

RADBOD UNIVERSITEIT NIJMEGEN



FACULTEIT DER NATUURWETENSCHAPPEN, WISKUNDE EN INFORMATICA

---

KUBISCHE GRAFEN MET INTEGRAAL SPECTRUM

---

Naam:	Daan van Rozendaal
Studentnummer:	4122445
Studie:	Bachelor Wiskunde
Begeleider:	Dr. W. Bosma
Tweede lezer:	Dr. ir. H. Don

1 juli 2014



# Inhoudsopgave

<b>Inleiding</b>	<b>5</b>
<b>1 Basis/Notatie</b>	<b>7</b>
1.1 Grafen . . . . .	7
1.2 Matrices . . . . .	8
1.3 Eigenwaarden van een matrix . . . . .	9
<b>2 Eigenwaarden van een graaf</b>	<b>11</b>
2.1 Het spectrum van een graaf . . . . .	11
2.2 De grootste eigenwaarde $\lambda_1$ . . . . .	12
2.3 Lemma van Hoffman . . . . .	13
2.4 Operaties op grafen . . . . .	15
2.5 Bipartiete grafen . . . . .	16
2.6 $k$ -de spectrale moment . . . . .	17
2.7 Integraal spectrum samenhangende kubische bipartiete graaf . . . . .	18
<b>3 Kubische bipartiete grafen met integraal spectrum</b>	<b>21</b>
3.1 Geval 1 . . . . .	21
3.2 Geval 2 . . . . .	21
3.3 Geval 3 . . . . .	22
3.4 Geval 4 . . . . .	22
3.5 Geval 5 . . . . .	22
3.6 Geval 6 . . . . .	23
3.7 Geval 7 . . . . .	26
3.8 Geval 8 . . . . .	30
<b>4 Kubische niet-bipartiete grafen met integraal spectrum</b>	<b>37</b>



# Inleiding

Een onopgelost probleem in de grafentheorie is het bepalen van het aantal grafen met integraal spectrum. Dit zijn grafen die alleen gehele eigenwaarden hebben. Aangezien er, op de definitie na, geen algemene karakterisatie voor deze collectie grafen bestaat, is het niet mogelijk deze grafen op één manier te specificeren. Bij het zoeken naar grafen met integraal spectrum verdeelt men daarom alle grafen in verschillende klassen, bijvoorbeeld bomen, niet-reguliere grafen met maximum graad 4 of grafen met hoogstens 12 knopen, zie [1].

Vanwege de complexiteit van dit probleem kijken we in deze scriptie alleen naar het geval dat de graaf kubisch (i.e. 3-regulier) is. Hiervoor zullen we eerst een aantal begrippen uit zowel de grafentheorie als de lineaire algebra moeten toelichten. Zo moeten we uiteraard aangeven wat we bedoelen met een 3-reguliere graaf en met de eigenwaarde van een graaf. We bekijken daartoe eerst de relatie tussen grafen en matrices. Vervolgens definiëren we het spectrum van een graaf  $G$  met behulp van eigenwaarden van de zogenaamde bogenmatrix, die correspondeert met  $G$ . Daarna bewijzen we enkele nuttige resultaten, waaronder het Lemma van Hoffman, die in het vervolg gebruikt zullen worden bij het daadwerkelijk bepalen van de grafen.

In de laatste twee hoofdstukken kunnen we ten slotte ons doel bereiken door een onderscheid te maken tussen bipartiete en niet-bipartiete kubische grafen met integraal spectrum. We bepalen in Hoofdstuk 3 alle bipartiete grafen door 8 verschillende gevallen na te gaan. Vervolgens bekijken we niet-bipartiete grafen. Hierbij maken we gebruik van het feit dat een kubische graaf met integraal spectrum, geconjugerd met  $K_2$ , opnieuw een dergelijke graaf oplevert, die bipartiet is. We kunnen dan alle niet-bipartiete kubische grafen met integraal spectrum vinden met behulp van de resultaten uit Hoofdstuk 3. Op deze manier hebben we ons doel bereikt.

De toepassing van deze probleemstelling reikt verder dan alleen de wiskunde. Zo kan men het ook gebruiken in de natuurkunde, onder andere bij zogenaamde spin netwerken. Dit zijn diagrammen die toestanden tussen deeltjes en kwantumvelden representeren. Ze zijn bijvoorbeeld toegepast op de theorie van kwantumgravitatie.



# Hoofdstuk 1

## Basis/Notatie

### 1.1 Grafen

**Definitie 1.1** Een *graaf*  $G$  bestaat uit een verzameling *knopen*  $V$ , en een verzameling  $E$  van *kanten*, waarbij elementen uit  $E$  deelverzamelingen van twee punten uit  $V$  zijn. Hiervoor gebruiken we de notatie  $G = (V, E)$ .

**Definitie 1.2** Twee knopen  $u, v \in V$  zijn *buren* als  $\{u, v\} \in E$ . Als  $u$  en  $v$  buren zijn, dan schrijven we  $u \sim v$ .

**Definitie 1.3** Zij  $G$  een graaf en  $v \in V$ . We noemen de kant  $\{v, v\} \in E$  een *lus*.

**Definitie 1.4** Een *simpele graaf* is een ongerichte graaf zonder lussen en met hoogstens één kant tussen twee verschillende knopen.

**We nemen in het vervolg van deze scriptie aan dat iedere graaf simpel is.**

**Definitie 1.5** Een *wandeling* van  $v_0$  naar  $v_k$  in een graaf  $G = (V, E)$  is een rij knopen  $(v_0, v_1, \dots, v_k)$  zodat  $v_{i-1} \sim v_i$  voor  $i = 1, 2, \dots, k$ . Hierbij staat  $k$  voor de lengte van de wandeling. Als  $v_i \neq v_j$  voor alle  $i, j \in \{1, \dots, k\}$  met  $i \neq j$ , dan noemen we de wandeling een *pad*.

**Notatie 1.6** We noteren een wandeling van lengte  $k$  van  $v_i$  naar  $v_j$  als  $w_k(i, j)$ .

**Definitie 1.7** Een wandeling  $(v_0, v_1, \dots, v_k)$  heet een *gesloten wandeling* als  $v_0 = v_k$ . Net zo voor een pad.

**Definitie 1.8** Een *cykel* is een gesloten pad. We schrijven  $k$ -cykel voor een cykel van lengte  $k$ .

**Definitie 1.9** Een graaf  $G = (V, E)$  heet *samenhangend* als tussen elk tweetal knopen een pad loopt.

**Definitie 1.10** De *graad* van een knoop  $v$  is gelijk aan het aantal buren van  $v$ . De graad van  $v$  wordt genoteerd als  $\deg(v)$ .

**Definitie 1.11** Een graaf heet *k-regulier* als elke knoop graad  $k$  heeft. Wanneer een graaf 3-regulier is, noemen we deze een *kubische graaf*.

**Definitie 1.12** Laat  $G$  een 2-reguliere graaf met  $n$  knopen zijn.  $G$  is dan een cykel, genoteerd met  $C_k$ , waarbij  $k$  staat voor het aantal knopen in de cykel.

**Definitie 1.13** Een graaf  $G$  is *volledig* als elk paar knopen uit  $V$  verbonden is. We noteren een volledige graaf op  $n$  knopen als  $K_n$ .

**Definitie 1.14** Een graaf  $G$  heet *bipartiet* als  $V$  op te splitsen is in twee deelverzamelingen  $A, B \subseteq V$  zodat  $V = A \cup B$  en  $A \cap B = \emptyset$ , en voor alle  $\{a, b\} \in E$  geldt dat  $a \in A$  en  $b \in B$  of omgekeerd.

**Definitie 1.15** Een graaf  $G = (V, E)$  heet *volledig bipartiet* als  $V$  in twee niet-lege deelverzamelingen  $A, B \subseteq V$  kan worden gesplitst zo dat

$$E = \{\{a, b\} \mid a \in A \text{ en } b \in B\}.$$

Veronderstel dat  $|A| = n$  en  $|B| = m$  (met  $A$  en  $B$  zoals in Definitie 1.14). Dan noteren we  $G$  als  $G = K_{n,m}$ .

**Definitie 1.16** Het *complement* van een graaf  $G = (V, E)$  is de graaf  $\bar{G} = (V, F)$  waarbij  $F$  uit alle paren knopen bestaat die niet in  $E$  zitten.

**Definitie 1.17** De *diameter* van een graaf  $G$ , genoteerd als  $\text{diam}(G)$ , wordt gedefinieerd als de maximale lengte van het kortste pad tussen ieder tweetal knopen in  $G$ .

**Definitie 1.18** Met de *omtrek* (Engels: *girth*) van een graaf  $G$  bedoelen we de lengte van de kortste cykel in  $G$ .

## 1.2 Matrices

We kunnen grafen op verschillende manieren representeren door een matrix. In deze sectie bekijken we twee voorbeelden van dergelijke matrices.

**Definitie 1.19** Zij  $G$  een graaf met  $n$  knopen. Dan definiëren we de *bogenmatrix* (Engels: *adjacency matrix*)  $A = (a_{ij})$  door:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als } v_i \sim v_j; \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$



### Voorbeeld 1.20

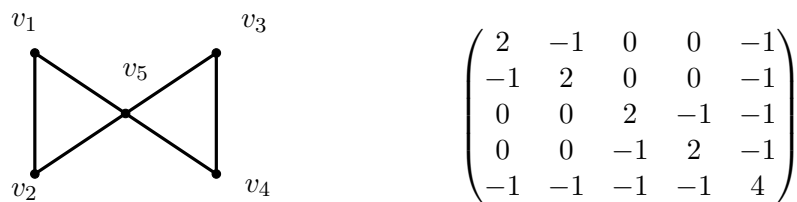


Figuur 1.1: Voorbeeld van een graaf en zijn bogenmatrix

**Definitie 1.21** Zij  $G$  een graaf met  $n$  knopen. Dan definiëren we de *Laplacematrix*  $\mathcal{L} = (b_{ij})$  door:

$$b_{ij} = \begin{cases} \deg(v_i) & \text{als } i = j; \\ -1 & \text{als } v_i \sim v_j; \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

### Voorbeeld 1.22



Figuur 1.2: Voorbeeld van een graaf en zijn Laplacematrix

**Opmerking 1.23** Voor elke graaf  $G$  met  $n$  knopen zijn zowel de bogenmatrix als de Laplacematrix symmetrische  $n \times n$  matrices.

## 1.3 Eigenwaarden van een matrix

**Definitie 1.24** Zij  $A = (a_{ij})$  een  $n \times n$  matrix over een lichaam  $\mathbb{F}$ , en zij  $A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  de corresponderende lineaire afbeelding. Dan heet  $v \in V$  met  $v \neq 0$  een *eigenvector* van  $A$  als er een  $\lambda \in \mathbb{F}$  bestaat zodat  $Av = \lambda v$ . We noemen  $\lambda$  een *eigenwaarde* van  $A$ , die hoort bij de eigenvector  $v$ .

**Definitie 1.25** Zij  $A = (a_{ij})$  een  $n \times n$  matrix in  $\mathbb{F}$ . We definiëren het *karakteristieke polynoom*  $P$  van  $A$  door

$$P(x) = \det(xI_n - A).$$

**Stelling 1.26** Zij  $A = (a_{ij})$  een  $n \times n$  matrix over  $\mathbb{F}$ . Een  $\lambda \in \mathbb{F}$  is een eigenwaarde van  $A$  dan en slechts dan als  $\lambda$  een nulpunt is van het karakteristieke polynoom van  $A$ .

*Bewijs.*

- $\lambda$  is een eigenwaarde van  $A$
- $\iff$  er bestaat een  $0 \neq v \in \mathbb{F}$  zodat  $Av = \lambda v$
- $\iff$  er bestaat een  $0 \neq v \in \mathbb{F}$  zodat  $(\lambda I_n - A)v = 0$
- $\iff \ker(\lambda I_n - A) \neq 0$
- $\iff \lambda I_n - A$  is niet inverteerbaar
- $\iff \det(A - \lambda I_n) = 0$
- $\iff \lambda$  is een nulpunt van het karakteristieke polynoom  $A$ .

□

**Gevolg 1.27** De eigenwaarden in een lichaam  $\mathbb{F}$  van een matrix  $A$  zijn de nulpunten van het karakteristieke polynoom in  $\mathbb{F}$  van  $A$ .

## Hoofdstuk 2

# Eigenwaarden van een graaf

### 2.1 Het spectrum van een graaf

In sectie 1.3 bekeken we de eigenwaarden van een matrix. In deze sectie zullen we de eigenwaarden van een graaf bestuderen.

**Definitie 2.1** We definiëren de *eigenwaarden* van een graaf  $G$  als de eigenwaarden van de bogenmatrix  $A$  van  $G$ .

**Opmerking 2.2** De eigenwaarden van  $G$  over  $\mathbb{Q}$  zijn dus gelijk aan de nulpunten van het karakteristieke polynoom van  $A$ .

**Definitie 2.3** Zij  $G$  een graaf met  $n$  knopen. Alle eigenwaarden van  $G$  over  $\mathbb{Q}$  vormen samen het  $\mathbb{Q}$ -spectrum van  $G$ . We noteren het ( $\mathbb{Q}$ -)spectrum van  $G$  als  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ , waarbij  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \in \mathbb{Q}$ .

**Opmerking 2.4** In het spectrum zoals in Definitie 2.3 kunnen dus dezelfde eigenwaarden meerdere keren voorkomen. We kunnen het spectrum ook op een andere manier schrijven, namelijk  $\mu_1^{k_1}, \mu_2^{k_2}, \dots, \mu_m^{k_m}$ , waarbij  $\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_m$  de verschillende eigenwaarden van  $G$  zijn, en  $k_1, k_2, \dots, k_m$  de bijbehorende multipliciteiten weergeven.

**Opmerking 2.5** We bekijken in het vervolg van deze scriptie alle eigenwaarden en spectra uitsluitend over  $\mathbb{Q}$ .

**Definitie 2.6** Zij  $\lambda$  een eigenwaarde van een graaf  $G$ . We noemen  $\lambda$  *simpel* als deze multipliciteit 1 heeft.

**Definitie 2.7** Een *algebraïsch geheel getal* is een complex getal dat het nulpunt is van een monisch polynoom met coëfficiënten in  $\mathbb{Z}$ .

**Stelling 2.8** Zij  $C$  de verzameling van algebraïsch gehele getallen. Dan is  $C \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$ .

*Bewijs.* Zie hiervoor [6].

□

**Gevolg 2.9** Als het karakteristieke polynoom van de bogenmatrix  $A$  van  $G$  volledig in factoren ontbindt over  $\mathbb{Q}$ , dan liggen alle eigenwaarden in  $\mathbb{Z}$ .

**Definitie 2.10** We noemen het spectrum van  $G$  op  $n$  knopen integraal als  $\lambda_i \in \mathbb{Z}$  voor alle  $1 \leq i \leq n$ .

**Propositie 2.11** Als een graaf  $G$  maximum graad  $\Delta(G)$  heeft, dan geldt voor elke eigenwaarde  $\lambda$  van  $G$  dat  $|\lambda| \leq \Delta(G)$ .

*Bewijs.* Laat  $G$  een graaf op  $n$  knopen zijn met bijbehorende bogenmatrix  $A$  en eigenwaarde  $\lambda$ . Zij  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  een eigenvector van  $A$  bij  $\lambda$ . Neem een knoop van  $G$ , zeg  $u$ . Dan geldt  $Ax = \lambda x$ , oftewel:

$$\lambda x_u = \sum_{v \sim u} x_v.$$

Neem nu een knoop  $w$  van  $G$  waarvoor  $|x_w|$  maximaal is. Gebruikmakend van bovenstaande vergelijking krijgen we dan:

$$|\lambda| |x_w| \leq \sum_{v \sim w} |x_v| \leq \Delta(G) |x_w|$$

omdat  $|x_w| \neq 0$  volgt nu dat  $|\lambda| \leq \Delta(G)$ . □

## 2.2 De grootste eigenwaarde $\lambda_1$

**Definitie 2.12** Een symmetrische matrix  $M$  heet *reducibel* als er een permutatiematrix  $P$  bestaat zodat  $P^{-1}MP$  van de vorm  $\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$  is, met  $n \times n$  matrices  $X$  en  $Y$  en  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ . Anders noemen we  $M$  *irreducibel*.

**Propositie 2.13** Laat  $A$  de bogenmatrix zijn behorende een graaf  $G$ . Als  $G$  samenhangend is, dan is  $A$  irreducibel.

*Bewijs.* Neem aan dat  $G$  samenhangend en stel dat  $A$  reducibel is. Dan is er een permutatiematrix  $P$  zodat  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ , met  $X$  en  $Y$  matrices van grootte  $n \times n$  met  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ . Maar we zien nu eenvoudig dat de punten in de graaf die correspondeert met  $X$  niet verbonden zijn met punten in de graaf die overeenkomt met  $Y$ . Dus is  $A$  niet samenhangend, in tegenspraak met de aanname. Dus  $A$  is irreducibel. □

**Stelling 2.14** Zij  $A$  een irreducibele matrix met niet-negatieve rationale getallen. Dan is de grootste eigenwaarde  $\lambda_1$  van  $A$  simpel.

*Bewijs.* Het bewijs vindt men in [3], p. 15. □

**Stelling 2.15**  $G$  is een  $d$ -reguliere graaf dan en slechts dan als de vector  $x = (1, \dots, 1)^T$  een eigenvector is van  $G$  met bijbehorende eigenwaarde  $d = \lambda_1$ .

## 2.3 Lemma van Hoffman

In Hoofdstuk 3 en 4 gaan we op zoek naar kubische bipartiete grafen met integraal spectrum. In deze sectie bekijken we het Lemma van Hoffman, en een handig gevolg om de genoemde grafen te bepalen.

**Stelling 2.16** *Zij  $A$  de bogenmatrix bij een graaf  $G$  met  $n$  knopen. De  $(i, j)$ -positie  $a_{ij}^{(k)}$  van de matrix  $A^k$  is gelijk aan het aantal wandelingen van lengte  $k$  die starten bij knoop  $v_i$  en eindigen bij  $v_j$ .*

*Bewijs.* We zullen deze stelling bewijzen door middel van inductie. We bekijken het geval voor  $k = 0$ . Dan krijgen we:

$$a_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 1 & \text{als } i = j. \\ 0 & \text{als } i \neq j. \end{cases}$$

Het is duidelijk dat het geval  $k = 0$  voldoet. Voor het geval  $k = 1$  geldt:

$$a_{ij}^{(1)} = \begin{cases} 1 & \text{als } i \sim j. \\ 0 & \text{als } i \not\sim j. \end{cases}$$

Neem nu aan dat  $a_{ij}^{(k)} = w_k(i, j)$  voor zekere  $k \in \mathbb{N}$ . We laten nu nog zien dat dan ook  $a_{ij}^{k+1} = w_{k+1}(i, j)$ . Uit  $A^{k+1} = A^k \cdot A$  volgt:

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(k+1)} &= a_{i1}^{(k)} a_{1j}^{(1)} + \dots + a_{in}^{(k)} a_{nj}^{(1)} \\ &= \sum_{l=1}^n a_{il}^{(k)} a_{lj}^{(1)} \\ &= \sum_{l=1}^n w_k(i, l) a_{lj}^{(1)} \\ &= w_{k+1}(i, j). \end{aligned}$$

Dus  $a_{ij}^{(k)} = w_k(i, j)$  voor alle  $k \in \mathbb{N}$ . □

**Lemma 2.17** *Zij  $G$  een graaf en  $A$  de bogenmatrix van  $G$ . Laat  $n$  het aantal knopen zijn van  $G$  en  $J$  de  $n \times n$  matrix gevuld met enen. Dan bestaat er een polynoom  $P(x)$  zodat  $J = P(A)$  dan en slechts dan als  $G$  regulier en samenhangend is.*

*Bewijs.*  $\implies$ : Noteer de  $(i, j)$ -positie van een matrix  $M$  als  $\alpha_{ij}^M$ . Neem aan dat er een polynoom bestaat zodat  $J = P(A)$ . Dan commuteren  $A$  en  $J$ , dus  $\deg(v_i) = \alpha_{ij}^{AJ} = \alpha_{ij}^{JA} = \deg(v_j)$  voor alle  $1 \leq i, j \leq n$ . Maar dan is  $G$  regulier.

Bekijk nu twee willekeurige knopen  $v_i$  en  $v_j$  van  $G$ , dan is er een  $t$  zodat  $\alpha_{ij}^{A^t} > 0$ . Immers, stel dat dit niet waar is, dan is er geen lineaire combinatie van machten van  $A$  gelijk aan  $J$ , zodat  $\alpha_{ij}^J = 1$ , maar dan  $P(A) \neq J$ . Dus

er is een  $t$  zodat er minstens één pad is van  $v_i$  naar  $v_j$ . Hieruit volgt dat  $G$  samenhangend is.

$\Leftarrow$ : Neem aan dat  $G$  samenhangend en  $d$ -regulier is. Omdat  $G$  regulier is, commuteert  $A$  met  $J$ . Maar dan zijn  $A$  en  $J$  commuterende symmetrische matrices, dus er bestaat een orthogonale matrix  $U$  zodat

$$J = UJ_0U^T \text{ en } A = UA_0U^T,$$

waar  $J_0$  staat voor de diagonaalmatrix met op de diagonaal de eigenwaarden van  $J$ , namelijk  $(n, 0, \dots, 0)$ , en  $A_0$  de diagonaalmatrix met op de diagonaal  $(\alpha_1 = d, \dots, \alpha_n)$ , de eigenwaarden van  $A$ . Merk op dat uit Stelling 2.14 volgt dat  $d > \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$ . Zij nu  $u = (1, 1, \dots, 1)^T$ . Dan is  $u$  een eigenvector van  $A$  en  $J$ , met bijbehorende eigenwaarden  $d$  resp.  $n$ .

Laat nu  $\mu_1 = d, \mu_2, \dots, \mu_k$  de verschillende eigenwaarden van  $A$  zijn met  $d > \mu_2 > \dots > \mu_k$ , en definieer

$$P(x) = \frac{n \prod_{i=2}^k (x - \mu_i)}{\prod_{i=2}^k (d - \mu_i)}.$$

Dan is  $P$  duidelijk een polynoom. Verder geldt:

$$\begin{aligned} P(A_0) &= \frac{n}{\prod_{i=2}^k (d - \mu_i)} \prod_{i=2}^k \begin{pmatrix} \alpha_1 - \mu_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 - \mu_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n - \mu_i \end{pmatrix} \\ &= \frac{n}{\prod_{i=2}^k (d - \mu_i)} \begin{pmatrix} \prod_{i=2}^k (d - \mu_i) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \prod_{i=2}^k (\alpha_2 - \mu_i) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \prod_{i=2}^k (\alpha_n - \mu_i) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Omdat  $\alpha_i \leq d$  voor alle  $2 \leq i \leq n$ , is er voor elke  $2 \leq i \leq n$  een  $2 \leq j \leq k$  zodat  $\alpha_i = \mu_j$ . Hieruit volgt dat

$$P(A_0) = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} = J_0$$

Zoals hierboven opgemerkt is er een orthogonale matrix  $U$  zodat  $J = UJ_0U^T$  en  $A = UA_0U^T$ . Merk op dat  $(UA_0U^T)^k = (UA_0U^{-1})^k = UA_0^kU^{-1}$  voor alle  $k \in \mathbb{N}$ .

We schrijven  $P$  in het vervolg als  $P(x) = \sum_{i=0}^k c_i x^i$ . Dan  $J_0 = P(A_0) = \sum_{i=0}^k c_i A_0^i$ .

Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned} P(A) &= P(UA_0U^T) = P(UA_0U^{-1}) \\ &= \sum_{i=0}^k c_i (UA_0U^{-1})^i = \sum_{i=0}^k c_i UA_0^i U^{-1} \\ &= U \left( \sum_{i=0}^k c_i A_0^i \right) U^{-1} = UJ_0U^{-1} = J. \end{aligned}$$

□

**Gevolg 2.18** Zij  $G$  een graaf op  $n$  knopen met verschillende eigenwaarden  $d, \mu_2, \dots, \mu_k$  en  $J$  de  $n \times n$  matrix gevuld met enen. Dan voldoet de bogenmatrix  $A$  aan de volgende vergelijking:

$$\prod_{i=2}^k J(d - \mu_i) = n \prod_{i=2}^k (A - \mu_i).$$

## 2.4 Operaties op grafen

Om het aantal kubische grafen met integraal spectrum te bepalen, blijkt het noodzakelijk te zijn bepaalde operaties op grafen te gebruiken. Deze operaties worden in deze sectie ingevoerd.

**Definitie 2.19** Zij  $G_1 = (V, E)$  en  $G_2 = (W, F)$ . Dan definiëren we de *vereniging*  $G = G_1 \cup G_2$  door  $G = (V \cup W, E \cup F)$ , waarbij  $V \cup W$  een disjuncte vereniging is.

**Definitie 2.20** Zij  $G_1 = (V, E)$  en  $G_2 = (W, F)$ . Het *product*  $G_1 \times G_2$  heeft  $V \times W$  als verzameling van knopen. Verder geldt:  $(v_1, w_1) \sim (v_2, w_2)$  als:

- $v_1 = v_2$  en  $w_1 \sim w_2$ ; óf
- $w_1 = w_2$  en  $v_1 \sim v_2$ .

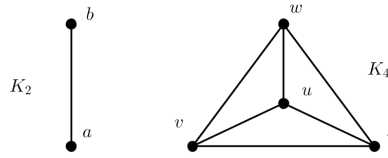
**Definitie 2.21** Zij  $G_1 = (V, E)$  en  $G_2 = (W, F)$ . De *conjunctie*  $G_1 \wedge G_2$  heeft  $V \times W$  als verzameling van knopen. Verder geldt:  $(v_1, w_1) \sim (v_2, w_2)$  als  $v_1 \sim v_2$  en  $w_1 \sim w_2$ .

**Stelling 2.22** Laat  $\lambda_{1i_1}$  ( $i_1 = 1, 2, \dots, n_1$ ) en  $\lambda_{2i_2}$  ( $i_2 = 1, 2, \dots, n_2$ ) eigenwaarden zijn van  $G_1$  respectievelijk  $G_2$ . Dan zijn de eigenwaarden van  $G_1 \times G_2$  precies  $\lambda_{1i_1} \cdot \lambda_{2i_2}$ .

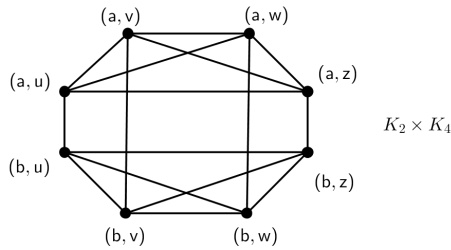
*Bewijs.* Zie [1].

□

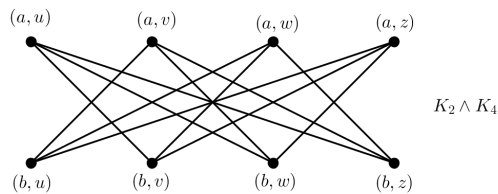
**Voorbeeld 2.23**



Figuur 2.1: Twee grafen  $K_2$  en  $K_4$



Figuur 2.2: Voorbeeld product



Figuur 2.3: Voorbeeld conjunctie

Merk op dat  $K_2 \times K_2 \times K_2$  dus gelijk is aan  $K_2 \wedge K_4$ .

## 2.5 Bipartiete grafen

**Stelling 2.24** Een graaf  $G$  is bipartiet dan en slechts dan als alle cykels van  $G$  zijn even, m.a.w.  $G$  geen cykels van oneven lengte bevat.

*Bewijs.*  $\implies$ : Stel dat  $G$  een bipartiete graaf is. Dan kan de knopen verzameling  $V$  in twee verzamelingen  $V_1$  en  $V_2$  opgesplitst worden zodat elke kant



van  $G$  een knoop van  $V_1$  verbindt met een knoop uit  $V_2$ . Dus elke cykel  $(v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$  heeft de knopen met oneven subscript in  $V_1$  en de even in  $V_2$  (of omgekeerd). Dus heeft de cykel even lengte.

$\Leftarrow$ : Neem aan dat  $G$  samenhangend is. Anders bekijken we de componenten van  $G$  gescheiden. Neem  $v \in V$  willekeurig, en laat  $V_1$  bestaan uit  $v$  en alle punten op even afstand van  $v$ . Neem  $V_2 = V - V_1$ . Omdat alle cycli van  $G$  even zijn, verbindt iedere kant een knoop van  $V_1$  met een knoop van  $V_2$ . Stel dat er een kant  $\{u, w\}$  is die twee knopen uit  $V_1$  verbindt. Maar dan vormen de paden van  $v$  naar  $w$  en van  $v$  naar  $u$  samen met de kant  $\{u, w\}$  een oneven cykel, een tegenspraak. Dus  $G$  is bipartiet.  $\square$

**Stelling 2.25** *Een graaf  $G$  is bipartiet dan en slechts dan als het spectrum van  $G$  symmetrisch is rond de oorsprong.*

*Bewijs.* Het bewijs is te vinden in [2].  $\square$

## 2.6 $k$ -de spectrale moment

**Definitie 2.26** Voor  $k \geq 0$  en  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  de eigenwaarden van een graaf  $G$  definiëren we het  $k$ -de spectrale moment van  $G$  als  $\sum_{i=1}^n \lambda_i^k$ .

**Stelling 2.27** *Zij  $A$  de bogenmatrix van een graaf  $G$  met  $n$  knopen. Dan is het  $k$ -de spectrale moment*

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^k = \text{tr}(A^k).$$

*Bewijs.*  $A$  is symmetrisch, dus  $A$  is diagonaliseerbaar. Dat wil zeggen dat er een orthogonale matrix  $P$  is zodat  $A = PA_0P^{-1}$  waarbij  $A_0$  de matrix is met op de diagonaal de eigenwaarden van  $A$ .

$$\begin{aligned} \text{tr}(A^k) &= \text{tr}(PA_0^kP^{-1}) \\ &= \text{tr}(P(A_0^kP^{-1})) \\ &= \text{tr}(P(P^{-1}A_0^k)) \\ &= \text{tr}((PP^{-1})A_0^k) \\ &= \text{tr}(A_0^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k \end{aligned}$$

$\square$

**Stelling 2.28** *Het aantal gesloten wandelingen van lengte  $k$  in een graaf  $G$  is gelijk aan het  $k$ -de spectrale moment.*

*Bewijs.* Dit is een direct gevolg van Stellingen 2.16 en 2.27.  $\square$

## 2.7 Integraal spectrum samenhangende kubische bipartiete graaf

**Lemma 2.29** *Zij  $G$  een kubische graaf, dan bevat deze graaf een even aantal knopen.*

*Bewijs.* Stel namelijk dat  $G$  een graaf is op  $k$  knopen. Omdat  $G$  3-regulier is bevat deze graaf  $3k/2$  kanten. Stel nu dat  $k$  oneven is. Dan is  $3k$  niet deelbaar door 2. Maar dit is onmogelijk. Dus  $k$  even.  $\square$

**Stelling 2.30** *Zij  $B$  een bipartiete kubische gehele graaf met  $n = 2p$  knopen. Dan is het spectrum van  $B$  gelijk aan:*

$$3, 2^x, 1^y, 0^{2z}, -1^y, -2^x, -3$$

voor zekere  $x, y, z \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ . Hierbij geven  $x, y$  en  $2z$  de multipliciteiten weer.

*Bewijs.* We hebben te maken met een kubische graaf. Deze heeft maximumgraad 3. Uit Propositie 2.11 volgt dan dat  $|\lambda| \leq \Delta(B) = 3$  voor elke eigenwaarde  $\lambda$  van  $B$ . We merken op dat  $B$  samenhangend is. Maar dan volgt uit Propositie 2.13 dat  $A$  irreducibel is, waar  $A$  de bogenmatrix is die hoort bij de bipartiete graaf  $B$ . Verder weten we dat  $A$  alleen niet-negatieve getallen bevat. Dan volgt uit Stelling 2.14 dat de grootste eigenwaarde,  $\lambda_1$ , simpel is. Verder volgt uit Stelling 2.25 dat het spectrum van  $B$  symmetrisch is, want  $B$  is bipartiet. Hieruit volgt het gevraagde spectrum.  $\square$

Met behulp van Definitie 2.26 en Stelling 2.28 komen we nu tot het volgende lemma:

**Lemma 2.31** *Laat  $B$  een bipartiete graaf zijn op  $n$  knopen, en het spectrum zoals in Stelling 2.30. Dan geldt:*

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^0 = 2 + 2x + 2y + 2z = n \quad (2.1)$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = 18 + 8x + 2y = 3n \quad (2.2)$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^4 = 162 + 32x + 2y = 15n + 8q \quad (2.3)$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^6 = 1458 + 128x + 2y = 87n + 96q + 12h \quad (2.4)$$

Hierbij staan  $q, h \in \mathbb{N}$  voor respectievelijk het aantal 4- en 6-cykels in  $B$ . Merk hierbij op dat het aantal gesloten wandelingen met oneven lengte gelijk is aan 0 omdat  $B$  een bipartiete graaf is.

*Bewijs.* De eerste gelijkheid van iedere vergelijking volgt rechtstreeks door het invullen van de  $\lambda_i$  zoals gegeven in Stelling 2.30. Het tweede deel is in alle vier gevallen verschillend.

In vergelijking (2.1) verkrijgen we deze gelijkheid doordat we weten dat er precies  $n$  eigenwaarden zijn. We verheffen nu iedere eigenwaarde tot de macht nul. Dit levert precies  $n$ .

Voor vergelijking (2.2) bekijken we het aantal gesloten wandelingen van lengte 2. Kies een knoop  $u$  uit  $B$ . Hiervoor zijn  $n$  mogelijkheden. De graaf is kubisch, dus we hebben 3 verschillende keuzes om naar een andere knoop  $v$  te gaan. Vanuit  $v$  is er nog maar één mogelijkheid om een wandeling van lengte 2 te maken, namelijk door over dezelfde kant terug te lopen naar  $u$ . Er zijn dus  $3n$  verschillende gesloten wandelingen.

We gaan op dezelfde manier te werk voor vergelijking (2.3), alleen bekijken we nu gesloten wandelingen van lengte 4. We tellen hiervoor eerst het aantal gesloten wandelingen van lengte 4 dat afkomstig is van een 4-cykel.

We herhalen dat  $q$  staat voor het aantal 4-cykels in de graaf. Je kunt in iedere 4-cykel in iedere knoop beginnen en eindigen. Dit geeft 4 mogelijkheden. Dan kunnen we nog met de klok mee of tegen de klok in lopen, dit geeft 2 mogelijkheden. Dus in totaal zijn er  $8q$  gesloten wandelingen afkomstig van 4-cykels.

Vervolgens bekijken we het aantal gesloten wandelingen waar je meer dan eens over een lijn loopt. Vanuit elk van de  $n$  knopen  $u$  heb je de volgende mogelijkheden:

- Loop naar een ander punt  $v$ , dit geeft drie mogelijkheden want  $B$  is kubisch. Loop vanuit  $v$  door naar nog een ander punt  $w$  (2 mogelijkheden). Loop daarna terug via  $v$  naar  $u$ . Dit geeft  $6n$  mogelijkheden.
- Loop vanuit  $u$  naar één van zijn burens  $v$  (3 mogelijkheden), loop daarna weer terug naar  $u$ . Loop vanuit  $u$  naar weer een ander punt  $w$  (2 mogelijkheden), en dan weer terug naar  $u$ . Dit geeft  $6n$  gesloten wandelingen van lengte 4.
- Loop naar  $v$ , dan terug naar  $u$ , weer naar  $v$  en dan weer naar  $u$ . Er zijn 3 mogelijkheden voor  $v$  dus dit geeft  $3n$  verschillende gesloten paden van lengte 4.

In totaal zijn er dus  $15n + 8q$  gesloten wandelingen van lengte 4. Vergelijking 2.4 bewijst men op eenzelfde manier als vergelijking 3.  $\square$



## Hoofdstuk 3

# Kubische bipartiete grafen met integraal spectrum

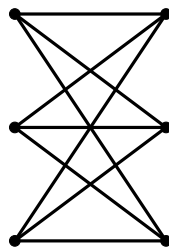
We gaan nu eerst op zoek naar de kubische bipartiete grafen met geheel spectrum. Dit doen we door voor het spectrum zoals gegeven in Stelling 2.30 te kijken naar de verschillende mogelijkheden voor  $x$ ,  $y$  en  $z$ .

### 3.1 Geval 1

Stel  $x = y = z = 0$ . Uit (2.1) volgt dan dat  $n = 2$ . Maar we kunnen geen kubische graaf construeren met 2 knopen.

### 3.2 Geval 2

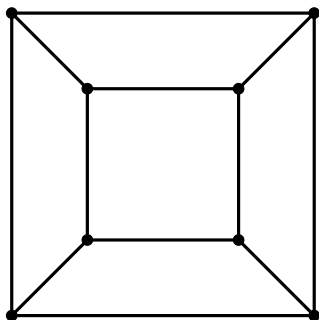
Stel  $x = y = 0$  en zij  $z > 0$ . Uit (2.2) volgt dan dat  $n = 6$ . We kunnen maar op één manier een kubische bipartiete graaf op 6 knopen krijgen, namelijk  $K_{3,3}$ . Deze heeft per constructie een integraal spectrum. Dus  $K_{3,3}$  is een kubische bipartiete graaf met integraal spectrum.



Figuur 3.1:  $B_1 \cong K_{3,3}$

### 3.3 Geval 3

Stel  $x = z = 0$  en zij  $y > 0$ . Uit (2.1) krijgen we dat  $2 + 2y = n$ . Daaruit volgt dat  $2y = n - 2$ . Als we dit invullen in (2.2), volgt  $18 + n - 2 = 3n$ , dit geeft  $n = 8$ . De kubus is de enige bipartiete kubische graaf met 8 knopen.  $K_2 \times K_2 \times K_2$  is de tweede kubische bipartiete graaf met integraal spectrum.



Figuur 3.2:  $B_2 \cong K_2 \times K_2 \times K_2$

### 3.4 Geval 4

Stel  $y = z = 0$  en zij  $x > 0$ . Uit (2.1) volgt dat  $x = \frac{1}{2}n - 1$ . Als we dat substitueren in (2.2) krijgen we  $n = -10$ . Maar dan kunnen we in dit geval dus geen bipartiete kubische graaf met integraal spectrum vinden.

### 3.5 Geval 5

Stel  $x = 0$  en zij  $y, z > 0$ . Dan geeft (2.2) ons  $18 + 2y = 3n$ . Als we nu  $y$  in (2.1) substitueren, krijgen we:

$$\begin{aligned} 2 + 3n - 18 + 2z &= n \\ z &= 8 - n \end{aligned}$$

We weten dat  $n \geq 6$  moet zijn, anders bestaat de graaf slechts uit 4 knopen, en dat levert nooit een kubische bipartiete graaf. Als  $n > 6$ , d.w.z.  $n \geq 8$ , dan is  $z \leq 0$  en dat kan niet. Dus de enige mogelijkheid is dat  $n = 6$ , dan is  $z = 2$ . Maar dan is  $y = 0$  en dat is in tegenspraak met de aanname dat  $y > 0$ . Dus in dit geval is het onmogelijk om een een kubische bipartiete graaf te construeren.

### 3.6 Geval 6

Stel  $y = 0$  en zij  $x, z > 0$ . Dan hebben we als verschillende eigenwaarden  $\mu_1 = 3, \mu_2 = 2, \mu_3 = 0, \mu_4 = -2$  en  $\mu_5 = -3$ . We passen nu Gevolg 2.18 toe. Dan krijgen we:

$$\begin{aligned}
 (3-2)(3-0)(3+2)(3+3)J &= n(A-2)(A-0)(A+2)(A+3) \\
 90J &= n(A^2-4)(A^2+3A) \\
 &= n(A^4+3A^3-4A^2-12A) \\
 &= n(A^4-4A^2)+3n(A^3-4A) \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

$B$  is een bipartiete graaf. Daarom weten we nu dat elke wandeling van  $v_i$  naar  $v_j$  oneven lengte heeft als  $v_i$  en  $v_j$  buren zijn. Dan krijgen we:

$$90J = n(0-4 \cdot 0) + 3n(w_3(i, j) - 4)$$

Hieruit kunnen we halen dat  $3n|90$ . Dus  $n = 6, 10$  of  $30$ . We hebben aangenomen dat  $y = 0$ , dan volgt met behulp van (2.2) dat  $8x = 3n - 18$ . We onderscheiden nu de 3 gevallen voor  $n$ :

- Stel  $n = 6$ , dan  $x = 0$ , maar dit geeft een tegenspraak want we namen aan dat  $x > 0$ .
- Stel  $n = 10$ , dan  $8x = 12$ , dit geeft geen geheel getal voor  $x$ .
- Stel  $n = 30$ , dan  $8x = 72$ , en daaruit volgt dat  $x = 9$ .

De enige optie is dus om  $n = 30$  te kiezen, dan geldt  $x = 9$ . Uit (2.1) volgt dan dat  $z = 5$ . Met behulp van (2.3) en (2.4) rekt men eenvoudig na dat  $q = h = 0$ .

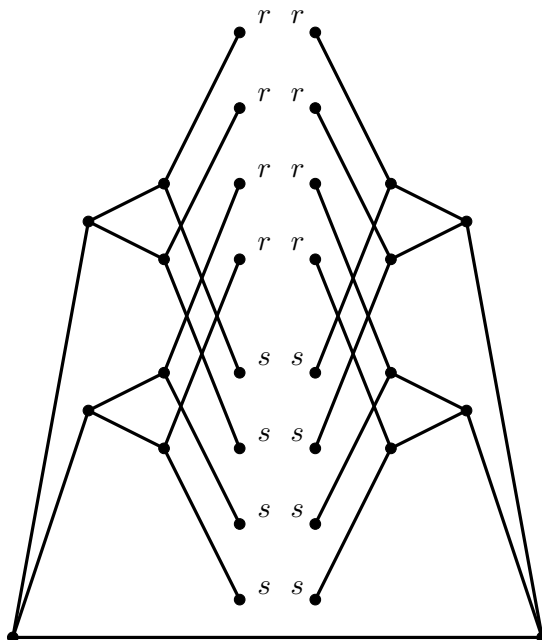
$B$  heeft dus geen cykels van lengte 4 of 6, en volgens Stelling 2.24 ook geen oneven cykels. Dus de omtrek van  $B$  is minstens 8. Vergelijking (3.1) wordt nu:

$$3J = (A^4 - 4A^2) + 3(A^3 - 4A) \quad (3.2)$$

Stel nu dat twee willekeurige punten  $v_i$  en  $v_j$  op afstand 5 van elkaar liggen, dan geeft (3.2) de gelijkheid  $3 = 0$ . Het is dus niet mogelijk dat knopen op afstand 5 van elkaar liggen. Dit zorgt ervoor dat  $\text{diam}(G) \leq 4$ .

Bekijk nu een willekeurige kant van  $B$ , zeg  $\{u_0, w_0\}$ . Beschouw de knopen  $u_0$  en  $w_0$  aan de uiteinden van deze kant. We willen niet dat de kanten, uitgezonderd de kant  $\{u_0, w_0\}$ , die uit  $u_0$  vertrekken in minder dan 7 stappen bij  $w_0$  uitkomen. In dat geval zou er namelijk een cykel zijn van lengte kleiner dan de omtrek.

Neem nu vanuit  $u_0$  en  $w_0$  drie stappen. We weten nu, omdat de graaf kubisch is en de kanten uit  $u_0$  en  $w_0$  niet samenkomen, dat dit  $2 \cdot (2 + 4 + 8)$  kanten oplevert. Deze ziet er als volgt uit:



Figuur 3.3: Constructie  $B_3$

In het plaatje zien we dat dit 30 knopen levert, en dit is precies het aantal wat we moeten hebben volgens onze berekening hierboven.

Beschouw de punten gelabeld  $r$  en  $s$  samen als een deelgraaf  $H$  van  $B$ . We hebben dus een 2-reguliere graaf  $H$ . We willen dat die er voor zorgt dat  $B$  een kubische bipartiete graaf wordt. Dus moet  $H$  voldoen aan de hierboven genoemde eisen. We kunnen dan twee gevallen onderscheiden.

### 3.6.1 Geval 6a

Stel  $H$  is een 16 cykel, zeg  $H = (v_0, v_1, \dots, v_{15}, v_0)$ , waarbij we de knopen modulo 16 genummerd hebben. Neem nu een knoop  $v_i$  in  $H$  willekeurig. We weten dat er een buur  $x$  van  $v_i$  is buiten  $H$  waarvoor geldt dat er via  $x$  een wandeling van  $v_i$  is naar een ander punt op de cykel. Dat punt moet  $v_{i+6}, v_{i+8}$  of  $v_{i+10}$  zijn. Als  $v_i$  namelijk naar een  $v_{i+a}$  gaat waarbij  $a$  oneven is, dan ontstaat er een oneven cykel, en dat mag niet omdat we een bipartiete graaf zoeken. Verder geldt dat  $a$  ook niet gelijk mag zijn aan 2 of 4, aangezien er dan een cykel ontstaat van lengte 4 of 6, en we hebben net aangetoond dat



de omtrek van de graaf gelijk is aan 8.

Maar we weten ook dat niet iedere  $v_i$  verbonden kan zijn met  $v_{i+8}$  want dan ontstaan er 6-cykels. Dus er is een  $v_j$  verbonden via een pad van lengte 2 van buiten  $H$  met  $v_{j+6}$  of  $v_{j+10}$ .

Neem zonder verlies van algemeenheid aan dat  $v_j$  verbonden is met  $v_{j+6}$ . We bekijken nu  $v_{j+11}$ . We weten dat  $\text{diam}(G) \leq 4$ , d.w.z. dat er tussen iedere 2 punten een pad van hoogstens lengte 4 loopt. De enige manier om nu een pad te krijgen tussen  $v_j$  en  $v_{j+11}$  is door  $v_{j+1}$  door middel van een 2-pad buiten  $H$  te verbinden met  $v_{j+11}$ . Hetzelfde moet gelden voor  $v_{j+6}$ . De enige manier om een pad van lengte kleiner dan of gelijk aan 4 te krijgen, is door  $v_{j+5}$  te verbinden met  $v_{j+11}$ , via een pad van lengte 2. Er zijn nu twee mogelijkheden:

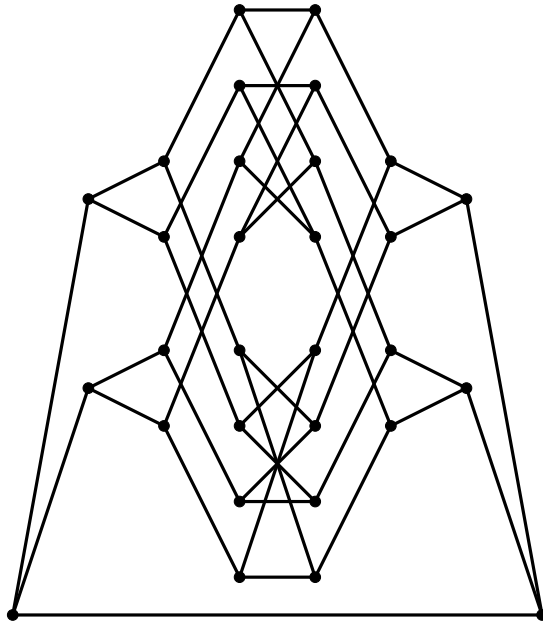
- Er zijn twee punten buiten  $H$  verbonden met  $v_{j+11}$ . Maar  $v_{j+11}$  heeft ook al twee burens binnen  $H$ . In dat geval is  $B$  niet kubisch.
- $v_{j+6}$  en  $v_{j+11}$  zijn verbonden met hetzelfde punt buiten  $H$ . Maar dan ontstaat er een 6-cykel tussen  $v_{j+1}$  en  $v_{j+5}$  en dat is in tegenspraak met onze eerdere aanname dat  $B$  in dit geval geen 6-cykels bevat.

Dus er zijn in dit geval geen mogelijkheden om een kubische bipartiete graaf met integraal spectrum te maken.

### 3.6.2 Geval 6b

Stel nu dat  $H$  gelijk is aan twee 8-cykels, met andere woorden  $H = 2C_8$ . Twee punten waartussen een 2-pad buiten  $H$  loopt, komen uit tegengestelde 8-cykels. Anders ontstaan er cykels van lengte  $\leq 8$ .

We bekijken nu de constructie van  $B$  zoals weergegeven in Figuur 3.3. Tussen iedere  $r$  en  $s$  is er een pad van lengte 2. Hierdoor weten we dat  $r$  en  $s$  ieder in een andere cykel moeten zitten. Dus de punten gelabeld  $r$  vormen samen één 8-cykel, de punten gelabeld  $s$  de andere. De 8-cykels kunnen maar op een unieke manier gevormd worden, anders ontstaan er 6-cykels. We krijgen dan de volgende bipartiete kubische graaf met integraal spectrum:



Figuur 3.4:  $B_3$

### 3.7 Geval 7

Stel  $z = 0$  en zij  $x, y > 0$ . Vergelijkingen (2.1), (2.2) en (2.3) geven nu:

$$2 + 2x + 2y = n \quad (3.3)$$

$$18 + 8x + 2y = 3n \quad (3.4)$$

$$162 + 32x + 2y = 15n + 8q \quad (3.5)$$

Als we nu vergelijking (3.3) van (3.4) afhalen, zien we gemakkelijk dat  $8 + 3x = n$ . We halen nu (3.4) van (3.5) af. Daaruit volgt:

$$\begin{array}{rcl} 162 + 32x + 2y & = & 15n + 8q \\ 18 + 8x + 2y & = & 3n \end{array} \quad (-)$$

---


$$144 + 24x = 12n + 8q$$

$$144 + 8(n - 8) = 12n + 8q$$

$$80 = 4n + 8q$$

$$20 = n + 2q$$

We passen Gevolg 2.18 weer op eenzelfde manier toe als bij Geval 6, dan krijgen we:

$$240J = n(A^5 - 5A^3 + 4A) + 3n(A^4 - 5A^2 + 4I_n) \quad (3.6)$$

Hieruit kunnen we aflezen dat  $n|80$ . Verder volgt dan uit de gelijkheid  $8+3x = n$  dat  $n = 20$  de enige optie is, omdat moet gelden  $x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . We lezen nu simpel uit de vergelijking  $n + 2q = 20$  af dat  $q = 0$ . Verder volgt door het invullen van bovenstaande variabelen in vergelijking (2.4) dat het aantal 6-cykels  $h = 20$ . Vergelijking (3.6) wordt nu:

$$12J = (A^5 - 5A^3 + 4A) + 3(A^4 - 5A^2 + 4I_n) \quad (3.7)$$

Bekijk nu twee punten  $u$  en  $w$  op afstand 2 van elkaar. We weten dat er een uniek pad van lengte 2 moet zijn tussen deze twee punten, zeg  $(u, v, w)$ , omdat  $B$  geen 4-cykels heeft. Bekijk de  $(u, w)$ -positie van de matrix in vergelijking (3.7). We weten dat er geen wandelingen van  $u$  naar  $w$  zijn van lengte 3 of 5, want dat levert in combinatie met het unieke 2-pad tussen  $u$  en  $w$  een oneven cykel. Natuurlijk is er ook geen wandeling van lengte 1 tussen twee punten op afstand 2. Verder is er precies een wandeling van lengte 2 van  $u$  naar  $w$ , namelijk het unieke pad van lengte 2. Ten slotte weten we dat de  $(u, w)$  positie in  $I_n$  gelijk is aan 0 omdat  $u \neq w$ . Als we nu vergelijking (3.7) bekijken, hebben we de volgende situatie:

$$12J = 0 + 3(A^4 - 5 + 0) \quad (3.8)$$

Dus  $A^4 = w_4(u, v) = 9$ . Hiervan bevatten 7 wandelingen  $v$ . De overige twee kunnen  $v$  niet bevatten. Dus zijn er twee paden van  $u$  naar  $w$  die  $v$  niet bevatten. Maar dan ligt ieder pad in precies twee 6-cykels. Hieruit volgt direct dat een 3-pad in hoogstens twee 6-cykels ligt. We kunnen nu twee gevallen onderscheiden.

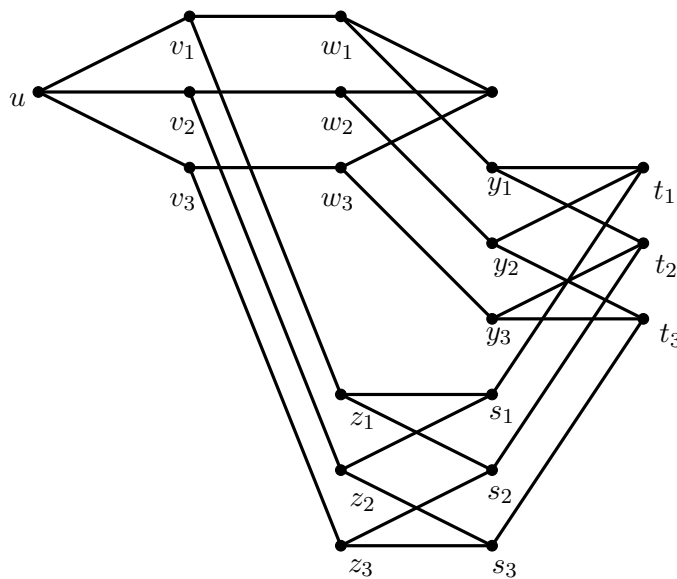
### 3.7.1 Geval 7a

Stel dat  $B$  minstens één 3-pad, zeg  $(u, v, w, x)$ , bevat die in twee 6-cykels ligt. De enige manier om deze twee 6-cykels te verkrijgen is door drie verschillende 3-paden te construeren. Noem deze 3-paden  $(u, v_i, w_i, x)$  met  $i = 1, 2, 3$ , zoals in Figuur 3.5.

Verbind iedere  $w_i$  nu met een nieuwe knoop  $y_i$ . We kunnen  $w_i$  niet met een  $w_j$  verbinden want dan zouden er cykels van lengte kleiner dan 6 ontstaan. Verder kunnen we twee  $w_i$  en  $w_j$  ook niet verbinden met eenzelfde  $y_i$ , dan zou er een 2-pad zijn dat in drie 6-cykels ligt. Op dezelfde manier verbinden we iedere  $v_i$  met een nieuwe  $z_i$ , waarbij  $d(u, z_i) = 2$ . We mogen  $y_i$  niet verbinden met een  $z_j$ , dan zou er of een derde 6-cykel ontstaan die een 2-pad  $(u, v_i, w_i)$

bevat, of er ontstaat een cykel van lengte kleiner dan 6. Maak daarom drie nieuwe knopen  $s_1, s_2$  en  $s_3$ . Verbind iedere  $s_i$  met twee  $z$ 's. Dit is nodig om een tweede 6-cykel voor het pad  $(v_i, u, v_j)$  te construeren. We kunnen  $s_i$  niet verbinden met een  $y$ , anders zouden er verboden 4-cykels ontstaan. Daarom verbinden we iedere  $s_i$  met een nieuwe knoop  $t_i$ .

We hebben nu alle knopen van  $B$  gevonden. Het enige wat rest is dat we nog 6 kanten toe moeten voegen. De enige plek om deze te plaatsen is tussen  $y$ 's en  $t$ 's. Om er voor zorgen dat het pad  $(w_i, v_i, z_i)$  bevat is in twee 6-cykels, kan dit maar op één manier. Zie hiervoor onderstaande figuur, welke de vierde bipartiete kubische graaf met integraal spectrum toont.



Figuur 3.5:  $B_4$

### 3.7.2 Geval 7b

Neem aan dat er geen 3-pad  $(u, v, w, x)$  is dat in twee 6-cykels ligt. Maar ieder 2-pad moet wel in twee 6-cykels liggen. Dus dat betekent dat we het pad  $(u, v, w)$  uit kunnen bereiden door óf  $x_1$  óf  $x_2$  toe te voegen aan het pad. Er ontstaan dan twee paden, namelijk  $(u, v, w, x_1)$  en  $(u, v, w, x_2)$ , die in verschillende 6-cykels liggen. Met andere woorden, we willen dat ieder paar van knopen die op afstand drie van elkaar liggen, met twee unieke 3-paden wordt gecompleteerd.

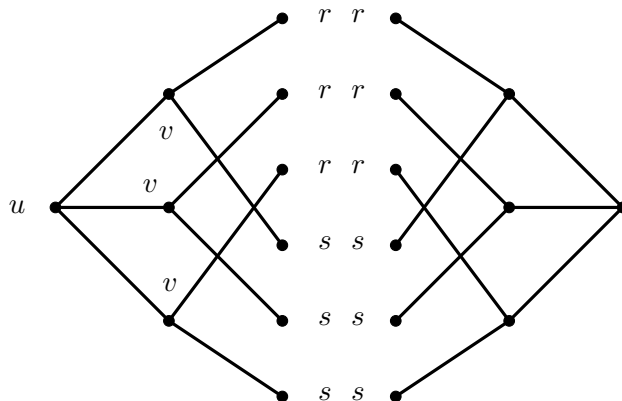
**Definitie 3.1** We definiëren  $D_k(u)$  als een deelverzameling van  $V$ , waarbij  $x \in D_k(u)$  als  $x$  op afstand  $k$  van  $u$  ligt.

Neem nu een willekeurige  $u \in V$ . Dan  $|D_1(u)| = 3$  omdat  $B$  kubisch is, verder geldt om dezelfde reden dat  $|D_2(u)| = 6$ . Merk hierbij op dat dit komt omdat er geen twee kanten vanuit  $D_1(u)$  naar één punt uit  $D_2(u)$  kunnen gaan aangezien we dan cykels krijgen van lengte  $< 6$ . Er zijn twaalf lijnen die vanuit  $D_2(u)$  naar  $D_3(u)$  gaan. We claimen dat  $|D_3(u)| = 6$ .

Stel namelijk dat dit niet het geval is. Dan is er dus een punt in  $D_3(u)$  waar drie of meer kanten naar toe gaan. Maar dan ligt er een 2-pad in meer dan twee 6-cykels. Dus gaan er slechts twee lijnen naar iedere knoop uit  $D_3(u)$ . Dus  $|D_3(u)| = 6$ .

Verder weten we dat  $B$  20 knopen heeft. We moeten er dus nog 4 bepalen. We weten dat er uit  $D_3(u)$  6 kanten vertrekken. We claimen dat  $|D_4(u)| = 3$  en  $|D_5(u)| = 1$ .

Stel dat  $|D_4(u)| = 2$ . We moeten deze twee knopen met 6 lijnen verbinden. Dit zou kunnen door beiden punten te verbinden met drie punten uit  $D_3(u)$ . Dan hebben beide punten graad 3. Echter heeft onze graaf dan maar 19 knopen, wat leidt tot een tegenspraak met onze aanname. Dus  $|D_4(u)| \neq 2$ . Stel nu  $|D_4(u)| = 4$ . Deze 4 punten kunnen niet allen drie burens hebben, aangezien er maar 6 lijnen zijn die naar de punten kunnen gaan. Maar dan is  $B$  niet kubisch. Hieruit kunnen we concluderen dat  $|D_4(u)| = 3$ , en dan dat  $|D_5(u)| = 1$ . We bekijken de constructie tot nu toe:



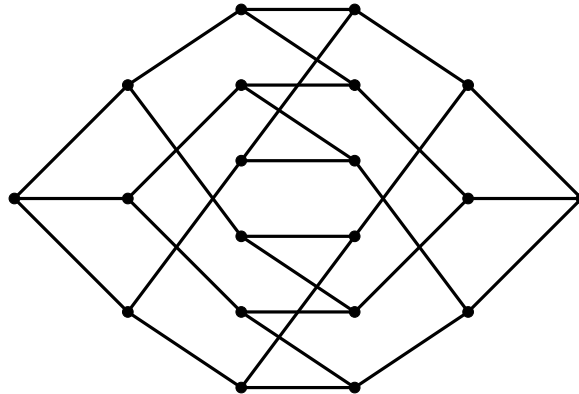
Figuur 3.6: Constructie  $B_5$

We kunnen de punten  $r$  en  $s$  opvatten als een deelgraaf  $H$  waarbij ieder punt graad 2 moet hebben. Nu rest ons nog te bepalen of  $H$  gelijk is aan twee 6-cykels of een 12-cykel.

Stel  $H = (w_0, w_1, \dots, w_{11}, w_0)$ , een 12-cykel. Voor  $w_0$  moet nu, net als voor onze willekeurig gekozen  $u$ , gelden dat  $|D_5(w_0)| = 1$ .  $w_5$  en  $w_7$  zijn de enige knopen die hiervoor in aanmerking zouden komen. We kunnen  $w_0, w_6$  of  $w_8$  via een 2-pad met  $w_0$  te verbinden. Stel we kiezen voor  $w_6$ , dan  $d(w_0, w_5) =$

$d(w_0, w_7) = 3$ , maar dan zou er geen enkel punt meer op afstand 5 van  $w_0$  liggen, een tegenspraak.

We kiezen nu zonder verlies der algemeenheid  $d(w_0, w_4) = 2$ , d.w.z. er loopt een 2-pad van  $w_0$  naar  $w_4$ . Vanwege dezelfde reden trekken we ook een 2-pad tussen  $w_2$  en  $w_6$ . Maar dan zijn  $w_8$  en  $w_{10}$  ook verbonden met een 2-pad buiten  $H$ . Echter is er ook het pad  $(w_8, w_9, w_{10})$ . Maar dan bevat  $B$  een 4-cykel, wat in tegenspraak is met de aanname. Dus  $H = 2C_6$ . De knopen gelabeld  $r$  vormen één 6-cykel, de knopen gelabeld  $s$  de andere, om te voorkomen dat er 4-cykels ontstaan. We kunnen de eerste 6-cykel willekeurig construeren, zolang deze maar aan de eerder gestelde eisen voldoet. De andere 6-cykel matchen we met de eerste, zodat paden  $(v, u, v)$  ieder in twee 6-cykels liggen. Dit levert de volgende bipartiete kubische graaf met integraal spectrum:



Figuur 3.7:  $B_5$

### 3.8 Geval 8

Neem aan dat  $x, y, z \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . We trekken vergelijking (2.3) van (2.2) af, dan krijgen we:

$$\begin{array}{rcl}
 162 + 32x + 2y & = & 15n + 8q \\
 72 + 32x + 8y & = & 12n \qquad (-) \\
 \hline
 90 - 6y & = & 3n + 8q \\
 90 - 6y - 8q & = & 3n
 \end{array}$$

Omdat  $y \geq 1$  en  $q \geq 0$  krijgen we:  $\frac{1}{2}n = 15 - y - 4q/3 \leq 14$ . Verder geeft Hoffman's polynoom dat  $n|240$ . We hebben dan 5 mogelijke opties voor de

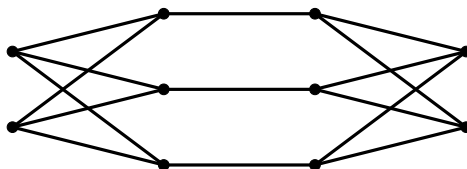
verschillende variabelen.

$p$	$n$	$x$	$y$	$z$	$q$	$h$
5	10	1	2	1	6	12
6	12	2	1	2	6	8
8	16	3	3	1	3	14
10	20	5	1	3	3	6
12	24	6	3	2	0	12

We onderscheiden de 5 gevallen zoals weergegeven in de tabel.

### 3.8.1 Geval 8a

Het aantal knopen van  $B$  is gelijk aan 10. We beschouwen het bipartiete complement van  $B$ :  $\bar{B} = K_{5,5} - B$ . We weten dat  $B$  kubisch moet zijn, dus  $\bar{B}$  moet 2-regulier zijn. De enige 2-reguliere grafen zijn cyclen. Bij een graaf met 10 punten zijn de enige mogelijkheden dus een 10-cykel, of een 4-cykel en een 6-cykel. Merk op dat twee 5-cykels niet mogelijk zijn, omdat de graaf bipartiet moet zijn. Stel dat  $\bar{B} = C_{10}$ , dan is  $B$  gelijk aan de Möbiusladder  $M_{10}$ . Maar deze is niet integraal, zie [7]. Stel  $\bar{B} = C_4 \cup C_6$ . Dan krijgen we een bipartiete graaf met integraal spectrum:



Figuur 3.8:  $B_6$

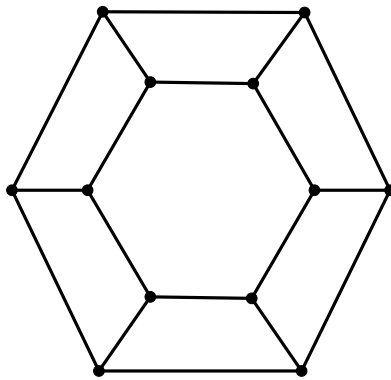
### 3.8.2 Geval 8b

Neem  $n = 12$ . Merk op dat  $B$  zes 4-cykels en acht 6-cykels bevat. We gaan laten zien dat  $B$  geen deelgraaf  $K_{2,3}$  kan bevatten, die gevormd is door twee punten  $u$  en  $w$  samen met twee 3-paden  $\{u, v_i, w\}$ .

Stel namelijk dat  $B$  wel de deelgraaf  $K_{2,3}$  bevat. De overige 7 knopen van  $B$  vormen samen met 9 kanten een deelgraaf met drie 4-cykels. Merk op dat we ook al drie 4-cykels hebben in  $K_{2,3}$ . Iedere  $v_i$  moet verbonden worden met een unieke  $x_i$ . Om een zevende 4-cykel te voorkomen, moeten alle  $x_i$  voor  $i = 1, 2, 3$  verbonden worden met drie nieuwe knopen  $y_i$ , deze  $y_i$  verbinden we dan weer met een laatste punt  $z$ . Deze punten samen vormen drie 6-cykels.

Maar nu bevat  $B$  in tegenstelling tot de hypothese 10 6-cykels. Dus  $K_{2,3}$  is geen deelgraaf van  $B$ .

We weten dat de graaf 18 kanten bevat. Verder liggen er 4 kanten in één 4-cykel, waarvan er precies 6 zijn. Dus een kant ligt gemiddeld in  $6 \cdot \frac{4}{18} = \frac{4}{3}$  4-cykels. Kies  $\{u, v\}$  nu als het maximum aantal 4-cykels waar een kant in kan liggen. Dit kan niet drie zijn, want dan zou  $K_{2,3}$  een deelgraaf zijn van  $B$ . Dus moeten er twee 4-cykels zijn waar  $\{u, v\}$  in ligt. Deze twee 4-cykels vormen een deelgraaf van  $B$ . De overige 6 knopen en 7 kanten moeten samen met de deelgraaf een bipartiete graaf vormen. Er zijn nu twee mogelijkheden. Omdat de  $K_{2,3}$  geen deelgraaf van  $B$  mag zijn, is de enige optie die overblijft  $B = K_2 \times C_6$ .



Figuur 3.9:  $B_7 = K_2 \times C_6$

### 3.8.3 Geval 8c

In dit geval is  $n = 16$ , er zijn echter maar 3 4-cykels. Kies nu een knoop  $v$  die niet in een 4-cykel ligt. We kunnen weer Hoffman's polynoom berekenen, dan krijgen we:

$$45J = A^6 - 5A^4 + 4A^2$$

Bekijk nu voor  $v$  de  $(v, v)$ -positie in dit polynoom. Dan krijgen we:

$$45 = w_6(v, v) - 5w_4(v, v) + 4w_2(v, v) \quad (3.9)$$

We bepalen nu het aantal gesloten wandelingen van  $v$  naar  $v$ .

- $w_2(v, v) = 3$  want  $v$  heeft precies drie burens, en elk van deze burens kan samen met  $v$  een wandeling vormen van lengte 2.



- $w_4(v, v) = 15$ . Er zijn namelijk 6 mogelijkheden om met een punt op afstand 2 een wandeling van lengte 4 te vormen. Verder zijn er 9 mogelijkheden om met één of twee knopen op afstand 1 een wandeling van lengte 4 te krijgen.
- $w_6(v, v) = 87 + 2a + 2b$ .
  - $a$  staat voor het aantal 6-cykels waarin  $v$  is bevat. Dit geeft precies  $2a$  manieren want we kunnen de cykel rechts- of linksom doorlopen.
  - $b$  staat voor het aantal burens van  $v$  die in een 4-cykel bevat zijn. Die geven op dezelfde manier ook precies  $2b$  wandelingen van lengte 6.
  - Er zijn 12 manieren om een wandeling van lengte 6 te maken door een knoop op afstand 3 van  $v$  te bereiken.
  - Door naar één of meerdere knopen op afstand 1 te lopen, zijn er 27 mogelijkheden om een wandeling van lengte 6 te maken.
  - Als we eerst een knoop op afstand 2 bereiken en dan een knoop op afstand 2 zijn er precies 18 wandelingen van lengte 6. Maar dan zijn er ook 18 mogelijkheden om eerst een knoop op afstand 2 te bereiken en daarna één op afstand 1. Dit geeft totaal 36 mogelijkheden.
  - Als laatste zijn er 12 mogelijkheden om een pad te vormen door eerst een knoop op afstand 2 te bereiken en daarna terug te lopen naar de knoop afstand 1 en dan nog naar een andere knoop op afstand 2 te lopen.

We vullen dit nu in vergelijking 3.9, dan krijgen we

$$45 = 24 + 2a + 2b.$$

Als we deze vergelijking nu modulo 2 reduceren krijgen we de tegenspraak  $1 \equiv 0 \pmod{2}$ . Dus we kunnen in dit geval geen bipartiete kubische graaf met integraal spectrum construeren.

### 3.8.4 Geval 8d

Neem in dit geval  $n = 20$ . Zij  $v$  een knoop van  $B$ . We definiëren de volgende gewichtsformule voor  $v$

$$w(v) = h(v) + 4q(v) + 3q(u).$$

Hierbij staat  $h(v)$  voor het aantal 6-cykels die  $v$  bevatten,  $q(v)$  voor het aantal 4-cykels waarin  $v$  is bevat en  $q(u)$  voor het aantal burens van  $v$  die bevat zijn

in een 4-cykel. We berekenen het gemiddelde gewicht:

$$\begin{aligned}\bar{w} &= \sum_{v \in V} w(v)/20 \\ &= (6 \cdot 6 + 3 \cdot 4 \cdot 4 + 3 \cdot 4)/20 \\ &= 4\frac{4}{5}\end{aligned}$$

Dus  $B$  bevat een knoop, zeg  $v_0$ , met gewicht ten hoogste 4.  $v_0$  ligt dus in hoogstens één 4-cykel. Stel nu dat  $v_0$  in geen enkele 4-cykel ligt. Merk op dat  $|D_3(v_0)| \leq 7$  want  $|D_1(v_0)| = 3$  omdat  $B$  een bipartiete graaf is met twee knopenverzamelingen van gelijke grootte. Verder weten we dat  $|D_2(v_0)| = 6$ , want  $v_0$  ligt in geen enkele 4-cykel. Dus er zijn twaalf kanten van  $D_2(v_0)$  naar  $D_3(v_0)$ . Maar omdat we 12 kanten willen verdelen over hoogstens 7 knopen, ontstaat er minstens één 6-cykel waarin  $w$  is bevat en dus is  $w_5(0) \geq 5$ .

Stel nu dat  $v_0$  in één 4-cykel ligt. Dan is  $|D_2(v_0)| = 5$ . Dus er zijn 9 kanten van  $D_2$  naar  $D_3$ . Bovendien is om dezelfde reden als eerder  $|D_3(v_0)| \leq 7$ . Deze 9 kanten dragen minstens 2 bij aan het gewicht  $w(v_0)$ . Maar  $v_0$  draagt al 4 bij aan  $w(v_0)$ , omdat deze in een 4-cykel ligt. Maar dan is  $w(v_0) \geq 6$ .

Maar dan heeft elk punt dus een gewicht dat groter is dan het gemiddelde, en dat is niet mogelijk. Dus kunnen we geen samenhangende kubische bipartiete graaf construeren.

### 3.8.5 Geval 8e

We weten  $n = 24$ , en er zijn geen 4-cykels. Hoffman's polynoom wordt dan

$$30J = (A^6 - 5A^4 + 4A^2) + 3(A^5 - 5A^3 + 4A).$$

Bekijk nu een willekeurige kant  $\{u, v\}$ , dan wordt Hoffman's polynoom voor de  $(u, v)$ -positie

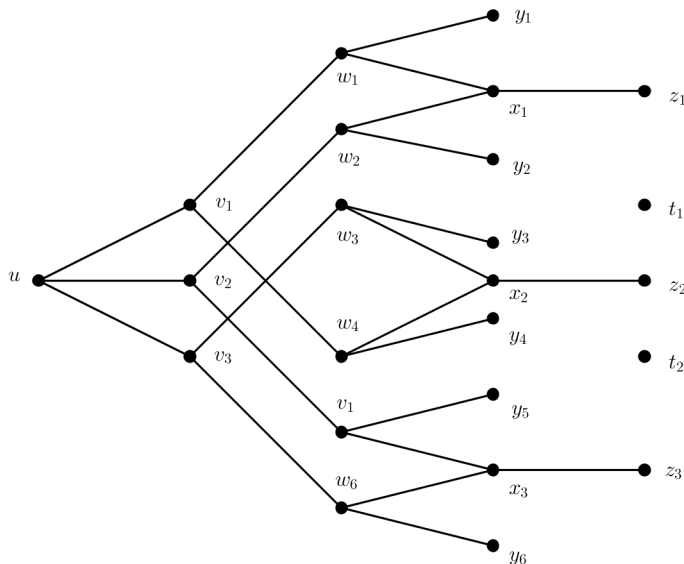
$$30 = 3(w_5(u, v) - 5w_3(u, v) + 4). \quad (3.10)$$

Namelijk als  $\{u, v\}$  een kant is in een bipartiete graaf, zijn er geen even wandelingen van  $u$  naar  $v$ , omdat  $u$  en  $v$  niet in dezelfde knopenverzamelingen liggen.

We weten dat er geen 4-cykels zijn. Op een zelfde manier als hiervoor kunnen we berekenen dat  $w_3 = 5$  en  $w_5 = 29 + h(uv)$ , waarbij  $h(uv)$  staat voor het aantal 6-cykels dat de kant  $\{u, v\}$  bevat. Als we dit invullen in 3.10 krijgen we  $h(uv) = 2$ . Dus iedere kant uit  $B$  is bevat in twee 6-cykels. Een gevolg daarvan is dat iedere knoop in 3 6-cykels ligt. Verder mag geen enkel pad  $\{u, v, w\}$  in twee 6-cykels liggen. Dat zou er namelijk voor zorgen dat  $v$  in 4 6-cykels ligt. Dus ieder pad  $\{u, v, w\}$  is bevat in een unieke 6-cykel.

Zij  $u \in V$  willekeurig. We nummeren zijn burens als  $v_1, v_2$  en  $v_3$ . De burens van deze knopen nummeren we op hun beurt  $w_i$  met  $i \in \{1, \dots, 6\}$ , zoals te

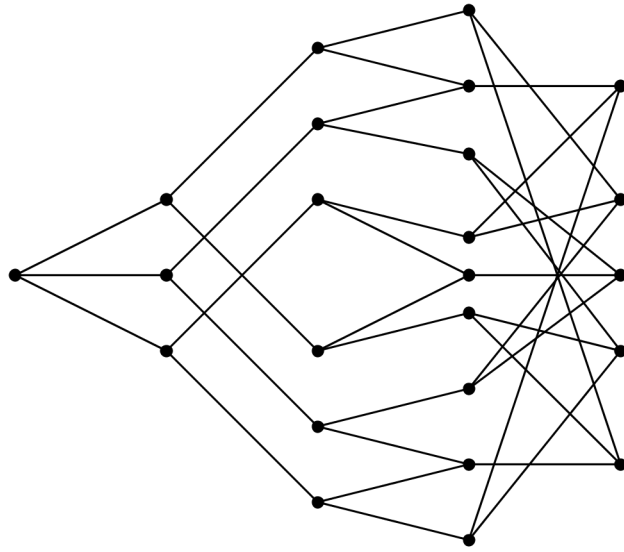
zien in Figuur 3.10. Om er voor te zorgen dat ieder pad  $\{v_i, u, w_i\}$  bevat is in een 6-cykel moeten we 3  $x_1, x_2$  en  $x_3$  toevoegen zoals te zien in het figuur. Voor iedere andere knoop die met  $w_i$  en  $w_j$  verbonden zou worden, zou er een vierde 6-cykel zijn waarin  $u$  bevat is. Dus moeten we 6 knopen, zeg  $y_i$ , toevoegen zodat  $y_i$  is verbonden met  $w_i$ .



Figuur 3.10: Constructie  $B_8$

Stel nu dat er  $x_i$  en  $x_j$  zijn die een gemeenschappelijke buur hebben. Dan zou er een pad  $\{v_i, w_j, x_k\}$  zijn die in twee 6-cykels ligt, maar dit is in tegenspraak met onze eerdere aanname. Dus verbinden we drie nieuwe knopen,  $z_1, z_2$  en  $z_3$ , met corresponderende  $x_i$ . We hebben nu 22 van de 24 knopen gevonden. Label de laatste twee knopen als  $t_1$  en  $t_2$ .

Om een 4-cykel of een tweede 6-cykel voor het pad  $\{v_1, w_1, x_1\}$  te voorkomen, moeten we  $z_1$  verbinden met  $y_3$  en  $y_6$ . Om dezelfde reden verbinden we  $z_2$  met  $y_2$  en  $y_5$ , en  $z_3$  met  $y_1$  en  $y_4$ . Bovendien weten we dat het pad  $\{w_i, v_i, w_{i+3}\}$  al in een 6-cykel ligt voor  $i = 1, 2, 3$ . Dus  $y_i$  en  $y_{i+3}$  moeten verbonden zijn met tegengestelde  $t$ 's. Hetzelfde geldt voor  $y_{2i}$  en  $y_{2i-1}$  met  $i = 1, 2, 3$ , want  $\{w_{2i}, x_i, w_{2i-1}\}$  ligt al in een 6-cykel. Dit zorgt er voor dat  $t_1$  verbonden is met  $y_1, y_2, y_5$  en  $t_2$  met  $y_2, y_4, y_6$ . Dit geeft als resultaat de achtste samenhangende bipartiete kubische graaf met integraal spectrum, zoals gegeven in Figuur 3.11.



Figuur 3.11:  $B_8$

We hebben nu alle gevallen van het mogelijke spectrum bekeken. Hieruit vonden we 8 grafen. Er zijn dus precies 8 samenhangende kubische bipartiete grafen met integraal spectrum.

## Hoofdstuk 4

# Kubische niet-bipartiete grafen met integraal spectrum

We zullen in dit hoofdstuk met behulp van de conjunctie  $B = G \wedge K_2$  de laatste 5 kubische grafen met integraal spectrum vinden. We bekijken hiertoe eerst de volgende lemma's.

**Lemma 4.1** *Als  $G$  kubisch is met integraal spectrum, dan is  $B = G \wedge K_2$  een kubische bipartiete graaf met integraal spectrum.*

*Bewijs.* Uit de definitie van conjunctie volgt direct dat  $B$  bipartiet. Verder volgt uit de definitie dat de graad van de knopen gelijk blijft na conjunctie. Dit komt omdat alle verbindingen tussen knopen in  $G$ , in  $B$  als het ware worden open gebroken om vervolgens een verbinding te vormen met de disjuncte kopie van de knoop in de andere deelverzameling van de bipartiete graaf.  $\square$

**Lemma 4.2** *Een bipartiete graaf  $B$  kan ontbonden worden in een conjunctie  $B = G \wedge K_2$  dan en slechts dan als*

1. *De twee knopenverzamelingen van  $B$  hebben dezelfde grootte.*
2. *Deze knopen kunnen worden gelabeld als  $u_1, u_2, \dots, u_n$  en  $v_1, v_2, \dots, v_n$  zodat voor  $1 \leq i, j \leq n$  geldt:*
  - $u_i \not\sim v_i$ ;
  - $u_i \sim u_j \iff u_j \sim v_i$ .

*Bewijs.* Zij  $B$  een bipartiete graaf die ontbonden kan worden in een conjunctie  $G \wedge K_2$ . De conjunctie van een graaf  $G$  met  $K_2$  zorgt voor twee disjuncte kopieën van  $G$ . Dit kan alleen het geval zijn als  $B$  twee knopenverzamelingen heeft van dezelfde grootte.

Stel dat  $v_i$  en  $v_j$  verbonden zijn in een graaf  $G$ . In de conjunctie kunnen we deze punten duiden als  $u_i = (a, v_i), u_j = (a, v_j), w_i = (a, v_i)$  en  $w_j = (b, v_j)$ .

Uit de definitie van de conjunctie halen we nu dat  $u_i = (a, v_i) \not\sim (b, v_i)$  in  $B$ , want  $v_i$  is niet verbonden met  $v_i$  in  $G$ . Stel nu dat  $u_i$  en  $w_j$  verbonden zijn in  $B$ . Met behulp van de definitie van conjunctie volgt dat  $v_i$  verbonden is met  $v_j$  in  $G$ . Maar dan is  $v_j$  ook verbonden met  $v_i$ . Dus is  $u_j$  verbonden met  $w_i$  in  $B$ . Omgekeerd gaat op dezelfde manier.  $\square$

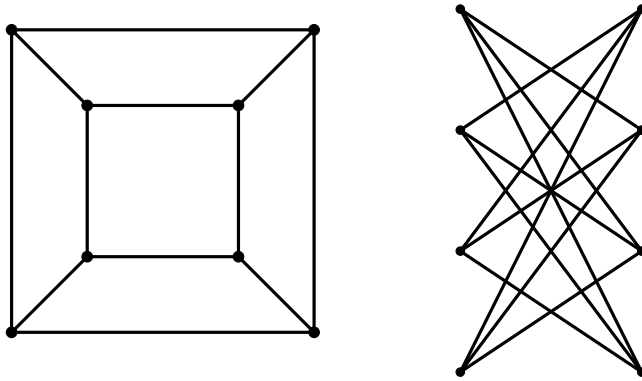
We bekijken nu aan de hand van de grafen die we gevonden hebben in het vorige hoofdstuk of deze te ontbinden zijn in  $G \wedge K_2$ .

Met behulp van Lemma 4.2 weten we dat de conjunctie ervoor zorgt dat de knopenverzameling van  $G$  in  $B$  verdubbeld is.

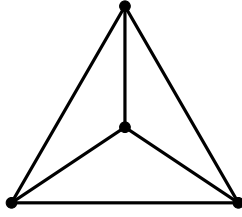
Als eerste beschouwen we de grafen  $B_1, B_3$  en  $B_6$ . Deze grafen hebben respectievelijk 6, 30 en 10 knopen. We zijn op zoek naar een  $G$  zodat  $G \wedge K_2 = B_i$ , waarbij  $i \in \{1, 3, 6\}$ . Maar voor de drie opties zou  $G$  dan respectievelijk 3, 15 en 5 knopen bevatten. Maar een kubische graaf kan niet een oneven aantal knopen bevatten. Dus  $B_1, B_3$  en  $B_6$  zijn niet te ontbinden in een conjunctie  $G \wedge K_2$ .

Stel nu dat  $(u, v_1, u_2, v_3, u_4, \dots, v_{2n-1}, u_{2n}, v)$  een pad is van  $u$  naar  $v$ . Volgens Lemma 4.2 is er dan een tweede pad  $(v, u_1, v_2, u_3, v_4, \dots, u_{2n-1}, v_{2n}, u)$  van  $u$  naar  $v$ . Dit pad moet anders zijn dan het eerste om te voorkomen omdat anders  $u_n$  en  $v_n$  verbonden zouden zijn. Dus voor alle  $i, k \in \{1, \dots, n\}$  is er een even aantal paden van lengte  $2k + 1$  van  $u_i$  naar  $v_i$ .

We bekijken nu  $B_2$ . We kunnen de kubus ook op een andere manier tekenen:



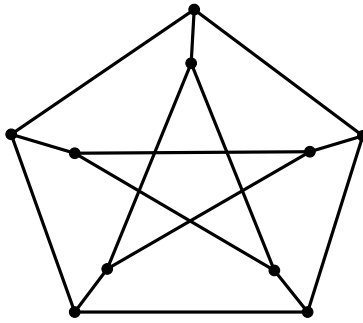
Ieder punt staat hierbij tegenover zijn unieke punt op afstand 3. Dus we kunnen ieder punt met zijn unieke punt op afstand drie identificeren dan krijgen we  $K_2 \times K_2 \times K_2 = K_4 \wedge K_2$ . Dus  $K_4$  is de eerste samenhangende kubische niet-bipartiete graaf met integraal spectrum.



Figuur 4.1:  $G_9 = K_4$

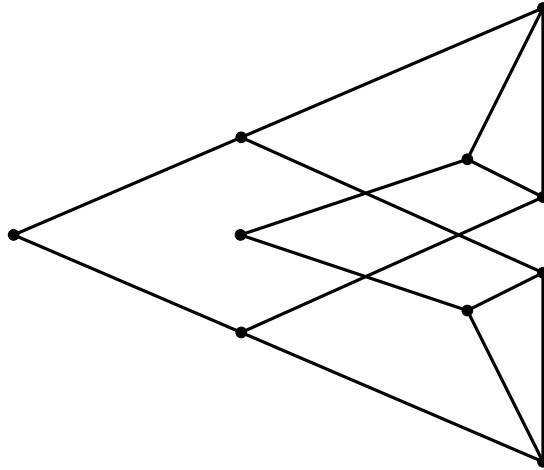
We bekijken  $B_4$ . Zie ook Figuur 3.5. De enige knopen op een oneven afstand van  $u$  en met een even aantal paden zijn  $s_1, s_2$  en  $s_3$ . Maar als we  $u$  identificeren met  $s_1$ , moeten we ook identificeren,  $v_1$  en  $z_2$ ,  $v_2$  en  $z_1$ ,  $w_1$  en  $s_3$ ,  $w_2$  en  $s_2$ ,  $x$  en  $z_3$ , en dan als laatste  $v_3$  en  $w_3$ . Maar dat is in tegenspraak met Lemma 4.2 dus kunnen we  $B_4$  niet ontbinden.

Bekijk nu  $B_5$ . We kunnen iedere knoop identificeren met een unieke knoop of afstand 5. Op eenzelfde manier als bij de kubus krijgen we dan  $B_5 = P \wedge K_2$ , waar  $P$  staat voor de Petersen graaf. Dus  $G_{10} = P$ .



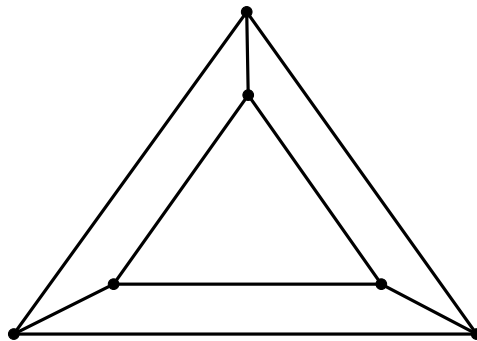
Figuur 4.2:  $G_{10} = P$

We kunnen echter ook een knoop  $v$  van  $B_4$  identificeren met een knoop op afstand 3. Als we zo door gaan, vinden we de decompositie  $B_5 = G_{11} \wedge K_2$ .



Figuur 4.3:  $G_{11}$

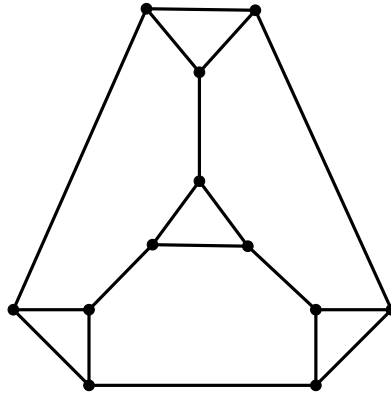
Zo vinden we ook dat  $B_7 = (K_2 \times K_3) \wedge K_2$  de unieke decompositie is van  $B_7$ . Dus  $G_{12}$  is een niet-bipartiete graaf met integraal spectrum.



Figuur 4.4:  $G_{12} = K_2 \times K_3$

Als laatste bekijken we  $B_8$ . Dan kan  $u$  alleen geïdentificeerd worden met een van de  $x_i$ . De identificaties die daarop volgen, zorgen ervoor dat  $G_8 = G_{13} \times K_2$ .





Figuur 4.5:  $G_{13}$

We hebben nu door alle opties te bekijken, exact 13 samenhangende kubische grafen met integraal spectrum gevonden.



# Bibliografie

- [1] K. Balinska, D. Cvetković, Z. Radosavljevi, S. Simić and D. Stevanovi, *A survey on integral graphs*, Publikacije Elektrotehnickog fakulteta-serija, matematika 13, 2002, pp. 42-65
- [2] N. Biggs, *Algebraic graph theory*, Cambridge university press, 1993
- [3] D. Cvetković, P. Rowlinson and S. Simić, *An Introduction to the Theory of Graph Spectra*, Cambridge University Press, 2010
- [4] F. Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, 1969
- [5] A.J. Hoffman, *On the polynomial of a graph*, The American Mathematical Monthly Vol. 70, No. 1, Januari 1963, pp. 30-36
- [6] D.A. Marcus, *Number fields*, New York: Springer-Verlag, 1977
- [7] A.J. Schwenk, *Computing the characteristic polynomial of a graph*, Graphs and Combinatorics, (R. Bari and F. Harary, eds.) Springer-Verlag, Berlin, 1974, pp. 153-172
- [8] A.J. Schwenk, *Exactly thirteen connected cubic graphs have integral spectra*, Theory and Applications of Graphs, Springer Berlin Heidelberg, 1978. 516-533



# Lijst van figuren

1.1	Voorbeeld van een graaf en zijn bogenmatrix . . . . .	9
1.2	Voorbeeld van een graaf en zijn Laplacematrix . . . . .	9
2.1	Twee grafen $K_2$ en $K_4$ . . . . .	16
2.2	Voorbeeld product . . . . .	16
2.3	Voorbeeld conjunctie . . . . .	16
3.1	$B_1 \cong K_{3,3}$ . . . . .	21
3.2	$B_2 \cong K_2 \times K_2 \times K_2$ . . . . .	22
3.3	Constructie $B_3$ . . . . .	24
3.4	$B_3$ . . . . .	26
3.5	$B_4$ . . . . .	28
3.6	Constructie $B_5$ . . . . .	29
3.7	$B_5$ . . . . .	30
3.8	$B_6$ . . . . .	31
3.9	$B_7 = K_2 \times C_6$ . . . . .	32
3.10	Constructie $B_8$ . . . . .	35
3.11	$B_8$ . . . . .	36
4.1	$G_9 = K_4$ . . . . .	39
4.2	$G_{10} = P$ . . . . .	39
4.3	$G_{11}$ . . . . .	40
4.4	$G_{12} = K_2 \times K_3$ . . . . .	40
4.5	$G_{13}$ . . . . .	41