels bestaat dan en slechts dan als er wordt voldaan aan voorwaarden **1** t/m **3**.*

- 1. Zowel a als b delen p of q .*
- 2. Zowel p als q kunnen we uitdrukken als $xa + yb$ met $x, y > 0$ op minstens twee verschillende manieren.*
- 3. Voor $\{a, b\} = \{1, 2\}$ geldt $(p, q) \neq (6, 6)$.*

Bewijs. We gaan beide kanten op apart bewijzen.

(\Rightarrow): We nemen aan dat een breuklijnvrĳe betegeling van een p -bij- q rechthoek met a -bij- b tegels bestaat.

Als een breuklijnvrĳe betegeling bestaat betekent dat dat er ook een gewone betegeling van een p -bij- q rechthoek met a -bij- b tegels bestaat. Dus volgens Stelling 1.1 moeten zowel a als b delers zijn van p of q . Dus voorwaarde **1** geldt.

Volgens Lemma 4.6 moeten we p en q kunnen uitdrukken als $xa + yb$, met $x, y > 0$ en $xa > ab$ of $yb > ab$. Dit betekent dat $x > b$ of $y > a$ moet zijn.

Als $x > b$, dan kunnen we schrijven $x = b + n$ met $n \in \mathbb{N}$. Met als gevolg dat we kunnen schrijven:

$$p = (b + n)a + yb \qquad p = na + (a + y)b$$

(Analoog voor q)

Als $y > a$, dan kunnen we schrijven $y = a + m$ met $m \in \mathbb{N}$. Met als gevolg dat we kunnen schrijven:

$$p = xa + (a + m)b \qquad p = (x + b)a + mb$$

(Analoog voor q)

$n, m \in \mathbb{N}$ dus in beide gevallen kunnen we p uitdrukken als $xa + yb$, met $x, y > 0$ op minstens twee verschillende manieren. Op dezelfde manier kunnen we q uitdrukken als $xa + yb$, met $x, y > 0$ op minstens twee verschillende manieren. Dus voorwaarde **2** geldt.

Zoals in het bewijs van stelling 3.1 als is bewezen bestaat er geen breuklijnvrĳe betegeling van een 6-bij-6 oppervlak met 1-bij-2 tegels. Dus voorwaarde **3** geldt.

(\Leftarrow): We nemen aan dat voorwaarden **1** t/m **3** gelden. We hebben een p -bij- q rechthoek en a -bij- b tegels.

Om aan voorwaarde **2** te voldoen moeten we volgens Lemma 4.9 $p - ab$ en $q - ab$ kunnen schrijven als $xa + yb$ met $x, y > 0$. Dit betekent dat we p en q moeten kunnen schrijven als $ab + xa + yb$ met $x, y > 0$.

We bekijken eerst de a -bij-1 tegels.

Neem aan dat $b < a$ en dat $b = 1$. Dan moeten we dus p en q kunnen schrijven als $a \cdot 1 + xa + y = (x + 1)a + y$ met $x, y > 0$. Stel nu $y > a$ dan kunnen we schrijven $y = ta + n$ met $t \in \mathbb{N}$ en $0 \leq n < a$, oftewel $(x + 1)a + y = (x + 1)a + ta + n = (x + t + 1)a + n$ met $x, t > 0$ en $0 \leq n < a$. Dus p en q kunnen van een van de volgende vormen zijn:

- $va + n$ met $0 < n < a$ en $v \geq 2$
- wa met $w \geq 3$

Als dit niet het geval is dan kunnen we p of q niet schrijven als $xa + yb$ met $x, y > 0$ op twee verschillende manieren.

Voorwaarden **1** en **2** zorgen ervoor dat we de volgende mogelijke p -bij- q rechthoeken krijgen:

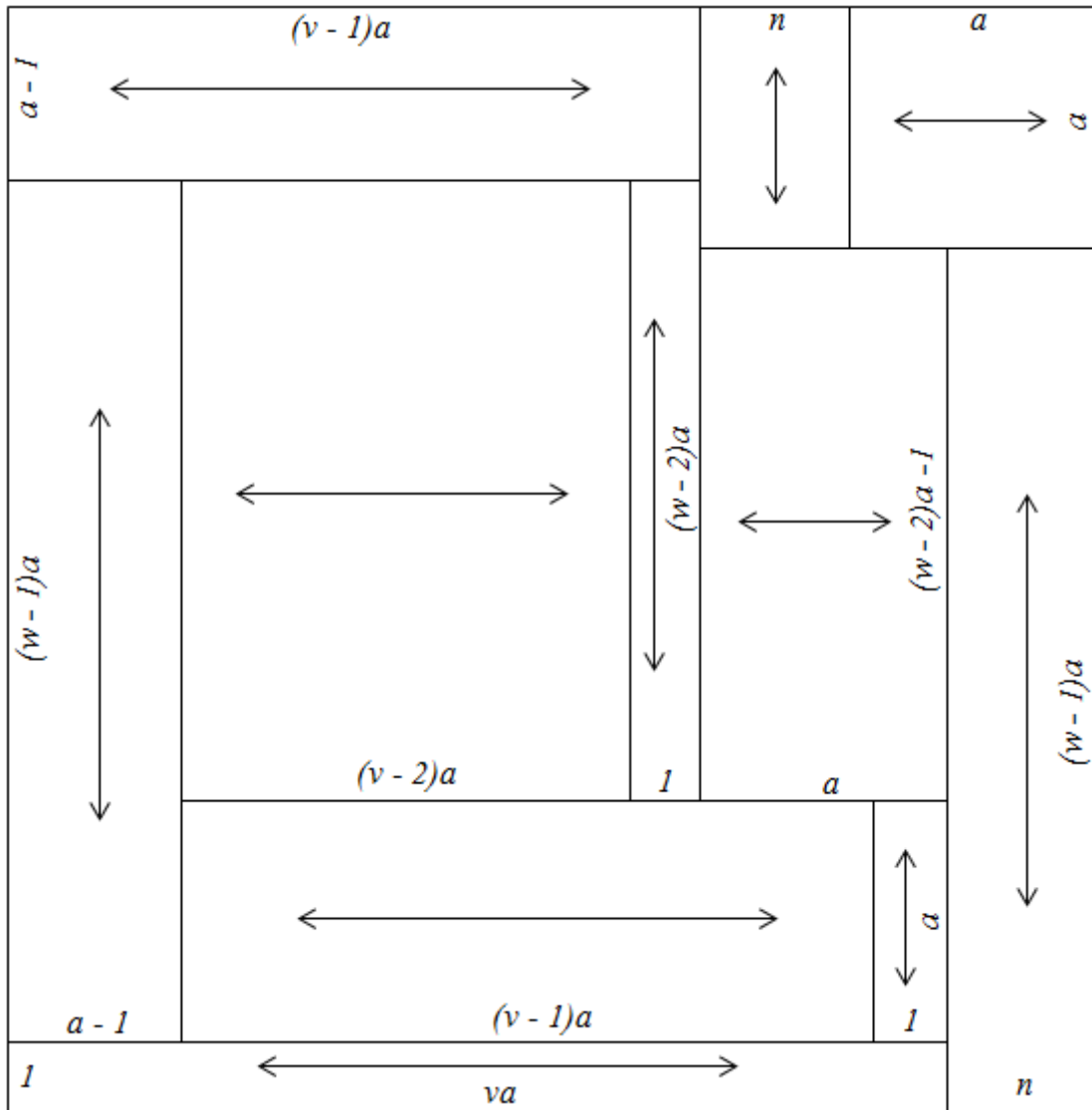
(A) $va + n$ -bij- wa met $0 < n < a$, $v \geq 2$ en $w \geq 3$

(B) w_1a -bij- w_2a met $w_1, w_2 \geq 3$

Opmerking. Een $v_1a + n_1$ -bij- $v_2a + n_2$ rechthoek behoort niet bij deze rechthoeken aangezien a geen deler is van zowel $v_1a + n_1$ als $v_2a + n_2$. Oftewel er wordt niet voldaan aan voorwaarde **1**.

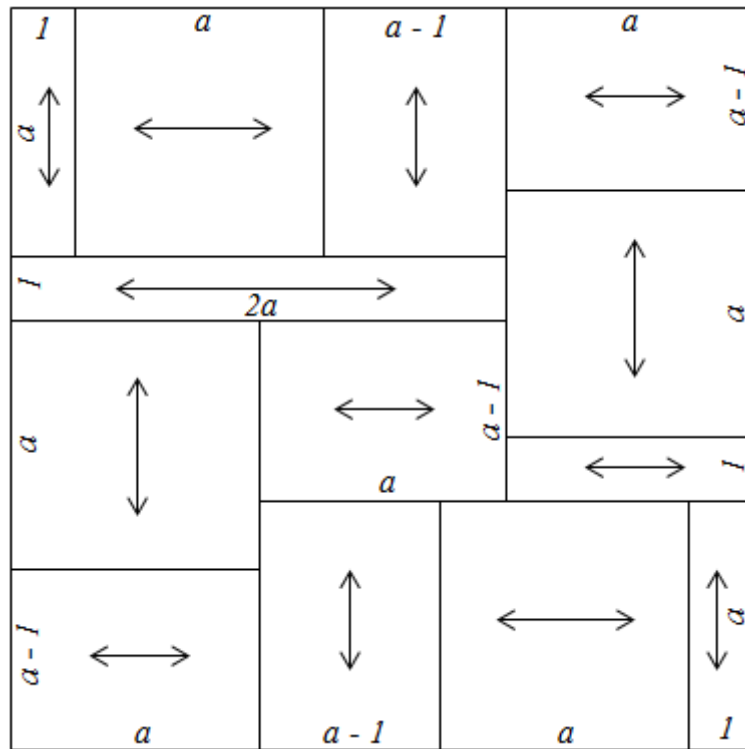
Nu geven we voor elk van deze rechthoeken een constructie voor een breuklijn vrije betegeling. Hierbij liggen de tegels met de lange zijde (we hadden aangenomen dat $1 = b < a$) parallel aan de pijlen.

Constructie voor (A):



Figuur 21: Constructie voor een breuklijnrije betegeling van een $va + n$ -bij- wa rechthoek, met $0 < n < a$, $v \geq 2$, $w \geq 3$ en $1 = b < a$.

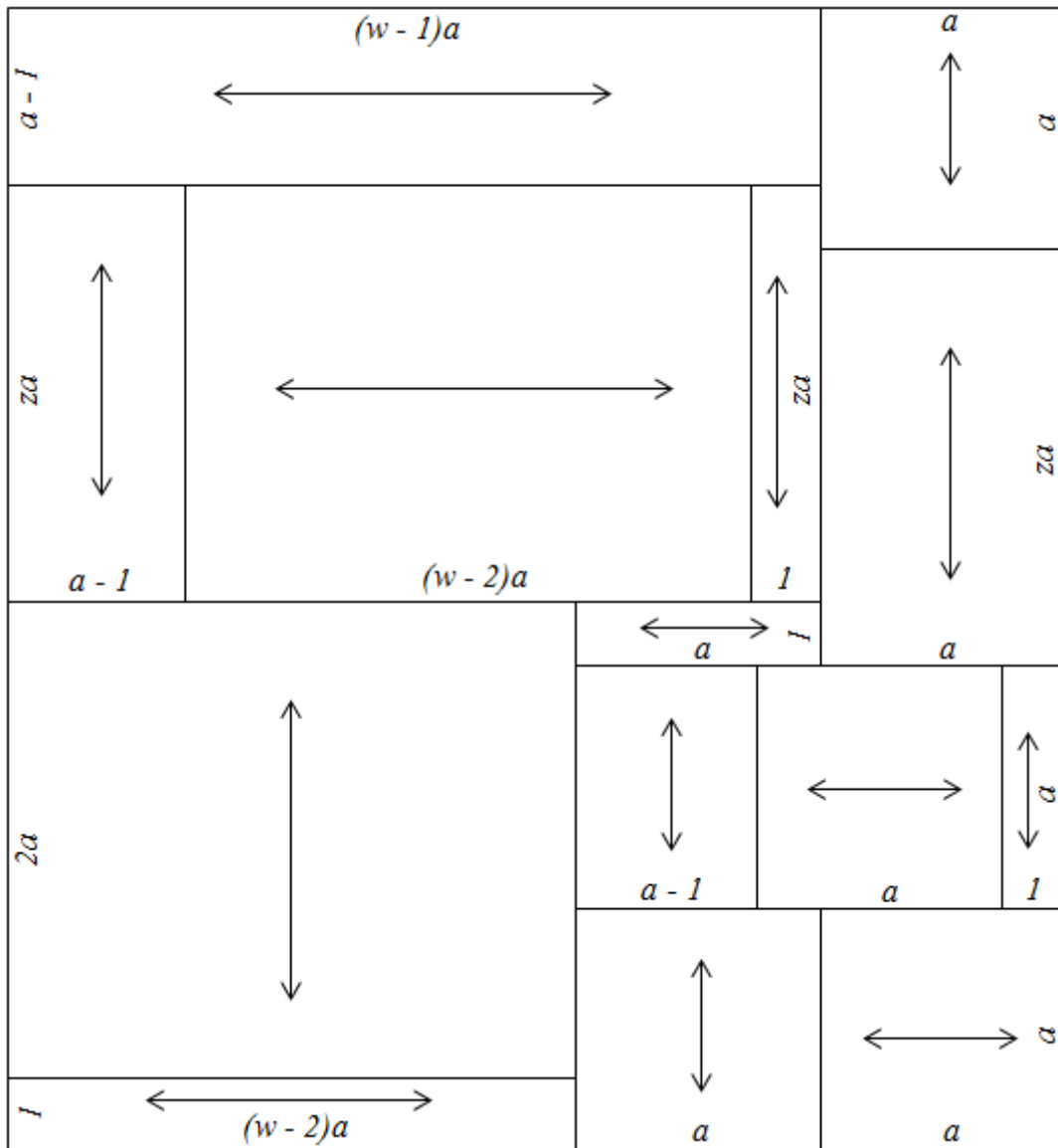
Constructie voor **(B)** met $w_1 = w_2 = 3$:



Figuur 22: Constructie voor een breuklijn vrije betegeling van een $3a$ -bij- $3a$ rechthoek, met $a \geq 3$ en $1 = b < a$.

Opmerking. In Figuur 22 geldt dat $a \geq 3$, want voor $a = 2$ is deze betegeling niet breuklijn vrij. Zoals we al hebben gezien is er ook geen breuklijn vrije betegeling van een 6 -bij- 6 rechthoek met 1 -bij- 2 tegels mogelijk (zie voorwaarde **3**).

Constructie voor **(B)** met $w_1 = 3 + z$ en $w_2 = w$:



Figuur 23: Constructie voor een breuklijnrije betegeling van een $3a + za$ -bij- wa rechthoek, met $z \geq 1$, $w \geq 3$ en $1 = b < a$.

Dus voor a -bij- 1 tegels geldt dat er een breuklijnrije betegeling bestaat, als er wordt voldaan aan voorwaarden **1** t/m **3**.

Nu gaan we de overgebleven a -bij- b tegels bekijken.

Neem aan dat $b < a$ en dat $b \neq 1$. Om aan voorwaarde **2** te voldoen moeten we volgens Lemma 4.9 $p - ab$ en $q - ab$ kunnen schrijven als $xa + yb$ met $x, y > 0$. Dit betekent dat we p en q moeten kunnen schrijven als $ab + xa + yb$ met $x, y > 0$.

We kunnen schrijven $y = va + t$ en $x = wb + s$ met $v, w \geq 0$, $0 \leq t < a$ en $0 \leq s < b$.

Als $y > a$ dan is $y = va + t$ met $v \in \mathbb{N}$ en $0 \leq t < a$.

Als $x > b$ dan is $x = wb + s$ met $w \in \mathbb{N}$ en $0 \leq s < b$.

Nu kunnen we schrijven $ab + (wb + s)a + (va + t)b = (1 + w + v)ab + sa + tb$. Dus p en q kunnen van een van de volgende vormen zijn:

- $kab + sa + tb$ met $0 < s < b$, $0 < t < a$ en $k \geq 1$
- $gab + sa$ met $0 < s < b$ en $g \geq 2$
- $fab + tb$ met $0 < t < a$ en $f \geq 2$
- hab met $h \geq 3$

Als dit niet het geval is dan kunnen we p en/of q niet schrijven als $xa + yb$ met $x, y > 0$ op twee verschillende manieren.

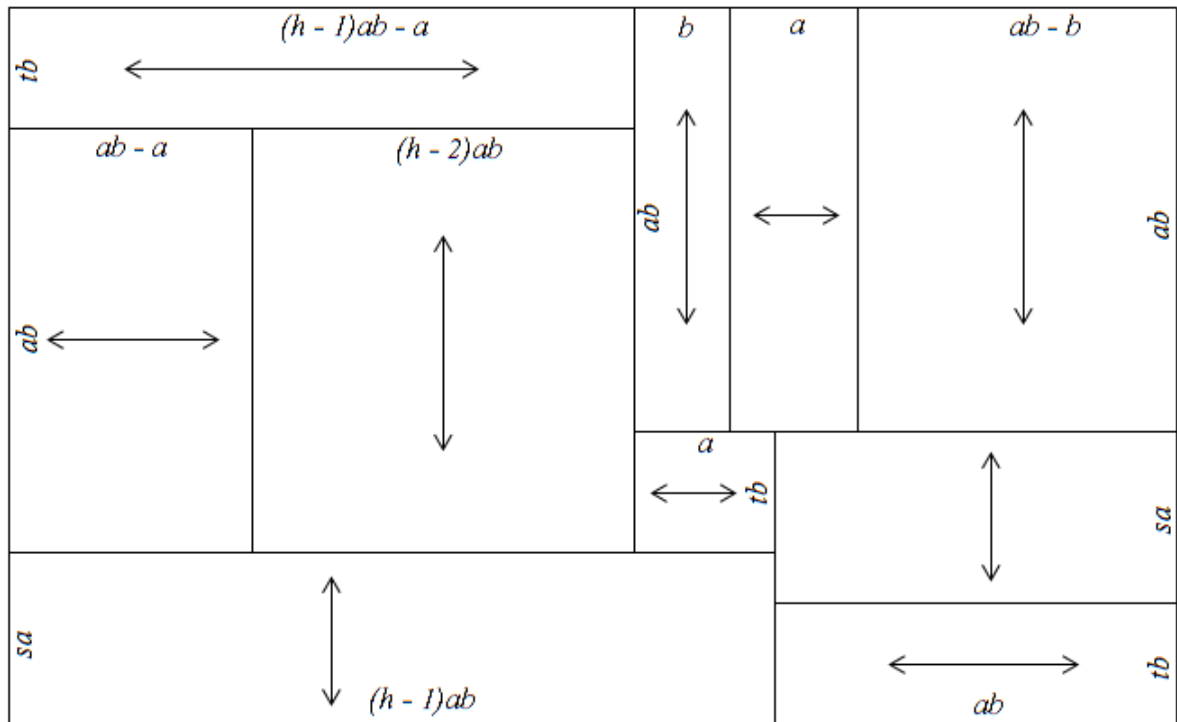
Voorwaarde **1** zorgt ervoor dat we dan de volgende mogelijke p -bij- q rechthoeken krijgen:

- (a) $kab + sa + tb$ -bij- hab met $0 < s < b$, $0 < t < a$, $k \geq 1$ en $h \geq 3$
- (b) $gab + sa$ -bij- $fab + tb$ met $0 < s < b$, $0 < t < a$ en $g, f \geq 2$
- (c) $gab + sa$ -bij- hab met $0 < s < b$, $g \geq 2$ en $h \geq 3$
- (d) hab -bij- $fab + tb$ met $0 < t < a$, $f \geq 2$ en $h \geq 3$
- (e) h_1ab -bij- h_2ab met $h_1, h_2 \geq 3$

Nu geven we voor elk van deze rechthoeken een door Peter J. Robinson[2] geïnspireerde constructie voor een breuklijnvrĳe betegeling. Hierbij liggen de tegels met de lange zijde (we hadden aangenomen dat $b < a$) parallel aan de pijlen.

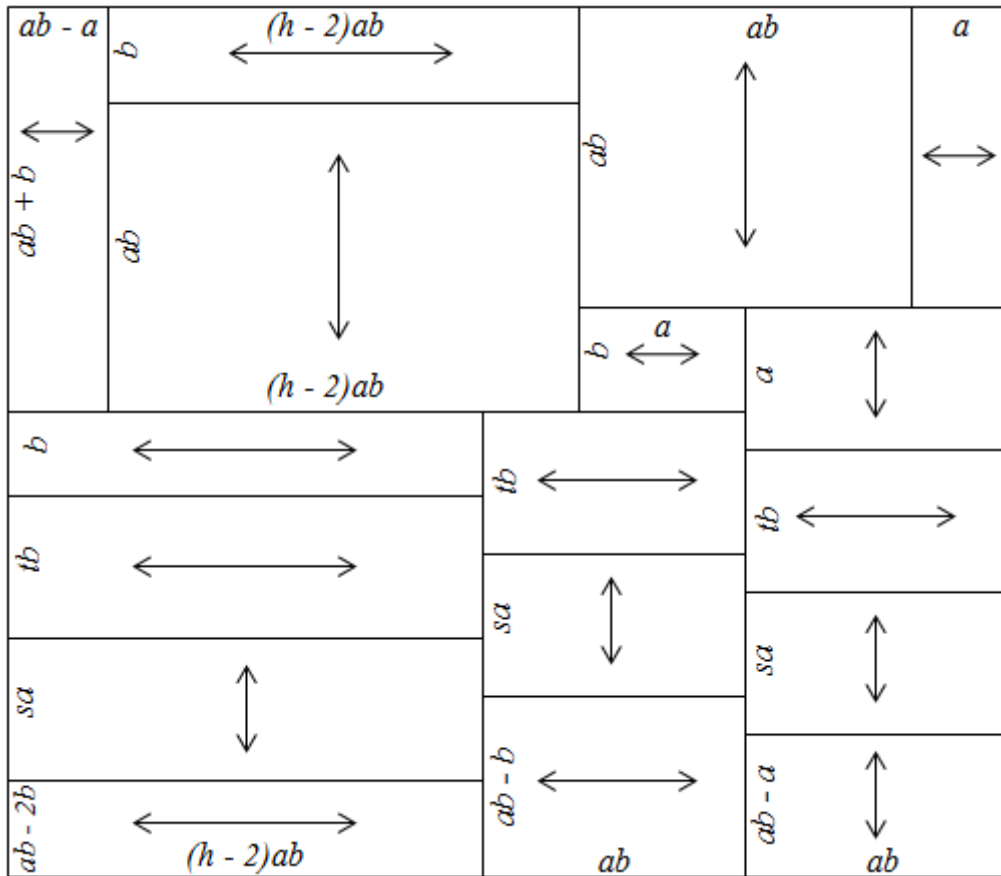
Voor sommige rechthoeken (bijvoorbeeld geval (c)) zijn er meerdere constructies nodig, hierdoor kan het zijn dat de voorwaarden voor bijvoorbeeld g iets anders kunnen zijn in specifieke constructies.

Constructie voor (a) met $k = 1$:



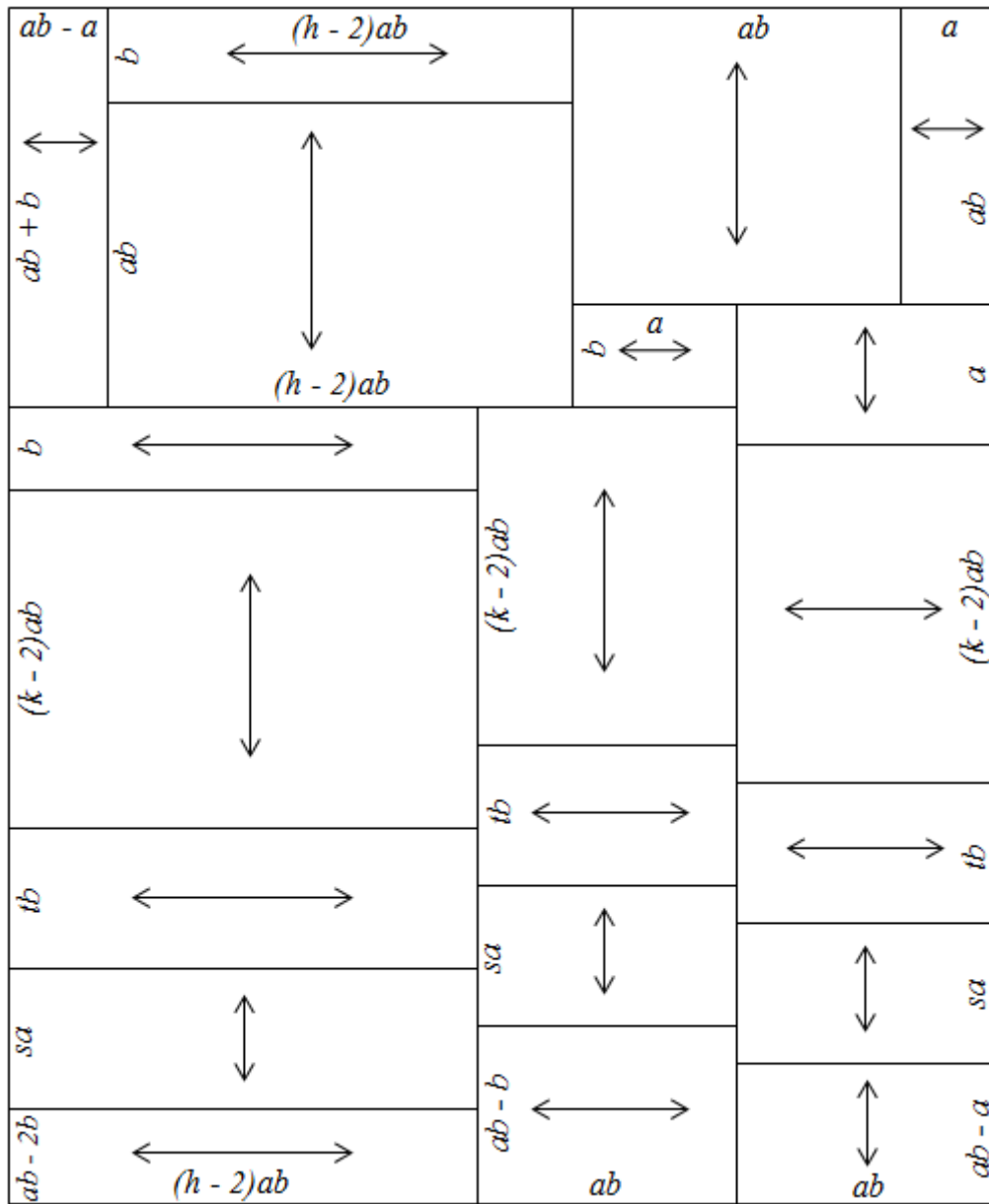
Figuur 24: Constructie voor een breuklijnrije betegeling van een $ab + sa + tb$ -bij- hab rechthoek, met $0 < s < b$, $0 < t < a$, $h \geq 3$ en $1 \neq b < a$.

Constructie voor (a) met $k = 2$:



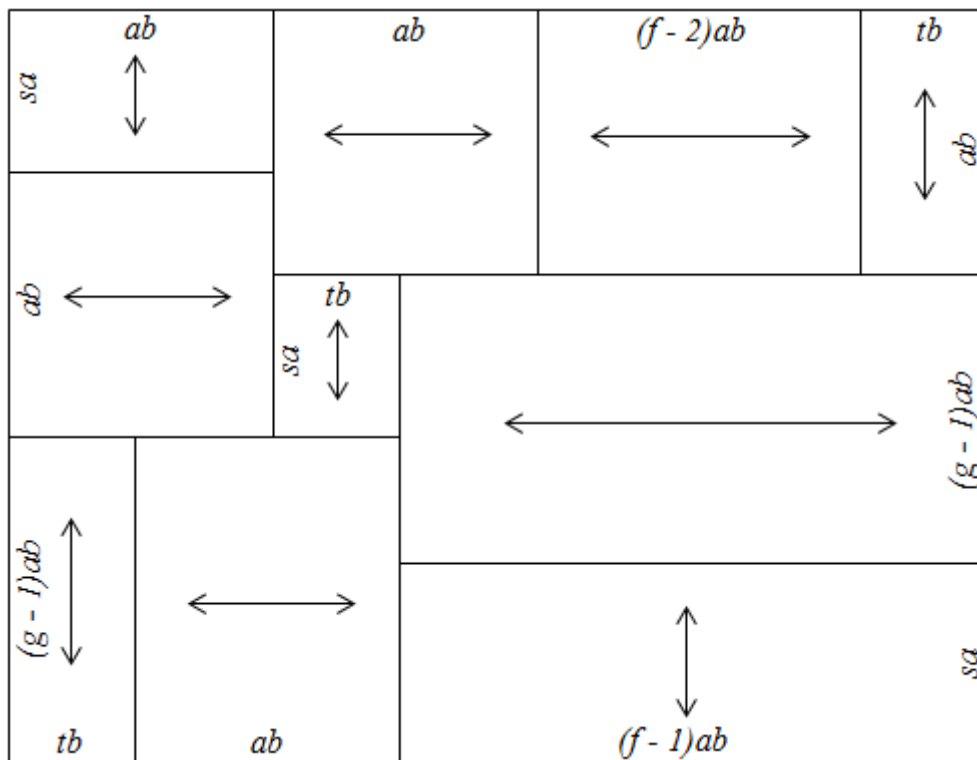
Figuur 25: Constructie voor een breuklijnrije betegeling van een $2ab + sa + tb$ -bij- hab rechthoek, met $0 < s < b$, $0 < t < a$, $h \geq 3$ en $1 \neq b < a$.

Constructie voor (a) met $k \geq 3$:



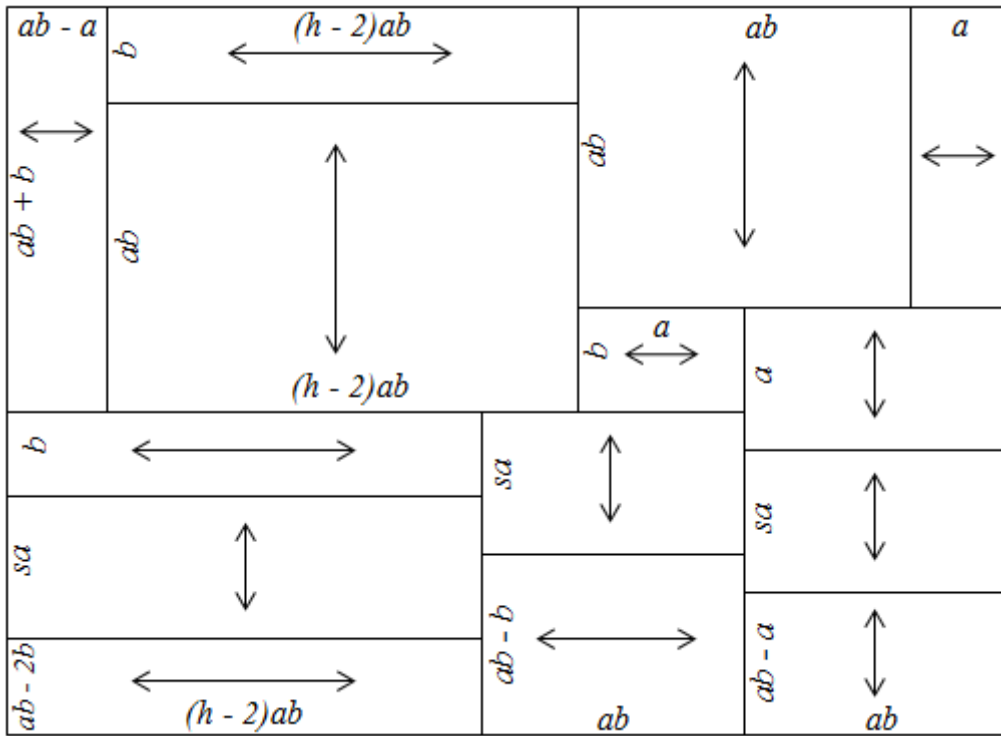
Figuur 26: Constructie voor een breuklijnrijve betegeling van een $kab+sa+tb$ -bij- hab rechthoek, met $0 < s < b$, $0 < t < a$, $h \geq 3$ en $1 \neq b < a$.

Constructie voor (b):



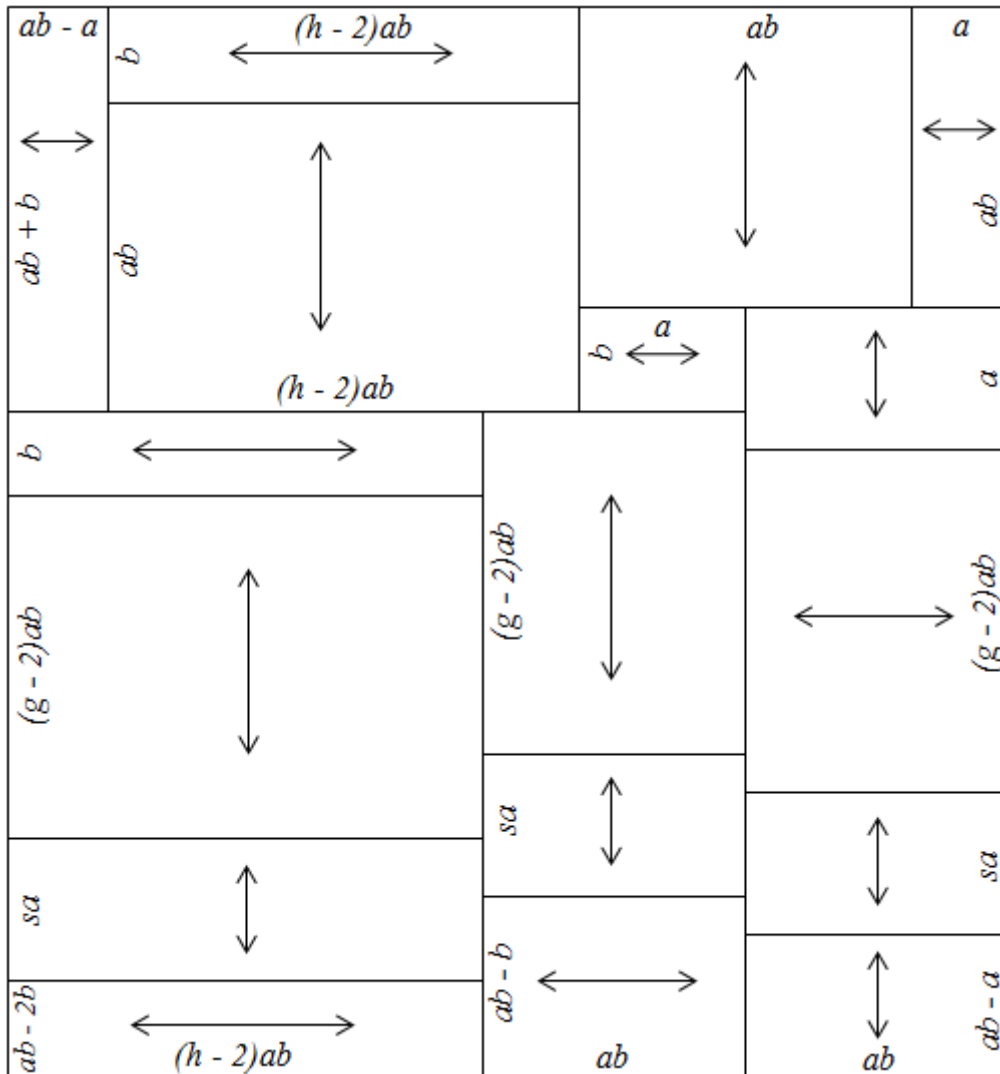
Figuur 27: Constructie voor een breuklijnrije betegeling van een $gab+sa$ -bij- $fab+tb$ rechthoek, met $0 < s < b$, $0 < t < a$, $f, g \geq 2$ en $1 \neq b < a$.

Constructie voor (c) met $g = 2$:



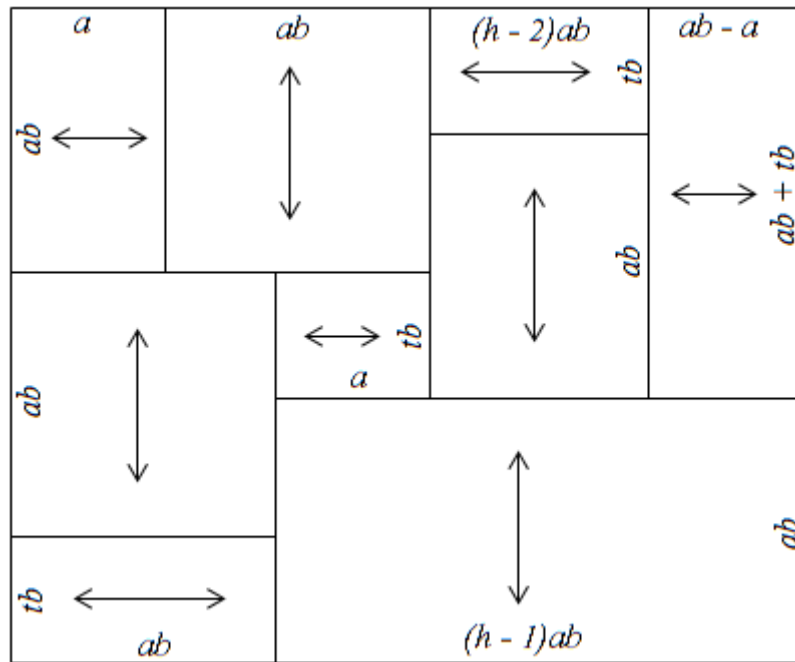
Figuur 28: Constructie voor een breuklijnrije betegeling van een $2ab + sa$ -bij- hab rechthoek, met $0 < s < b$, $h \geq 3$ en $1 \neq b < a$.

Constructie voor (c) met $g \geq 3$:



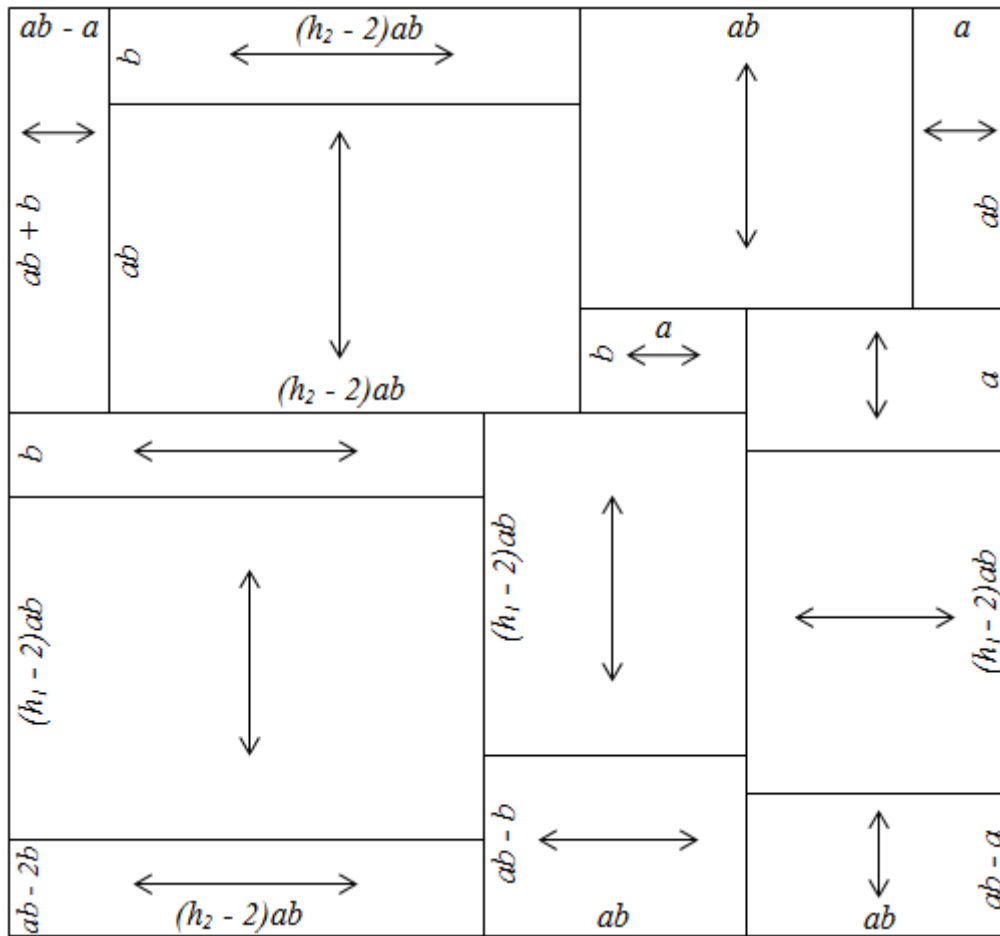
Figuur 29: Constructie voor een breuklijnrije betegeling van een $gab + sa$ -bij- hab rechthoek, met $0 < s < b$, $h \geq 3$ en $1 \neq b < a$.

Constructie voor (d) met $f = 2$:



Figuur 30: Constructie voor een breuklijnrije betegeling van een hab -bij- $2ab + tb$ rechthoek, met $0 < t < a$, $h \geq 3$ en $1 \neq b < a$.

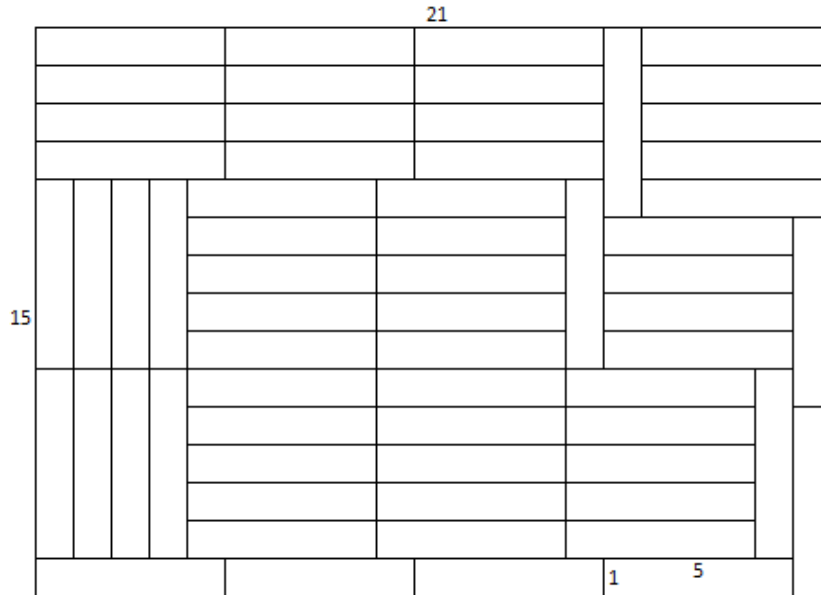
Constructie voor (e):



Figuur 32: Constructie voor een breuklijnrije betegeling van een h_1ab -bij- h_2ab rechthoek, met $h_1, h_2 \geq 3$ en $1 \neq b < a$.

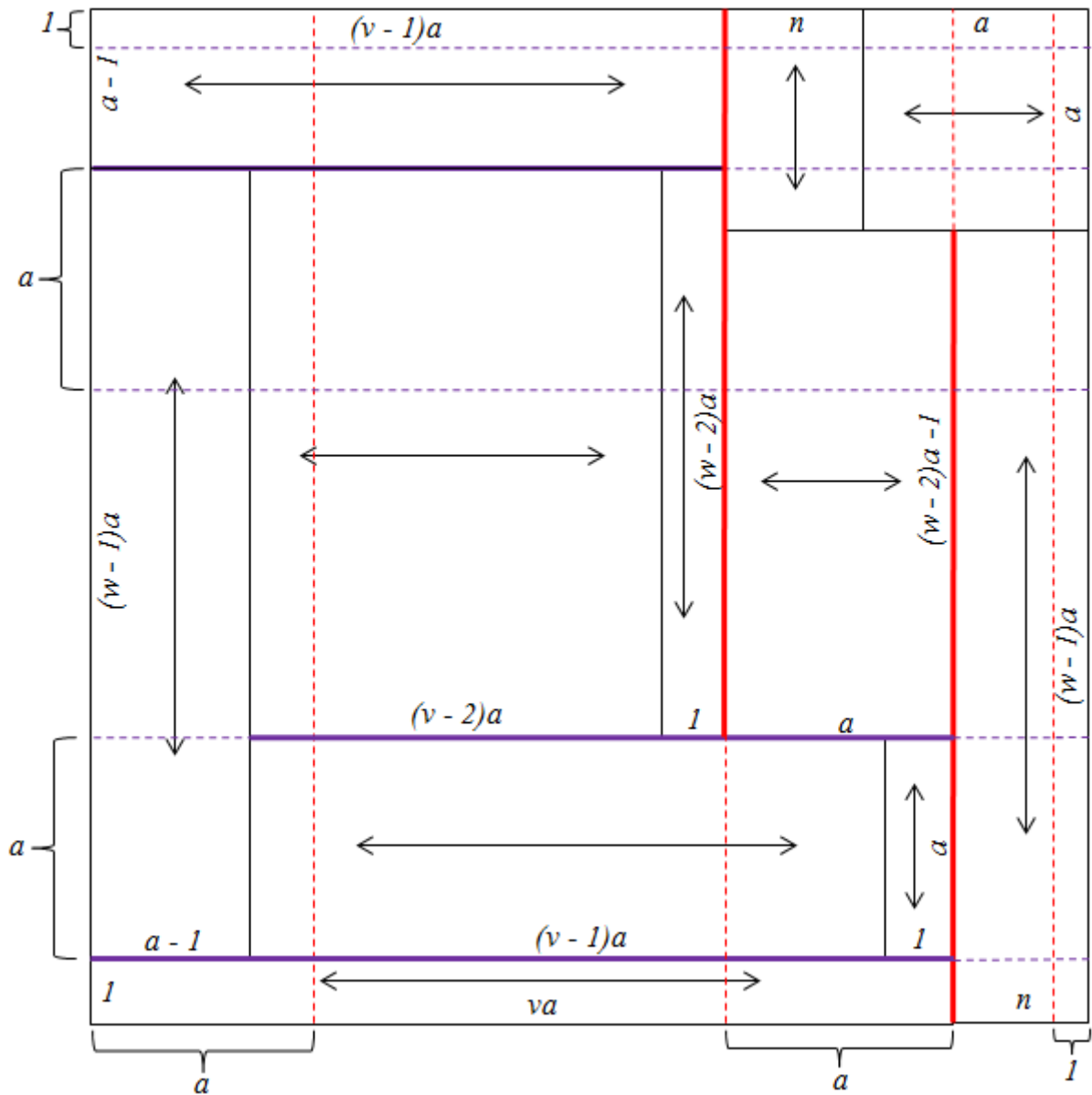
Dus ook voor de rest van de a -bij- b tegels ($1 \neq b < a$) geldt dat er een breuklijnrije betegeling bestaat, als er wordt voldaan aan voorwaarden **1** t/m **3**.

Een voorbeeld van de constructie in Figuur 21 is de volgende breuklijnrije betegeling van een 21-bij-15 rechthoek met 1-bij-5 tegels. Dus $a = 5$, $b = 1$, $v = 4$, $w = 3$ en $n = 1$.



Figuur 33: Breuklijnrije betegeling van een 15-bij-21 rechthoek met 1-bij-5 tegels, door middel van constructie (A).

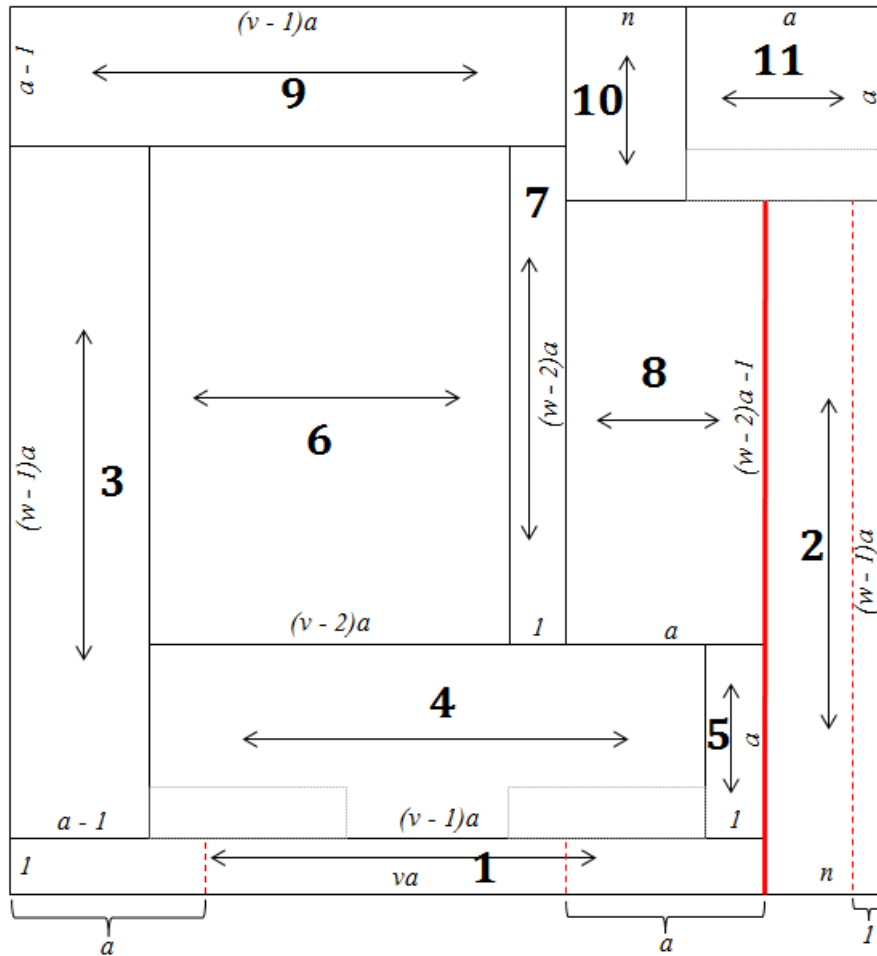
Nu is het voorbeeld van hierboven breuklijnrij, maar het is niet meteen duidelijk dat de gegeven constructies ook allemaal echt breuklijnrij zijn. Om dit te laten zien, moeten we alle mogelijke breuklijnen in de constructie nagaan. Neem bijvoorbeeld de constructie uit Figuur 21.



Figuur 34: Constructie voor een breuklijnrije betegeling van een $va + n$ -bij- wa rechthoek met mogelijke breuklijnen.

In bovenstaande afbeelding zijn mogelijke horizontale (paarse) en verticale (rode) breuklijnen weergegeven, bekeken vanuit respectievelijk de linkerkant en onderzijde. Voor al deze mogelijke breuklijnen moeten we nagaan of ze ergens gebroken worden.

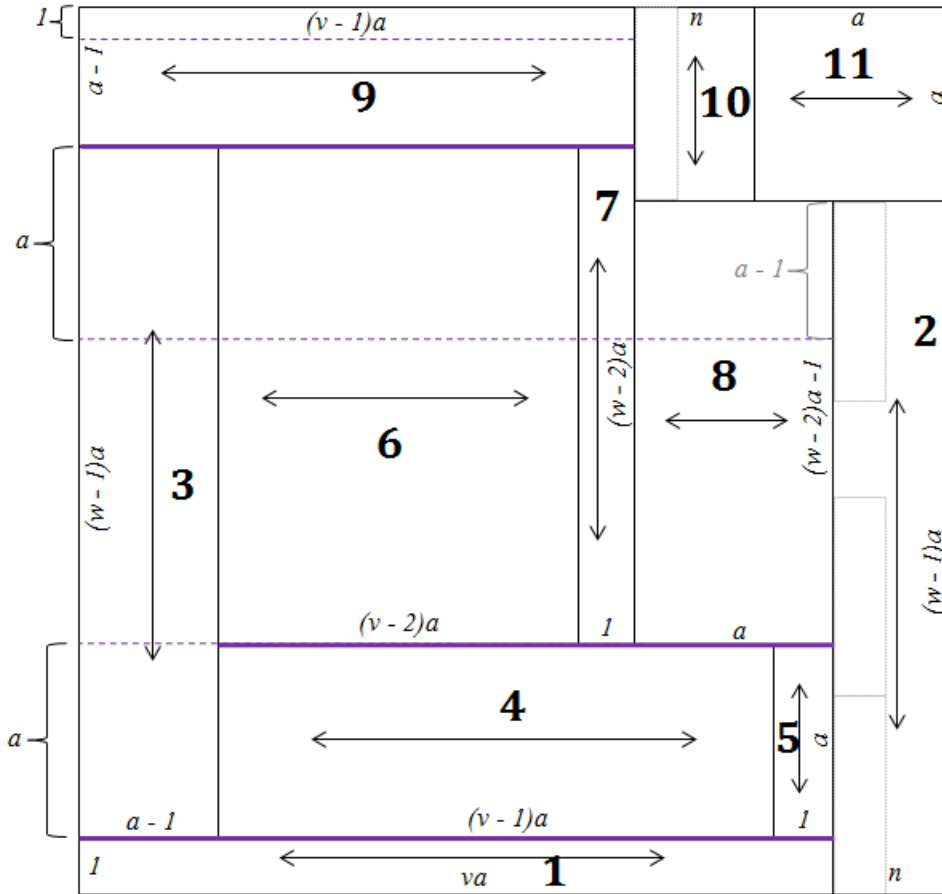
Als we alleen naar de mogelijke verticale breuklijnen vanaf de onderkant bekijken, zien we dat deze allemaal worden gebroken (zie Figuur 35 inclusief de daar onderstaande toelichting).



Figuur 35: Constructie voor een breuklijnrije betegeling van een $va + n$ -bij- wa rechthoek met mogelijke verticale breuklijnen.

- De mogelijke breuklijnen gecreëerd in blok 1 worden gebroken door de tegels in blok 4.
- De mogelijke breuklijnen gecreëerd in blok 2 worden gebroken door de tegels in blok 11 aangezien $0 < n < a$.
- De mogelijke breuklijn tussen blok 1 en blok 2 wordt gebroken door de tegels in blok 11 aangezien $n < a$.

Als we alleen naar de mogelijke horizontale breuklijnen vanaf de linkerkant bekijken, zien we dat deze allemaal worden gebroken (zie Figuur 36 inclusief de daar onderstaande toelichting).



Figuur 36: Constructie voor een breuklijnrije betegeling van een $va + n$ -bij- wa rechthoek met mogelijke horizontale breuklijnen.

- De mogelijke breuklijnen gecreëerd in blok 9 worden gebroken door de tegels in blok 10 aangezien $a - 1 < a$.
- De mogelijke breuklijnen gecreëerd in blok 3 worden altijd gebroken door de tegels in blok 2.
- De mogelijke breuklijn tussen blok 1 en blok 3 wordt gebroken door de tegels in blok 2 aangezien $1 < a$.
- De mogelijke breuklijn tussen blok 3 en blok 9 wordt gebroken door de tegels in blok 10 aangezien $a - 1 < a$.

Dus constructie in Figuur 21 is echt breuklijnrij. Op dezelfde manier kan je nagaan dat alle andere constructies ook breuklijnrij zijn.

Dus als er wordt voldaan aan voorwaarden **1** t/m **3**, dan bestaat er een breuklijnrije betegeling van een p -bij- q rechthoek met a -bij- b tegels.

Hiermee is Stelling 1.2 bewezen. □

5 Stelling van R. L. Graham met specifieke tegels

Voorwaarde **2** van De Stelling van R. L. Graham is als volgt geformuleerd: "Zowel p als q kunnen we uitdrukken als $xa + yb$ met $x, y > 0$ op minstens twee verschillende manieren."

In het bewijs van De Stelling van R. L. Graham (Subsectie 4.3) hebben we nu gezien waarom deze voorwaarde moet gelden. Maar als je terug kijkt naar Sectie 3 dan zien we dat voor de 1-bij-2 tegel deze voorwaarde wordt herschreven naar: " $p \geq 5$ en $q \geq 5$ ". Dit roept de vraag op of we voorwaarde **2** van De Stelling van R. L. Graham niet anders kunnen formuleren zodanig dat hij wellicht sneller te checken is voor gegeven p, q, a en b .

Om dit te onderzoeken ben ik eerst naar De Stelling van R. L. Graham voor specifiekere tegels gaan kijken. Zo bekijk ik De Stelling van R. L. Graham voor een 1-bij- m tegel en een 2-bij- m tegel.

Stelling 5.1. *Neem aan dat $pq > m$ en $m \geq 2$.*

Een breuklijnvrige betegeling van een p -bij- q rechthoek met 1-bij- m tegels bestaat dan en slechts dan als er wordt voldaan aan voorwaarden 1' t/m 3'.

1'. $m \mid p$ of $m \mid q$.

2'. $p, q \geq 2m + 1$.

3'. Als $m = 2$ dan geldt $(p, q) \neq (6, 6)$.

Bewijs. Deze stelling is eigenlijk een aangepaste versie van Stelling 1.2. Als je Stelling 1.2 toepast op een 1-bij- m tegel ($b = 1, a = m$), krijg je de volgende stelling: $p, q \in \mathbb{N}$. Neem aan dat $pq > m \geq 2$.

Een breuklijnvrige betegeling van een p -bij- q rechthoek met een 1-bij- m tegel bestaat dan en slechts dan als er wordt voldaan aan voorwaarden **1** t/m **3**.

1. Zowel 1 als m delen p of q .
2. Zowel p als q kunnen we uitdrukken als $x \cdot 1 + y \cdot m$ met $x, y \in \mathbb{N}$ op minstens twee verschillende manieren.
3. Voor $\{1, m\} = \{1, 2\}$ geldt $(p, q) \neq (6, 6)$

We gaan bewijzen dat Stelling 5.1 dezelfde bewering is als de stelling gegeven in dit bewijs (gegeven hierboven).

De voorwaarden $pq > m$ en $m \geq 2$ zijn in beide stellingen gelijk. Dus nu moeten we alleen nog bewijzen dat voorwaarden **1** t/m **3** equivalent zijn aan voorwaarden 1' t/m 3'.

Aangezien 1 altijd een deler is van een natuurlijk getal kan je voorwaarde **1** reduceren tot: m deelt p of q . Oftewel m is een deler van p of m is een deler van q (notatie: $m \mid p$ of $m \mid q$). Dus voorwaarde **1** is equivalent aan voorwaarde 1'.

Als $\{1, m\} = \{1, 2\}$ geldt, dan betekent dit dat $m = 2$. Andersom geldt ook als $m = 2$ dan geldt $\{1, m\} = \{1, 2\}$. Dus voorwaarde **3** is equivalent aan voorwaarde $3'$.

Stel we kunnen p en q uitdrukken als $x \cdot 1 + y \cdot m$ met $x, y \in \mathbb{N}$ op minstens twee verschillende manieren. Dan moet voor één van deze manieren gelden dat $y \geq 2$ (is dit niet het geval, dan zijn de twee manieren niet verschillend). Aangezien $x \in \mathbb{N}$ moet dan gelden $p, q = 1 \cdot x + y \cdot m \geq 1 \cdot 1 + 2 \cdot m = 1 + 2m$. Dus voorwaarde **2** impliceert voorwaarde $2'$.

Stel $p, q \geq 2m + 1$. Dan kunnen we schrijven:

$$p = (p - m) \cdot 1 + 1 \cdot m \qquad p = (p - 2m) \cdot 1 + 2 \cdot m$$

Waarbij $p - m, p - 2m \in \mathbb{N}$, want $p - m \geq m + 1$, $m \geq 2$ en $p - 2m \geq 1$. Daarnaast is $p - m \neq p - 2m$, want $m \neq 0$. Dus voorwaarde $2'$ impliceert **2**.

Dus voorwaarde **2** is equivalent aan voorwaarde $2'$.

Aangezien we Stelling 1.2 hebben bewezen, hebben we deze stelling (5.1) nu ook bewezen. □

Stelling 5.2. *Neem aan dat $pq > 2m$, $m \geq 3$ en m is oneven. Een breuklijnvrige betegeling van een p -bij- q rechthoek met 2 -bij- m tegels bestaat dan en slechts dan als er wordt voldaan aan voorwaarde 1^* en 2^* .*

1^* . Zowel 2 als m delen p of q .

$$2^*. p \geq 2 + (3 + i)m \text{ met } \begin{cases} i = 0 \text{ als } p \text{ oneven is.} \\ i = 1 \text{ als } p \text{ even is.} \end{cases}$$

Op dezelfde manier moet dit ook gelden voor q .

$$q \geq 2 + (3 + i)m \text{ met } \begin{cases} i = 0 \text{ als } q \text{ oneven is.} \\ i = 1 \text{ als } q \text{ even is.} \end{cases}$$

Bewijs. Deze stelling is eigenlijk een aangepaste versie van Stelling 1.2. Als je Stelling 1.2 toepast op een 2 -bij- m tegel ($b = 2$, $a = m$), waarbij we aannemen dat $m \neq 1$. Krijg je de volgende stelling:

$p, q, a, b \in \mathbb{N}$. Neem aan dat $pq > m$, $m \neq 2$, $m \neq 1$ en $\text{ggd}(2, m) = 1$.

Een breuklijnvrige betegeling van een p -bij- q rechthoek met een 2 -bij- m tegel bestaat dan en slechts dan als er wordt voldaan aan voorwaarden **1** t/m **3**.

1. Zowel 2 als m delen p of q .

2. Zowel p als q kunnen we uitdrukken als $x \cdot 2 + y \cdot m$ met $x, y \in \mathbb{N}$ op minstens twee verschillende manieren.

3. Voor $\{2, m\} = \{1, 2\}$ geldt $(p, q) \neq (6, 6)$.

$m \neq 1$ en $m \neq 2$ geven dat $m \geq 3$ is en $\text{ggd}(2, m) = 1$ geeft dat m oneven moet zijn. Vanwege onze aanname $m \neq 1$ zal $\{2, m\}$ nooit gelijk zijn aan $\{1, 2\}$. Om deze stelling (5.2) te bewijzen hoeven we alleen nog te bewijzen dat voorwaarden **1** en **2** equivalent zijn aan voorwaarde 1^* en 2^* .

Voorwaarde 1^* is precies hetzelfde als voorwaarde **1**, dus deze zijn equivalent.

Stel we kunnen p en q uitdrukking als $x \cdot 2 + y \cdot m$ met $x, y \in \mathbb{N}$ in minstens twee verschillende manieren.

We bekijken voor het gemak alleen p , maar hetzelfde geldt ook voor q . We weten dat $x \cdot 2$ even is voor alle x . Stel p is even, dan moet y ook even zijn, aangezien m oneven is en $p = x \cdot 2 + y \cdot m$. We kunnen p op twee verschillende manieren als $p = x \cdot 2 + y \cdot m$ schrijven. Dit betekent dat in één van deze twee manieren $y \geq 4$ moet gelden. Dus moet gelden dat $p \geq 1 \cdot 2 + 4 \cdot m$ oftewel $p \geq 2 + 4m$.

Stel p is oneven, dan moet y ook oneven zijn, aangezien m oneven is en $p = x \cdot 2 + y \cdot m$. We kunnen p op twee verschillende manieren als $p = x \cdot 2 + y \cdot m$ schrijven. Dit betekent dat in één van deze twee manieren $y \geq 3$ moet gelden. Dus geldt dat $p \geq 1 \cdot 2 + 3 \cdot m$ oftewel $p \geq 2 + 3m$.

Analoog geldt voor q , dat $q \geq 2 + 4m$ als q even is en $q \geq 2 + 3m$ als q oneven is. Dus voorwaarde **2** impliceert voorwaarde 2^* .

Voor de andere implicatie bekijken we voor het gemak wederom alleen p , maar hetzelfde geldt ook weer voor q . Stel p is even, dan moet volgens 2^* gelden dat $p \geq 2 + 4m$. Dan kunnen we schrijven:

$$p = \frac{p - 4m}{2} \cdot 2 + 4 \cdot m \qquad p = \frac{p - 2m}{2} \cdot 2 + 2 \cdot m$$

Aangezien $p \geq 2 + 4m$ geldt dat $p - 4m \geq 2 > 0$ en $p - 2m \geq 2 + 2m > 0$. Daarnaast geldt dat $p - 4m$ en $p - 2m$ deelbaar zijn door 2, want we hadden gesteld dat p even is. Dan zijn de hier boven gegeven verschillende manieren om p uit te drukken de gezochte manieren.

Stel p is oneven, dan moet volgens 2^* gelden dat $p \geq 2 + 3m$. Dan kunnen we schrijven:

$$p = \frac{p - 3m}{2} \cdot 2 + 3 \cdot m \qquad p = \frac{p - m}{2} \cdot 2 + 1 \cdot m$$

Aangezien $p \geq 2 + 3m$ geldt dat $p - 3m \geq 2 > 0$ en $p - m \geq 2 + 2m > 0$. Daarnaast geldt dat $p - 3m$ en $p - m$ deelbaar zijn door 2, want we hadden gesteld dat p en m oneven zijn, waardoor $3m$ ook oneven is. Dan zijn de hier boven gegeven verschillende manieren om p uit te drukken de gezochte manieren.

Analoog kunnen we als q voldoet aan voorwaarde 2^* altijd twee verschillende manieren vinden om q uit te drukken als $xa + yb$ met $x, y > 0$. Dus voorwaarde 2^* impliceert voorwaarde **2**.

Dus voorwaarde **2** is equivalent aan voorwaarde 2^* .

Aangezien we Stelling 1.2 hebben bewezen, hebben we deze stelling (5.2) zo ook bewezen. \square

6 Het herschrijven van voorwaarde 2 van stelling van R. L. Graham

We hebben net gezien dat we voor een 1-bij- m tegel voorwaarde **2** van De Stelling van R. L. Graham kunnen herschrijven tot: " $p, q \geq 2m + 1$ ". Dus is er een grens voor geschikte p en q die voldoen aan voorwaarde **2**. Maar we zien ook dat we bij een 2-bij- m tegel we niet kunnen doen.

Als we de 2-bij-3 tegel bekijken dan voldoen alle p en q waarden die gelijk zijn aan 11 of groter-gelijk aan 13 aan voorwaarde **2**. Je zou kunnen zeggen dat er een gat zit in de reeks getallen die voldoen aan voorwaarde **2**.

Dit voorbeeld laat ook zien dat alle p en q waarden groter-gelijk aan 13 wel altijd voldoen aan voorwaarde **2**. Er is hier dus sprake van een soort ondergrens (alle waarden die groter of gelijk zijn dan deze ondergrens voldoen aan voorwaarde **2**). We gaan nu laten zien of er ook zo'n soort ondergrens voor een willekeurige a -bij- b tegel bestaat.

Voorwaarde **2** luidde als volgt: "*Zowel p als q kunnen we uitdrukken als $xa + yb$ met $x, y > 0$ op minstens twee verschillende manieren.*"

Herinner je dat volgens Lemma 4.9 we voorwaarde **2** van de stelling van R.L. Graham kunnen vervangen door:

We kunnen $p - ab, q - ab$ schrijven als $xa + yb$ met $x, y \in \mathbb{N}$ op minstens één manier.

Als $a, b \in \mathbb{N}$ dan kunnen we zonder verlies van algemeenheid zeggen dat $b < a$. Aangezien we voor vierkante tegels ($a = b$) al hebben gezien dat er geen breuklijn-vrije betegeling mogelijk is, kunnen we het geval $a = b$ buiten beschouwing laten.

Lemma 6.1. Als $a, b, m \in \mathbb{N}$, $\text{ggd}(a, b) = 1$, (z.v.v.a.) $b < a$ en $1 \leq m < a$. Dan geldt: $\exists x, y \in \mathbb{Z}$ zodanig dat $xa + yb = m$, waarbij geldt dat $|x| < b$ en $|y| < a$.

Bewijs. Voor elke $a, b, m \in \mathbb{N}$ met $a \neq b$, $\text{ggd}(a, b) = 1$ en $1 \leq m < a$ willen we $x, y \in \mathbb{Z}$ vinden zodanig dat $xa + yb = m$ met $|x| < b$ en $|y| < a$.

Neem $a, b, m \in \mathbb{N}$ met $a \neq b$, $\text{gcd}(a, b) = 1$ en $1 \leq m < a$ willekeurig. De stelling van Euclides zegt dan: $\exists x', y' \in \mathbb{Z}$ zodanig dat $x'a + y'b = 1$

Bovendien geldt dat als $x' < 0$ dan $y' > 0$, want $x'a + y'b = 1$ (als $x', y' < 0$ dan zou $x'a + y'b < 0$ zijn en als $x', y' > 0$ dan zou $x'a + y'b \geq 2$ zijn). Zo geldt ook als $x' > 0$ dan moet $y' < 0$.

Aangezien $x'a + y'b = 1$ is geldt dat $mx'a + my'b = m$.

Als $x' = 0$ dan moet $y'b = 1$, omdat $b \in \mathbb{N}$ en $y' \in \mathbb{Z}$ moet $y' = 1$ en $b = 1$. $a \neq b$, dus $a > 1$. Met als gevolg dat onze $mx' (= m \cdot 0 = 0)$ en $my' (= m \cdot 1 = m)$ voldoen aan onze eis: $|mx'| = |0| = 0 < 1 = b$ en $|my'| = |m| = m < a$.

Stel $y' = 0$ dan moet $x'a = 1$, omdat $a \in \mathbb{N}$ en $x' \in \mathbb{Z}$ moet $x' = 1$ en $a = 1$. Dit levert een tegenspraak op met de aanname dat $b < a$ en $a, b > 0$. Dus y' kan nooit gelijk aan nul zijn.

Stel nu $x', y' \neq 0$ en bekijk $mx'a + my'b = m$.

- * Stel $|mx'| < b$ en $|my'| < a$, dan heb je de gewenste x en y gevonden, namelijk mx' en my' .

** Stel $|my'| < a$, maar $|mx'| \geq b$. Dan kunnen we twee gevallen onderscheiden.

Geval 1: $x' < 0$

Aangezien m positief is geldt dan dat $mx' < 0$, dus $mx' \leq -b$. Bekijk:

$$\begin{aligned}(mx' + b)a + (my' - a)b &= mx'a + ab + my'b - ab \\ &= mx'a + my'b \\ &= m\end{aligned}$$

Omdat $x' < 0$ is $y' > 0$ (en $my' > 0$). Daarnaast is $|my'| < a$, dus geldt $0 < my' < a$. Dit impliceert dat $-a < my' - a < 0$ oftewel $|my' - a| < a$. Is $|mx' + b| < b$, dan zijn $mx' + b$ en $my' - a$ de gezochte waarden.

Stel nu dat we nog steeds hebben dat $|mx' + b| \geq b$. Aangezien $x' < 0$ is geldt dan dat $mx' + b \leq -b$ moet zijn. Dit levert ons een tegenspraak aangezien dan

$$m = (mx' + b)a + (my' - a)b < -b \cdot a + 0 \cdot b = -ba < 0 < 1 \leq m.$$

Dus we hebben gewenste waarden $mx' + b$ en $my' - a$ gevonden.

Geval 2: $x' > 0$

Aangezien m positief is geldt dan dat $mx' > 0$, dus $mx' \geq b$. Bekijk:

$$\begin{aligned}(mx' - b)a + (my' + a)b &= mx'a - ab + my'b + ab \\ &= mx'a + my'b \\ &= m\end{aligned}$$

Omdat $x' > 0$ is $y' < 0$ (en $my' < 0$). Daarnaast is $|my'| < a$, dus geldt $-a < my' < 0$. Dit impliceert dat $0 < my' + a < a$ oftewel $|my' + a| < a$. Is $|mx' - b| < b$, dan zijn $mx' - b$ en $my' + a$ de gezochte waarden.

Stel nu dat we nog steeds hebben dat $|mx' - b| \geq b$, dan is $mx' - b \geq b$. Dit levert ons een tegenspraak aangezien dan

$$m = (mx' - b)a + (my' + a)b > b \cdot a + 0 \cdot b = ba > b \cdot m \geq m.$$

Dus we hebben gewenste waarden $mx' - b$ en $my' + a$ gevonden.

* * * Stel $|mx'| < b$, maar $|my'| \geq a$. Weer kunnen we twee gevallen onderscheiden.

Geval 1: $x' < 0$

Aangezien m positief en $y' > 0$ is, geldt dan dat $my' > 0$, dus $my' \geq a$ (want $|my'| \geq a$). Bekijk:

$$\begin{aligned}(mx' + b)a + (my' - a)b &= mx'a + ab + my'b - ab \\ &= mx'a + my'b \\ &= m\end{aligned}$$

Omdat $x' < 0$ is $y' > 0$ (en $mx' < 0$). Daarnaast is $|mx'| < b$, dus geldt $-b < mx' < 0$. Dit impliceert dat $0 < mx' + b < b$ oftewel $|mx' + b| < b$. Is $|my' - a| < a$, dan zijn $mx' + b$ en $my' - a$ de gezochte waarden. Stel nu dat we nog steeds hebben dat $|my' - a| \geq a$, dan is $my' - a \geq a$. Dit levert ons een tegenspraak aangezien dan

$$m = (mx' + b)a + (my' - a)b > 0 \cdot a + a \cdot b = ab > m \cdot b \geq m.$$

Dus we hebben gewenste waarden $mx' + b$ en $my' - a$ gevonden.

Geval 2: $x' > 0$

Aangezien m positief en $y' < 0$ is, geldt dan dat $mx' > 0$, dus $my' \leq -a$. Bekijk:

$$\begin{aligned} (mx' - b)a + (my' + a)b &= mx'a - ab + my'b + ab \\ &= mx'a + my'b \\ &= m \end{aligned}$$

Omdat $x' > 0$ is $y' < 0$ (en $mx' > 0$). Daarnaast is $|mx'| < b$, dus geldt $0 < mx' < b$. Dit impliceert dat $-b < mx' - b < 0$ oftewel $|mx' - b| < b$. Is $|my' + a| < a$, dan zijn $mx' - b$ en $my' + a$ de gezochte waarden. Stel nu dat we nog steeds hebben dat $|my' + a| \geq a$, dan is $my' + a \leq -a$. Dit levert ons een tegenspraak aangezien dan

$$m = (mx' - b)a + (my' + a)b < 0 \cdot a + -a \cdot b = -ab < 0 < 1 \leq m.$$

Dus we hebben gewenste waarden $mx' - b$ en $my' + a$ gevonden.

Ook als $|mx'| \geq b$ en $|my'| \geq a$ geldt onderscheiden we deze twee gevallen.

Geval 1: $x' < 0$

Als eerste regel hebben we $mx'a + my'b = m$. Bekijk:

$$\begin{aligned} (mx' + b)a + (my' - a)b &= m \\ (mx' + 2b)a + (my' - 2a)b &= m \\ (mx' + 3b)a + (my' - 3a)b &= m \\ &\vdots \end{aligned}$$

Zolang zowel $|mx' + nb| \geq b$ als $|my' - na| \geq a$ ($n \in \mathbb{N}$) geldt blijf je dit herhalen. Dit stopt zodra voor het eerst $-b < mx' + nb \leq 0$ of $0 \leq my' - na < a$ ($n \in \mathbb{N}$) geldt. Vervolgens doe je precies hetzelfde als bij *, ** of *** alleen dan met de waarden $mx' + nb$ en $my' - na$.

Geval 2: $x' > 0$

Als eerste regel hebben we $mx'a + my'b = m$. Bekijk:

$$\begin{aligned} (mx' - b)a + (my' + a)b &= m \\ (mx' - 2b)a + (my' + 2a)b &= m \\ (mx' - 3b)a + (my' + 3a)b &= m \\ &\vdots \end{aligned}$$

Zolang zowel $|mx' - nb| \geq b$ als $|my' + na| \geq a$ ($n \in \mathbb{N}$) geldt blijf je dit herhalen. Dit stopt zodra voor het eerst $0 \leq mx' - nb < b$ of $-a < my' + na \leq 0$ ($n \in \mathbb{N}$) geldt. Vervolgens doe je precies hetzelfde als bij *, ** of *** alleen dan met de waarden $mx' - nb$ en $my' + na$.

Dus als $a, b \in \mathbb{N}$ met $\text{ggd}(a, b) = 1$, $a \neq b$ en $1 \leq m < a$ dan kunnen we altijd een x en y uit de gehele getallen vinden zodanig dat $xa + yb = m$ waarbij geldt dat $|x| < b$ en $|y| < a$. □

Voor $m = a$ kunnen we niet altijd $x, y \in \mathbb{Z}$ vinden zodanig dat $xa + yb = m$, waarbij geldt dat $|x| < b$ en $|y| < a$. Neem $b = 1$ en stel dat zulke $x, y \in \mathbb{Z}$ wel bestaan. Dan geldt $a > 1$ en $xa + y = a$ met $|x| < 1$ en $|y| < a$. Dit betekent dat $x = 0$ wat leidt tot $y = a$. Dit levert een tegenspraak op met de aanname $|y| < a$ (oftewel $-a < y < a$).

Door middel van bovenstaande Lemma 6.1 bewijzen we het volgende lemma.

Lemma 6.2. Neem aan dat $a, b, p \in \mathbb{N}$, $a \neq b$ en $\text{ggd}(a, b) = 1$ geldt. Dan is $p = ab$ de grootste die niet te schrijven is als $p = xa + yb$ met $x, y > 0$.

Bewijs. Eerst gaan we bewijzen dat we $p = ab$ inderdaad niet op die manier kunnen schrijven. Dit doen we door middel van een bewijs uit het ongerijmde. Stel $p = ab$ kunnen we wel schrijven als $p = xa + yb$ met $x, y > 0$.

Claim: Er moet gelden $x < b$ en $y < a$.

Stel $y \geq a$ dan $ab = xa + yb \geq xa + ab = (b + x)a$. Aangezien $x > 0$ is levert dit een tegenspraak op. Op analoge wijze levert $x \geq b$ een tegenspraak op. (**Claim** bewezen)

Verder weten we dat $ab - xa = yb$ en dus $(b - x)a = yb$ geldt. Aangezien $\text{ggd}(a, b) = 1$, geldt dat $a \mid y$ (en $b \mid (b - x)$). Omdat $y > 0$ is, moet $y \geq a$ zijn maar dit is in tegenspraak met onze claim. Dus we kunnen $p = ab$ niet schrijven als $p = xa + yb$ met $x, y > 0$.

Nu moeten we nog bewijzen dat het de grootste is, oftewel dat we alle $p > ab$ wel kunnen schrijven als $p = xa + yb$ met $x, y > 0$.

We definiëren de verzameling V als de verzameling getallen die we kunnen schrijven als $xa + yb$ met $x, y > 0$. Dan geldt de volgende implicatie:

Als $k \in V$, dan geldt $k + a \in V$ en $k + b \in V$.

Want als $k = xa + yb$ met $x, y > 0$, dan $k + a = (x + 1)a + yb$ $x + 1, y > 0$. Analoog geldt $k + b \in V$.

We stellen zonder verlies van algemeenheid weer dat $b < a$. Als we alle elementen in de verzameling $\{ab + 1, ab + 2, \dots, ab + b\}$ kunnen schrijven als $p = xa + yb$ met $x, y > 0$ dan kunnen we alle $p = ab + s$ zo schrijven. We kunnen namelijk s schrijven als $v \cdot b + m$ met $1 \leq m \leq b$ en $v \geq 0$.

Vervolgens kunnen we schrijven:

$$\begin{aligned} p &= ab + s = ab + vb + m \\ &= vb + xa + yb &= xa + (v + y)b \end{aligned}$$

(want $p = ab + m$ kunnen schrijven als $p = xa + yb$ met $x, y > 0$). Aangezien $x, y > 0$ en $v \geq 0$ geldt dat $x, v + y > 0$.

We moeten nu dus alleen nog bewijzen dat we alle elementen uit de verzameling $\{ab+1, ab+2, \dots, ab+b\}$ kunnen schrijven als $p = xa + yb$ met $x, y > 0$. Het laatste element uit de verzameling $p = ab + b$ staat al in de juiste vorm ($x = b$ en $y = 1$). Dus moeten we alleen voor $1 \leq m < b$ nog bewijzen dat we $p = ab + m$ kunnen schrijven als $p = xa + yb$ met $x, y > 0$.

Uit Lemma 6.1 weten we dat er x en y uit de gehele getallen bestaan zodanig dat $xa + yb = m$, waarbij geldt dat $|x| < b$ en $|y| < a$. Nu weten we hierbij ook dat x en y niet beiden kleiner dan nul zijn (als dat wel zo is dan is $xa + yb$ kleiner dan nul wat in tegenspraak is met $1 \leq m < b$).

Stel $x < 0$ (dus $y > 0$) dan kunnen we schrijven $p = ab + m = ab + xa + yb = (x + b)a + yb$ met $y, x + b > 0$ (want $|x| < b$ oftewel $-b < x < 0$).

Stel $x > 0$ (dus $y \leq 0$) dan kunnen we schrijven $p = ab + m = ab + xa + yb = xa + (y + a)b$ met $x, y + a > 0$ (want $|y| < a$ oftewel $-a < y < 0$).

Stel $x = 0$ (dus $y > 0$, want $1 \leq m < b$ en $b \geq 1$) dan $p = ab + m = ab + yb$ met $a, y > 0$.

Dus we kunnen alle elementen uit de verzameling $\{ab+1, ab+2, \dots, ab+b\}$ schrijven als $p = xa + yb$ met $x, y > 0$.

Dus $p = ab$ is de grootste die we niet kunnen schrijven als $p = xa + yb$ met $x, y > 0$. □

We definiëren de verzameling W als de verzameling getallen die voldoen aan voorwaarde **2**. Dan geldt de volgende implicatie:

Als $k \in W$, dan geldt $k + a \in W$ en $k + b \in W$.

Want als $k = xa + yb$ en $k = x'a + y'b$ met $x, y, x', y' > 0$, dan $k + a = (x + 1)a + yb$ en $k + a = (x' + 1)a + y'b$ met $x + 1, y, x' + 1, y' > 0$. Analoog geldt $k + b \in W$.

Met Lemma 4.9 en Lemma 6.2 kunnen we vervolgens de volgende stelling bewijzen.

Stelling 6.3. *Neem aan dat $a, b, p \in \mathbb{N}$, $a \neq b$ en $\text{ggd}(a, b) = 1$. Dan geldt dat $p = 2ab$ de grootste waarde is die we niet kunnen schrijven als $xa + yb$ met $x, y > 0$ op twee verschillende manieren.*

Bewijs. Stel we kunnen $p = 2ab$ wel schrijven als $xa + yb$ met $x, y > 0$ op twee verschillende manieren. Dan moet volgens Lemma 4.9 gelden dat we $p - ab = 2ab - ab = ab$ kunnen schrijven als $xa + yb$ met $x, y \in \mathbb{N}$ op minstens één manier. Dit levert een tegenspraak op met Lemma 6.2. Dus we kunnen $p = 2ab$ niet schrijven als $xa + yb$ met $x, y > 0$ op twee verschillende manieren.

Volgens Lemma 6.2 geldt dat $p = ab$ de grootste is die we niet kunnen schrijven als $p = xa + yb$ met $x, y > 0$. Dus alle $p > ab$ kunnen we schrijven als $xa + yb$ met $x, y \in \mathbb{N}$ op minstens één manier. Dan geldt volgens Lemma 4.9 dat we alle $p > 2ab$ kunnen schrijven als $xa + yb$ met $x, y > 0$ op twee verschillende manieren.

Dus $p = 2ab$ is de grootste waarde die we niet kunnen schrijven als $xa + yb$ met $x, y > 0$ op twee verschillende manieren. □

Gevolg 6.4. Neem aan dat $a, b, p \in \mathbb{N}$, $a \neq b$ en $\text{ggd}(a, b) = 1$. Als $p \geq 2ab + 1$ dan kunnen p we schrijven als $xa + yb$ met $x, y > 0$ op twee verschillende manieren.

Bewijs. Volgens Stelling 6.3 is $p = 2ab$ de grootste waarde is die we niet kunnen schrijven als $xa + yb$ met $x, y > 0$ op twee verschillende manieren. Dus dan geldt als $p \geq 2ab + 1$ dan kunnen p we schrijven als $xa + yb$ met $x, y > 0$ op twee verschillende manieren. □

Bekijk bijvoorbeeld de 3-bij-5 tegel. Bij deze tegel voldoen $p, q \in \{23, 26, 28, 29, 31, 32, 33, 34, 35, 36, \dots\}$ aan voorwaarde **2**. Je ziet dus dat alle $p, q \geq 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31$ voldoen aan voorwaarde **2**. Maar we zien ook dat er absoluut geen sprake is van een desda relatie. Zo voldoet $p = 23$ aan voorwaarde **2** ($23 = 4 \cdot 5 + 1 \cdot 3$ en $23 = 1 \cdot 5 + 6 \cdot 3$), maar geldt ook dat $23 < 31$.

In dit voorbeeld zien we dat er gaten zitten in de rij getallen (p en q waarden) die voldoen aan voorwaarde **2**. Zo voldoen de waarden 24, 25, 27 en 30 niet aan voorwaarde **2**.

Alleen bij de 1-bij- m tegel zitten er geen gaten in de rij getallen (p en q waarden) die voldoen aan voorwaarde **2** (zie Stelling 5.1). Dit komt omdat dit de enige tegels zijn met een zijde van lengte 1.

7 Vervolg onderzoek

We hebben nu Stelling 1.2 (Stelling van R.L. Graham) bewezen, voorwaarde **2** herschreven en een soort ondergrens voor voorwaarde **2** gegeven.

In verder onderzoek zouden we Stelling 1.2 (Stelling van R.L. Graham) in meerdere dimensies kunnen bekijken. Hoe ziet te stelling eruit in drie dimensies of in een eindig aantal dimensies?

Als we een p -bij- q rechthoek breuklijn vrij kunnen betegelen met a -bij- b tegels, kunnen we dan ook een p -bij- q -bij- p blok breukvlak vrij bouwen met a -bij- b -bij- a blokjes? Zullen er meer mogelijkheden voor breukvlakvrije bouwwerken zijn in drie of meer dimensies? Wellicht is een 6-bij-6-bij-6 kubus wel breukvlakvrij te bouwen met 1-bij-2-bij-1 blokjes, terwijl een 6-bij-6 rechthoek niet breuklijn vrij te betegelen is met 1-bij-2 tegels.

We hebben alleen bekeken wanneer een breuklijn vrije betegeling bestaat, maar we zouden ook nog kunnen onderzoeken hoeveel verschillende breuklijn vrije betegelingen er bestaan (als er een bestaat).

Zo zijn er nog steeds leuke vraagstukken binnen het onderwerp breuklijn vrije betegelingen om verder te onderzoeken.

Referenties

- [1] David A. Klarner, *Packing a Rectangle with Congruent N -ominoes*, Journal of combinatorial theory 7 (1969), Blz. 107-115.
- [2] Peter J. Robinson, *Fault-free rectangles tiled with rectangular polyominoes*, in: Elizabeth J. Billington, Sheila Oates-Williams, Anne Penfold Street (eds.) *Combinatorial Mathematics IX*, Lecture Notes in Mathematics **952**, Springer 1982, blz. 372-377.
- [3] Ronald L. Graham, *Fault-free Tilings of Rectangles*, The mathematical Gardner: A collection in Honor of Martin Gardner, (1981), Blz. 120-126.