Het Handelsreizigersprobleem met Verboden Omgevingen door Roosters op een Cilinder, Torus en Möbiusband

Desi Beckers
s3029255

Bachelorscriptie Wiskunde
Begeleider: Wieb Bosma

24 augustus 2017

Samenvatting

Het Handelsreizigersprobleem (Traveling Salesman Problem; TSP) is een veel beschreven probleem waar in een graaf wordt gezocht naar de kortste tour door de graaf waarbij alle knopen precies eenmaal doorlopen worden. Van het TSP zijn meerdere varianten en extensies bestudeerd, waaronder het Handelsreizigersprobleem met Verboden Omgevingen (Traveling Salesman Problem with Forbidden Neighborhoods; TSPFN) door roosters op een vlak. In deze scriptie zal gezocht worden naar oplossingen voor het TSPFN door roosters op een cilinder, torus en Möbiusband.

Inhoudsopgave

1 Inleiding

Eén van de meest bestudeerde en bekende combinatorische optimalisatieproblemen is het Handelsreizigersprobleem (Traveling Salesman Problem; TSP). Het TSP werd voor het eerst beschreven in 1831 [1] en sindsdien zijn er vele varianten beschreven, waaronder het TSP met clustering [2], het tijdsafhankelijke TSP [3] en het asymmetrische TSP [4]. In deze scriptie zal een in 2017 omschreven variant van het TSP nader bestudeerd worden, namelijk het Handelsreizigersprobleem met Verboden Omgevingen (Traveling Salesman Problem with Forbidden Neighborhoods; TSPFN). Alvorens het TSPFN te omschrijven zal eerst wat meer uitleg gegeven worden over het TSP.

In het originele TSP wordt er gezocht naar de kortste tour door een verzameling van punten welke verbonden zijn door wegen waarbij alle punten precies eenmaal doorlopen worden en waarbij weer geëindigd wordt in het beginpunt [2]. Dit probleem kan worden beschreven als een probleem in de grafentheorie. Daarom zal eerst een aantal definities uit de grafentheorie gegeven worden welke van belang zijn binnen het TSP.

Een *graaf* $G = (V, E)$ bestaat uit een verzameling *knopen* V en een verzameling *kanten* E. Een kant $e \in E$ verbindt twee knopen $v, w \in V$ en wordt daarom ook wel genoteerd als $e = e_{vw}$. De *lengte van een kant* e_{vw} wordt bepaald door een afstandsfunctie $d : V \times V \to [0, +\infty)$, die aan ieder paar punten $v, w \in V$ een niet-negatief reëel getal toekent, ook wel genoteerd als $d(e_{vw})$. Een *wandeling* in een graaf G is een rij van knopen $(v_1, v_2, ..., v_k)$ zodanig dat $\forall i \in \{1, 2, ..., k-1\}$ de knopen v_i en v_{i+1} door een kant verbonden zijn. Wanneer in een wandeling $(v_1, v_2, ..., v_k)$ alle knopen verschillend zijn, dan wordt deze wandeling ook wel een *pad* genoemd. Een *Hamiltonpad* is een pad door de knopen in een graaf G zodanig dat alle $v \in V$ op het pad liggen. Een *Hamiltoncircuit* is een gesloten Hamiltonpad, wat inhoudt dat het circuit in hetzelfde punt begint als eindigt. De *lengte van een Hamiltoncircuit* is de som van de lengtes van alle kanten die in het circuit doorlopen worden. Dit allemaal samengenomen kan het TSP als volgt gedefinieerd worden:

Probleem 1.1 (Traveling Salesman Problem)**.** *Zij $G = (V, E)$ een graaf en zij $d(e_i)$ de lengte van kant $e_i \in E$. Vind nu het kortste Hamiltoncircuit door graaf G.*

Het TSPFN – de variant van het TSP welke in deze scriptie nader behandeld zal worden – is door Fischer en Hunderländer [5] als volgt gedefinieerd:

Probleem 1.2 (Traveling Salesman Problem with Forbidden Neighborhoods)**.** *Gegeven zijn l knopen in $\mathbb{R}^2$ en een straal $r \in \mathbb{R}$; vind het kortste Hamiltoncircuit $(t_0, ..., t_{l-1}, t_0)$ over de l knopen zodanig dat $\| t_i - t_{(i+1) \bmod l} \| > r$ voor alle $i \in \{0, ..., l-1\}$.*

Waar bij het originele TSP er geen voorwaarden zijn voor de volgorde waarin de knopen doorlopen mogen worden, mogen bij het TSPFN twee knopen die te dicht bij elkaar liggen niet achtereenvolgens doorlopen worden. Er wordt dus gezocht naar het kortste Hamiltoncircuit – ook wel *optimale TSP-tour* genoemd – door de graaf $G_v = (V, E_v)$ waarbij de knopen $V = \{ l \}$ en de kanten $E_v = \{ e_{l_i l_j} \mid l_i, l_j \in V \wedge \parallel l_i - l_j \parallel > r \}$ zijn. Dit kortste Hamiltoncircuit wordt in de rest van deze scriptie een *optimale TSP-tour* genoemd. Het TSPFN heeft een toepassing binnen de werktuigbouwkunde. Eén van de technieken die binnen de werktuigbouwkunde gebruikt wordt voor 3D printen is lasersmelten. Bij deze techniek wordt het nieuwe product op achtereenvolgens verschillende punten met een laserstraal opgewarmd. Punten die te dicht bij elkaar liggen, mogen echter niet na elkaar doorlopen worden omdat er zo teveel spanning kan ontstaan rondom deze punten. Wel is men geïnteresseerd in korte circuits door de punten die opgewarmd moeten worden om zo efficiënt mogelijk te werk te kunnen gaan [5]. Daarom wordt gesuggereerd dat er gezocht moet worden naar het kortste circuits door punten waarbij de punten die te dicht bij elkaar worden niet na elkaar opgewarmd mogen worden [6]. Dit komt neer op het oplossen van het TSPFN.

In het artikel van Fischer en Hunderländer [5] werd het TSPFN uitgewerkt op $m \times n$ rooster in $\mathbb{R}^2$ met $m, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3...\}$ voor $r = 0$, $r = 1$ en $r = \sqrt{2}$. In deze scriptie zal een aantal andere uitwerkingen van het TSPFN gegeven worden. Gedurende deze scriptie wordt gewerkt in $m \times n$ roosters waarbij $m, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3...\}$. Aan iedere cel in het rooster wordt een paar coördinaten toegekend, zodanig dat de cel linksboven de coördinaten $(1, 1)$ heeft en de knoop rechtsonder de coördinaten (m, n). Zie Figuur 1 voor een visualisatie van de nummering van de cellen in het rooster.

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(1,7)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)	(2,7)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	(3,7)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)	(4,7)

Figuur 1. Voorbeeld van de nummering van de cellen in een 4×7 rooster.

Vanuit dit rooster kan een graaf $G = (V, E)$ worden gedefinieerd. Iedere knoop in de graaf G representeert een cel in het rooster. De verzameling

V kan beschreven worden als $V = \{(i,j) \,|\, i \in \{1,2,...,m\},\ j \in \{1,2,...,n\}\}$ waarbij knoop $(i,j) \in V$ de cel (i,j) in het rooster representeert. Verder wordt er onderscheid gemaakt tussen even knopen en oneven knopen. Een knoop $(i,j) \in V$ is een *even knoop* wanneer $i+j$ even is, en een *oneven knoop* wanneer $i+j$ oneven is. Ieder paar knopen $v, w \in V$ is in de graaf verbonden door middel van een kant, dus $E = \{e_{vw} \,|\, v,w \in V\}$. De afstandsfunctie die de lengte van de kanten $e_{vw} \in E$ geeft, varieert gedurende deze scriptie. Daarom zal hier – om wel een indruk te geven van een mogelijke lengte van een kant – de functie gebruikt worden die door Fischer en Hunderländer [5] gebruikt is om de afstand tussen twee knopen door roosters op het vlak te bepalen. Zij $v = (i_v, j_v), w = (i_w, j_w) \in V$. De lengte van de kant e_{vw} op het vlak is gedefinieerd als de Euclidische afstand tussen de coördinaten (i_v, j_v) en (i_w, j_w) gelegen in $\mathbb{R}^2$, oftewel $d(e_{vw}) = \sqrt{(i_v - i_w)^2 + (j_v - j_w)^2}$. Het oplossen van het TSPFN door roosters op het vlak voor een bepaalde r zou met de hierboven gegeven definities beschreven kunnen worden als het vinden van het kortste Hamiltoncircuit in de graaf $G_v = (V, E_v)$ waarbij de verzameling knopen $V = \{(i,j) \,|\, i \in \{1,2,...,m\},\ j \in \{1,2,...,n\}\}$ is en de verzameling kanten $E_v = \{e_{vw} \,|\, v,w \in V \wedge d(e_{vw}) > r\}$. Het gebruik van kanten met een lengte kleiner of gelijk aan r is hier dus uitgesloten.

In deze scriptie zal allereerst gezocht worden naar oplossingen voor het TSPFN door $m \times n$ roosters op een cilinder, vervolgens door $m \times n$ roosters op een torus en daarna door $m \times n$ roosters op de Möbiusband. Voor alle drie deze wiskundige figuren zullen oplossingen gegeven worden voor het TSPFN voor $r = 0$ en $r = 1$. Tot slot zal een conclusie volgen en zullen suggesties gedaan worden voor vervolgstudies.

2 Het TSPFN door roosters op een cilinder

In deze sectie zal het TSPFN bestudeerd worden in roosters op een cilinder. Dit wordt gedaan door het rooster te krommen en kolom 1 en kolom n zodanig aan elkaar te laten grenzen dat $\forall i \in \{1, 2, .., m\}$ knoop $(i, 1)$ verbonden is met knoop (i, n) door een kant van lengte 1. Dit houdt in dat er links (rechts) het rooster ingelopen wordt wanneer er rechts (links) uitgelopen wordt. Zij nu $v = (i_v, j_v), w = (i_w, j_w) \in V$, dan zou de lengte van de kant e_{vw} onder andere op de volgende twee manieren kunnen worden berekend:

$$d_1(e_{vw}) = \sqrt{|i_v - i_w|^2 + ((j_v - j_w) \bmod n)^2}$$

$$d_2(e_{vw}) = \sqrt{|i_w - i_v|^2 + ((j_w - j_v) \bmod n)^2}$$

Opmerking 2.1. In de afstandsfuncties d_i wordt met $(a-b) \bmod c$ de kleinste niet-negatieve representant van de restklasse $(a - b) \bmod c$ bedoeld.

De lengte van de kant e_{vw} tussen v en w op de cilinder waarmee in deze scriptie gerekend wordt is als volgt gedefinieerd:

$$d(e_{vw}) \coloneqq \min(d_1(e_{vw}), d_2(e_{vw}))$$

Het TSPFN door roosters op een cilinder kan dus worden beschreven als het vinden van het kortste Hamiltoncircuit in de graaf $G_c = (V, E_c)$ waarbij de verzameling knopen $V = \{(i, j) \,|\, i \in \{1, 2, ..., m\},\ j \in \{1, 2, ..., n\}\}$ is en de verzameling kanten $E_c = \{e_{vw} \,|\, v, w \in V \wedge d(e_{vw}) > r\}$.

Neem nu een $m \times n$ rooster op een cilinder waarbij $n \in \{1, 2\}$, dan geldt dat $E_c = E_v$ en daarom is de lengte van een optimale TSP-tour door een $m \times n$ rooster op een cilinder waarbij $n \in \{1, 2\}$ gelijk aan de lengte van een optimale TSP-tour door een $m \times n$ rooster op het vlak (voor de uitwerking hiervan zie Fischer en Hunderländer [5]). Daarom zal bij de uitwerking van het TSPFN door roosters op een cilinder enkel gezocht worden naar de optimale TSP-tour door $m \times n$ roosters waarbij $n \geq 3$.

2.1 Resultaten voor $r = 0$

Als eerst wordt het TSPFN uitgewerkt op een cilinder waarbij alle kanten op het rooster doorlopen mogen worden, oftewel waarbij $r = 0$. Een Hamiltoncircuit door een $m \times n$ rooster bevat mn kanten. Een ondergrens voor de lengte van een optimale TSP-tour is dus mn. In Stelling 2.2 zal bewezen worden dat voor bijna alle combinaties van m en n er ook daadwerkelijk een TSP-tour bestaat met lengte mn.

Stelling 2.2. *Een optimale TSP-tour op een $m \times n$ rooster op een cilinder met $r = 0$ heeft de volgende lengte:*

a) $2(m-1)$ *indien* $n = 1$*;*

b) mn *indien* $n > 1$*.*

Bewijs.

a) Als $n = 1$ dan liggen de knopen $(1, 1)$ en $(m, 1)$ op afstand $m - 1$ van elkaar. Deze afstand moet tweemaal doorlopen worden. Dus $2(m - 1)$ is een ondergrens voor de lengte van een optimale TSP-tour. Deze kan geconstrueerd worden door te starten in $(1, 1)$, vervolgens alle knopen van boven naar beneden te doorlopen en ten laatste $(m, 1)$ met $(1, 1)$ te verbinden.

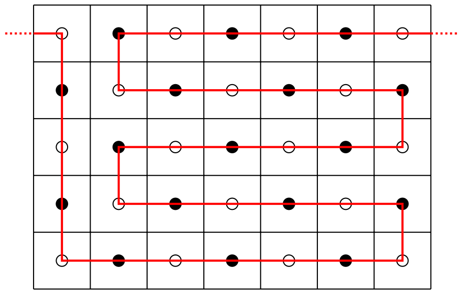
b) Indien $m, n \geq 2$ waarbij m of n even, dan kan er op het vlak een TSP-tour door een $m \times n$ rooster geconstrueerd worden van lengte mn [5], welke ook te realiseren is op de cilinder.
Het rest nu nog om een constructie te geven voor een optimale TSP-tour met lengte mn voor i) $m = 1$; en ii) $m, n \geq 2$ oneven.

   i) Een TSP-tour door een $1 \times n$ rooster met lengte n kan geconstrueerd worden door te starten in knoop $(1, 1)$ en vervolgens alle knopen van links naar rechts te doorlopen.

   ii) Een TSP-tour door een $m \times n$ rooster met $m, n \geq 2$ oneven en lengte mn kan op de volgende manier geconstrueerd worden:

   - Start in knoop $(1, 1)$ en doorloop alle knopen in de gehele eerste kolom van boven naar beneden;
   - Doorloop vervolgens alle knopen in rij m van links naar rechts, eindigend in knoop (m, n);
   - Verbind (m, n) met $(m-1, n)$ en doorloop vervolgens de knopen in rij $m - 1$ van rechts naar links eindigend in $(m - 1, 2)$;
   - Ga weer een rij naar boven en doorloop de knopen in de rij $m - 2$ van links naar rechts, eindigend in $(m - 2, n)$;
   - Doorloop zo alle oneven rijen van links naar rechts en alle even rijen van rechts naar links, eindigend bij knoop $(1, n)$;
   - Verbind knoop $(1, n)$ met knoop $(1, 1)$.

Voor een visualisatie van de constructie van een optimale TSP-tour met $m, n \geq 2$ oneven zie Figuur 2. □



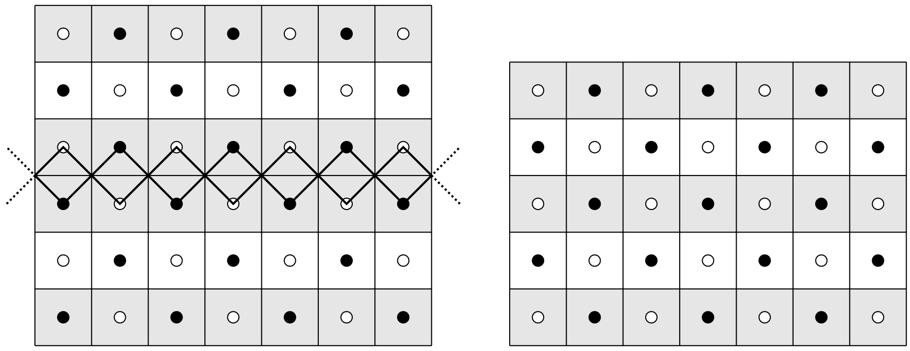
Figuur 2. De constructie van een optimale TSP-tour door een 5×7 rooster op de cilinder.

De lengte van een optimale TSP-tour door $m \times n$ roosters op een cilinder met $r = 0$ is dus korter dan de lengte van een optimale TSP-tour door $m \times n$ roosters op het vlak indien $m = 1$ of indien $m, n \geq 2$ oneven. Waar voor een optimale TSP-tour door $m \times 1$ roosters op het vlak een kant van lengte $n - 1$ nodig is om $(1, 1)$ met $(1, n)$ te verbinden [5], kan bij een optimale TSP-tour door dergelijke roosters op de cilinder een kant van lengte 1 gebruikt worden om deze twee knopen met elkaar te verbinden. Bij $m \times n$ roosters met m, n oneven, moest voor een optimale TSP-tour door dergelijke roosters op een vlak één kant van lengte $\sqrt{2}$ gebruikt worden. Op het vlak kan een kant van lengte 1 namelijk alleen een even met een oneven knoop verbinden. Als m, n oneven is, dan is er één even knoop meer dan er oneven knopen zijn en daarom moet in een optimale TSP-tour eenmaal een even knoop met een even knoop verbonden worden, wat kan met een kant van lengte $\sqrt{2}$ [5]. Maar in $m \times n$ roosters met m, n oneven op de cilinder bestaan er wel kanten van lengte 1 tussen even knopen, waardoor het gebruik van een kant van lengte $\sqrt{2}$ in een optimale TSP-tour – zoals bewezen in Lemma 2.2 – niet nodig is.

2.2 Resultaten voor r=1

In deze sectie wordt er toegewerkt naar een uitwerking van het TSPFN door roosters op een cilinder met $r = 1$. Knopen mogen dus alleen na elkaar doorlopen worden wanneer de lengte van de kant tussen de knopen groter is dan 1, wat de kortst mogelijke afstand tussen twee punten $\sqrt{2}$ maakt. Om toe te werken naar een oplossing van dit probleem zal eerst onderscheid gemaakt worden tussen verschillende knopen. Eerder is al onderscheid gemaakt tussen *even* en *oneven* knopen, nu zal ook onderscheid gemaakt worden tussen *inner* knopen, *outer* knopen en *friendly* knopen [5].

Inner en *outer knopen* zijn gerangschikt in lagen van buiten naar binnen op het rooster, waarbij rijen met outer knopen afgewisseld worden met rijen inner knopen. De eerste en de laatste rij in het rooster bestaat uit outer knopen, de rijen daaraan grenzend bestaan uit inner knopen, welke weer grenzen aan rijen outer knopen, enzovoorts. Een *friendly knoop* is een speciaal soort outer knoop waarvoor geldt dat deze met een kant van lengte $\sqrt{2}$ te verbinden is met een andere outer knoop. Alleen roosters waarbij twee opeenvolgende rijen uit outer knopen bestaan, bevat friendly knopen. Dit komt enkel voor wanneer $m \equiv 2 \mod 4$. Zie Figuur 3 voor een visualisatie van de verdeling van het rooster in even, oneven, inner, outer en friendly knopen.



Figuur 3. Visualisatie van de verdeling van het rooster in even (witte punt) en oneven (zwarte punt) knopen, inner (witte cel) en outer (grijze cel) knopen, en friendly (verbonden met een lijn) knopen.

Om het TSPFN door roosters op een cilinder op te lossen, zal onderscheid gemaakt worden tussen n even en n oneven.

2.2.1 n even

Om toe te werken naar de oplossing van het TSPFN door een $m \times n$ rooster, zal eerst gezocht worden naar een ondergrens voor de lengte van een optimale TSP-tour. Wanneer n even is, dan geldt dat outer even (oneven) knopen door een kant van lengte $\sqrt{2}$ enkel verbonden kunnen worden met inner even (oneven) knopen; de enige uitzondering hierop zijn friendly knopen, aangezien deze outer even (oneven) knopen wel door een kant van lengte $\sqrt{2}$ verbonden kunnen worden met een andere outer even (oneven) knoop. Om een ondergrens te kunnen geven voor de lengte van een optimale TSP-tour door het gehele rooster, worden eerst ondergrenzen bepaald voor de lengte van een Hamiltonpad door alle even knopen en van een Hamiltonpad door alle oneven knopen. Hiervoor wordt nagegaan met welk aantal het aantal outer even (oneven) knopen het aantal inner even (oneven) knopen overschrijdt, waarbij een reeks friendly knopen als één outer knoop wordt gerekend. Indien er k meer outer even (oneven) dan inner even (oneven) knopen zijn, dan zijn er minstens $k-1$ kanten van lengte minstens 2 nodig om alle even (oneven) knopen te kunnen doorlopen, omdat het pad mag beginnen en eindigen in een outer knoop. Een ondergrens voor de lengte van een optimale TSP-tour kan dan berekend worden door de ondergrens voor de lengte van een Hamiltonpad door de even knopen op te tellen bij de ondergrens voor de lengte van een Hamiltonpad door de oneven knopen en daar nog tweemaal $\sqrt{5}$ bij op te tellen. Dit omdat er in een optimale TSP-tour minstens tweemaal geswitcht moet worden tussen even en oneven knopen wat kan met kanten van lengte minstens $\sqrt{5}$, en vaker dan tweemaal switchen tussen even en oneven knopen ervoor zorgt dat de minimale lengte van de tour groter wordt. Als er namelijk $2x+2$ keer geswitcht wordt, dan worden er in de tour x minder kanten tussen twee even knopen en x minder kanten tussen twee oneven knopen gebruikt dan wanneer er tweemaal geswitcht wordt. In het meest optimale geval, hoeven er dan $2x$ kanten van lengte minstens 2 minder gebruikt te worden. Maar hiervoor komen er $2x$ kanten van lengte minstens $\sqrt{5}$ in de plaats, waardoor de ondergrens van de lengte van de tour groter zou worden. Deze redenatie is gebruikt om tot de ondergrenzen beschreven in Lemma 2.3 te komen.

Lemma 2.3. *Een ondergrens voor de lengte van een optimale TSP-tour door een $m \times n$ rooster met n even op een cilinder met $r = 1$ is:*

a) $\sqrt{2}\,(mn-2) + 2\sqrt{5}$ *indien m even;*

b) $\sqrt{2}\,n(m-1) + 2(n-2) + 2\sqrt{5}$ *indien m oneven.*

Bewijs.

a) In elke tour door het rooster moet minstens tweemaal geswitcht worden tussen even en oneven knopen. Daarmee is $\sqrt{2}\,(mn-2)+2\sqrt{5}$ sowieso een ondergrens voor de lengte van een optimale TSP-tour.

b) Indien m oneven, dan is er precies één rij meer outer knopen dan inner knopen. Omdat n even is, bevat elke rij evenveel even als oneven knopen. Een rooster bevat daarom $\frac{n}{2}$ meer outer even (oneven) knopen dan het inner even (oneven) knopen bevat. Een Hamiltonpad door alle even (oneven) knopen moet dus minstens $\frac{n}{2}-1$ kanten van lengte minstens 2 bevatten. Daarmee is $\sqrt{2}\,n(m-1) + 2(n-2) + 2\sqrt{5}$ een ondergrens voor de lengte van een optimale TSP-tour. □

Tabel 1 laat zien hoeveel outer even, outer oneven, inner even en inner oneven knopen een $m \times n$ rooster bevat, en de verschillen in aantal tussen de outer even (oneven) en inner even (oneven) knopen. Hierbij is elke reeks friendly knopen als één outer knoop gerekend.

Tabel 1
Aantallen voor de verschillende soorten knopen en de verschillen in aantal tussen de outer even/oneven en inner even/oneven knopen.

m, n even	$m \equiv 2 \bmod 4$	$m \equiv 0 \bmod 4$
$f_{oo}(n,m) = f_{oe}(n,m)$	$n\lfloor \frac{m}{4} \rfloor + 1$	$n\frac{m}{4}$
$f_{io}(n,m) = f_{ie}(n,m)$	$n\lfloor \frac{m}{4} \rfloor$	$n\frac{m}{4}$
$f_{oo}(n,m) - f_{io}(n,m)$	1	0
$f_{oe}(n,m) - f_{ie}(n,m)$	1	0
m oneven, n even	$m \equiv 1 \bmod 4$	$m \equiv 3 \bmod 4$
$f_{oo}(n,m) = f_{oe}(n,m)$	$n\lfloor \frac{m}{4} \rfloor + \frac{n}{2}$	$n\lfloor \frac{m}{4} \rfloor + n$
$f_{io}(n,m) = f_{ie}(n,m)$	$n\lfloor \frac{m}{4} \rfloor$	$n\lfloor \frac{m}{4} \rfloor + \frac{n}{2}$
$f_{oo}(n,m) - f_{io}(n,m)$	$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{2}$
$f_{oe}(n,m) - f_{ie}(n,m)$	$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{2}$

Opmerking. $f_{oo}(n,m) = \#$ outer oneven knopen; $f_{oe}(n,m) = \#$ outer even knopen; $f_{io}(n,m) = \#$ inner oneven; $f_{ie}(n,m) = \#$ inner even knopen.

Stelling 2.4. *De lengte van een optimale TSP-tour door een $m \times n$ rooster met n even op een cilinder met $r = 1$ is:*

a) $\sqrt{2}\,n(m-1) + 2(n-2) + 2\sqrt{5}$ *indien $m \geq 3$ oneven en $n \geq 4$;*

b) $2\sqrt{2}\,(n-1) + 2\sqrt{5}$ *indien $m = 2$ en $n \geq 4$.*

Bewijs. Bovengenoemde lengtes zijn volgens Lemma 2.3 ondergrenzen voor de lengte van een optimale TSP-tour. Daarom volstaat het geven van een constructie van een TSP-tour van deze lengte als bewijs.

a) TSP-tours van lengte $\sqrt{2}\,n(m-1) + 2(n-2) + 2\sqrt{5}$ indien $m \geq 5$ oneven, $n \geq 6$ en indien $m = 3, n \geq 4$ bestaan op een vlak [5]. Deze tours kunnen ook doorlopen worden op de cilinder (zie Theorem 4a, 4b en 4d voor de constructie [5]).
Het rest nu nog om een constructie te geven van een TSP-tour door een $m \times n$ rooster met lengte $\sqrt{2}\,n(m-1) + 2(n-2) + 2\sqrt{5}$ indien $m \geq 5$ oneven, $n = 4$. Deze kan als volgt geconstrueerd worden:

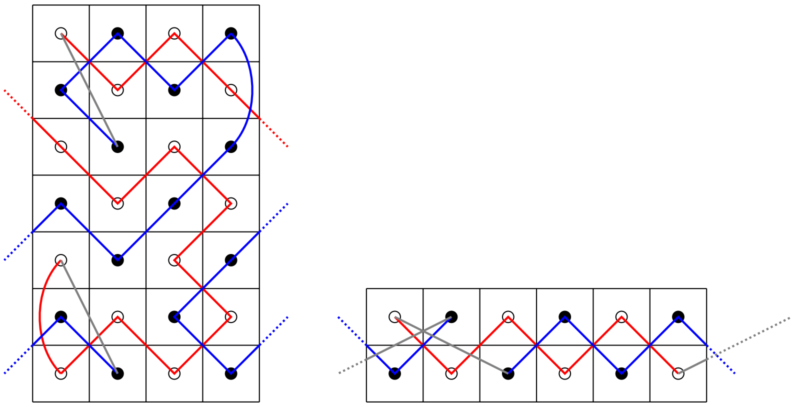
- Start in knoop $(1,1)$ en doorloop achtereenvolgens alle even knopen in de rijen $(1,2)$, $(3,4)$, ..., $(m-4, m-3)$ van links naar rechts, enkel gebruikmakend van kanten van lengte $\sqrt{2}$, eindigend in knoop $(m-3, 4)$;

- Doorloop achtereenvolgens de even knopen $(m-2,3)$, $(m-1,4)$, $(m,3)$, $(m-1,2)$, $(m,1)$ gebruikmakend van kanten met lengte $\sqrt{2}$ en verbind vervolgens $(m,1)$ met $(m-2,1)$ door een kant van lengte 2;
- Verbind de even knoop $(m-2,1)$ met de oneven knoop $(m,2)$ door een kant van lengte $\sqrt{5}$;
- Doorloop vervolgens achtereenvolgens de knopen $(m-1,1)$, $(m,4)$, $(m-1,3)$ en $(m-2,4)$, gebruikmakend van kanten van lengte $\sqrt{2}$;
- Doorloop vervolgens alle oneven knopen in de rijen $(m-3,m-2)$, $(m-5,m-4)$, ..., $(4,5)$ van links naar rechts, enkel gebruikmakend van kanten van lengte $\sqrt{2}$, eindigend in knoop $(4,3)$. Verbind deze met knoop $(3,4)$ door een kant van lengte $\sqrt{2}$;
- Verbind $(3,4)$ met $(1,4)$ door een kant van lengte 2 en doorloop daarna achtereenvolgens de knopen $(2,3)$, $(1,2)$, $(2,1)$ en $(3,2)$, gebruikmakend van kanten van lengte $\sqrt{2}$;
- Verbind ten laatste de oneven knoop $(3,2)$ met de even knoop $(1,1)$ met een kant van lengte $\sqrt{5}$.

b) Een TSP-tour door een $2 \times n$ rooster met $n \geq 4$ even en een lengte van $2\sqrt{2}\,(n-1) + 2\sqrt{5}$ kan als volgt geconstrueerd worden:

- Start in knoop $(1,1)$ en doorloop alle even knopen gebruikmakend van kanten van lengte $\sqrt{2}$ van links naar rechts, eindigend in knoop $(2,n)$;
- Verbind vervolgens knoop $(2,n)$ met knoop $(1,2)$ en doorloop vervolgens alle oneven knopen van rechts naar links, door middel van kanten van lengte $\sqrt{2}$, en eindigend in knoop $(2,3)$;
- Verbind ten laatste knoop $(2,3)$ met knoop $(1,1)$.

Zie Figuur 4 voor een visualisatie van de constructie van de optimale TSP-tours beschreven bij a) indien $m \geq 5$ oneven, $n = 4$; en b). $\square$



Figuur 4. De constructie van een optimale TSP-tour door een 7×4 rooster (links) en een 2×6 (rechts) rooster op een cilinder.

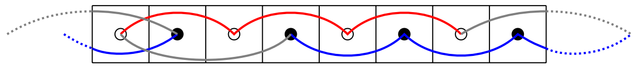
Nu zullen roosters bestudeerd worden waarvoor de optimale TSP-tour niet gelijk is aan de ondergrens gegeven in Lemma 2.3. Het gaat hierbij om $1 \times n$ roosters en $m \times n$ roosters met $m, n \geq 4$ even.

Stelling 2.5. *Zij $m = 1$ en $n \geq 4$ even. De lengte van een optimale TSP-tour door een $1 \times n$ rooster op een cilinder met $r = 1$ is $2(n-2)+6$.*

Bewijs. Als $m = 1$ dan is de lengte van een kant tussen twee knopen minimaal 2. Kanten van lengte 2 verbinden enkel even met oneven knopen of oneven met oneven knopen. In een tour moet minimaal twee keer geswitcht worden tussen even en oneven knopen, en dus zijn er twee kanten nodig van minimaal lengte 3. Daarmee is $2(n-2)+6$ een ondergrens voor de lengte van een optimale TSP-tour. Deze kan als volgt geconstrueerd worden:

- Start in knoop $(1, 1)$ en doorloop alle even knopen van links naar rechts, gebruikmakend van kanten van lengte 2 en eindigend in knoop $(1, n-1)$
- Verbind $(1, n-1)$ met $(1, 2)$ door een kant van lengte 3 en doorloop vervolgens alle oneven knopen van rechts naar links, gebruikmakend van kanten van lengte 2, eindigend in knoop $(1, 4)$
- Verbind ten laatste $(1, 4)$ met $(1, 1)$ door een kant van lengte 3.

Voor een visualisatie van de constructie van deze optimale TSP-tour, zie Figuur 5. □



Figuur 5. De constructie van een optimale TSP-tour door een 1×8 rooster op een cilinder.

Om aan te tonen dat de lengte van een optimale TSP-tour door een $m \times n$ rooster met $m, n \geq 4$ even niet gelijk is aan de ondergrens welke gegeven is in Lemma 2.3 en toe te werken naar de oplossing van het TSPFN op dergelijke roosters, wordt eerst bewezen dat een Hamiltonpad door even (oneven) knopen een start- en eindpunt moet hebben in de rijen 1 en m.

Lemma 2.6. *Zij $m, n \geq 4$ even en zij P een Hamiltonpad door de even (oneven) knopen bestaande uit enkel kanten van lengte $\sqrt{2}$. Dan heeft P een begin- en een eindpunt in rij 1 en rij m.*

Bewijs. Stel er is een pad P door alle even (oneven) knopen dat niet begint of eindigt in rij 1. Dan is elke knoop in rij 1 verbonden met twee knopen in rij 2. Omdat m even is, bevatten rij 1 en 2 evenveel even (oneven) knopen. De enige manier om alle even (oneven) knopen in rij 1 te verbinden met twee knopen in rij 2 en elke knoop slechts eenmaal te passeren, is een circuit door alle even (oneven) knopen in de rijen 1 en 2. Omdat $m \geq 4$, is dit dus geen pad door alle even (oneven) knopen in het rooster $\lightning$.
Dus moet moet elke P beginnen of eindigen in rij 1. Op dezelfde manier kan ook bewezen worden dat elke P moet beginnen of eindigen in rij m. $\square$

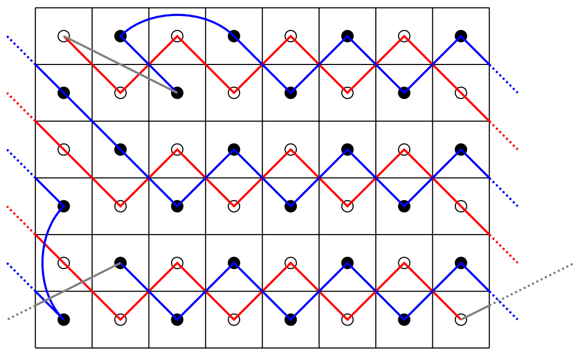
Stelling 2.7. *Zij $m, n \geq 4$ even. De lengte van een optimale TSP-tour door een $m \times n$ rooster op een cilinder met $r = 1$ is $\sqrt{2}(mn - 4) + 4 + 2\sqrt{5}$.*

Bewijs. Volgens Lemma 2.4 heeft elk Hamiltonpad door alle even (oneven) knopen een begin- en eindpunt in rij 1 en m. Even knopen in rij 1 (m) zijn niet door een kant van lengte $\sqrt{5}$ te verbinden met oneven knopen in rij 1 (m). Dus de lengte van een optimale TSP-tour $> \sqrt{2}\,(mn-2)+2\sqrt{5}$. Omdat er tweemaal geswitcht moet worden tussen even en oneven knopen, zullen er minimaal 2 langere kanten gebruikt moeten worden. Omdat $2-\sqrt{2} < 3-\sqrt{5}$, is $\sqrt{2}\,(mn - 4) + 4 + 2\sqrt{5}$ een ondergrens voor de lengte van een optimale TSP-tour door een $m \times n$ rooster op een cilinder met $m, n \geq 4$ even. Een tour met deze lengte kan als volgt geconstrueerd worden:

- Begin in knoop $(1, 1)$ en doorloop achtereenvolgens alle even knopen in de rijen $(1, 2)$, ..., $(3, 4)$, ...,$(m - 1, m)$, gebruikmakend van kanten van lengte $\sqrt{2}$, en eindigend in knoop (m, n);

- Verbind (m,n) met $(m-1,2)$ door een kant van lengte $\sqrt{5}$ en doorloop vervolgens alle oneven knopen in de rijen $(m-1,m)$ van links naar rechts, gebruikmakend van kanten van lengte $\sqrt{2}$ en eindigend in $(m,1)$;
- Verbind $(m,1)$ met $(m-2,1)$ door een kant van lengte 2 en verbind vervolgens achtereenvolgens de oneven knopen in de rijen $(m-3,m-2)$, $(m-5,m-4)$, ...,$(1,2)$ van rechts naar links, gebruikmakend van kanten van lengte $\sqrt{2}$ tot aangekomen bij knoop $(1,4)$;
- Verbind $(1,4)$ met $(1,2)$ door een kant van lengte 2 en $(1,2)$ met $(2,3)$ door een kant van lengte $\sqrt{2}$;
- Verbind ten laatste $(2,3)$ met $(1,1)$ door een kant van lengte $\sqrt{5}$.

Zie Figuur 6 voor een visualisatie van de constructie van deze optimale TSP-tour. □



Figuur 6. De constructie van een optimale TSP-tour door een 6×8 rooster op een cilinder.

Wanneer n even is, dan is een optimale TSP-tour door $m \times n$ roosters op de cilinder met $r = 1$ korter dan de optimale TSP-tour door dergelijke roosters op het vlak voor de volgende combinaties van m en n: i) $m = 1$, $n \geq 6$; ii) $m \geq 2$ even, $n \geq 4$; en iii) $m \geq 5$ oneven, $n = 4$. Voor de combinaties beschreven bij ii) en iii) is de tour door dergelijke roosters op de cilinder korter dan op het vlak, omdat er op de cilinder kortere Hamiltonpaden door de even en oneven knopen te construeren zijn welke ook nog door twee kanten van lengte $\sqrt{5}$ verbonden kunnen worden. Voor de combinaties beschreven bij i) moet er in een optimale TSP-tour op het vlak ofwel vaker dan twee keer geswitcht worden tussen even en oneven knopen, ofwel kanten van lengte groter dan 3 gebruikt worden. Op de cilinder is beide niet nodig om een optimale TSP-tour te construeren.

Verder kan opgemerkt worden dat er op de cilinder een tour mogelijk door een 1×4 rooster met $r = 1$, waar dit op het vlak niet het geval is [5]. Dus door het TSPFN met $r = 1$ te bestuderen op de cilinder in plaats van op het vlak kunnen niet alleen voor bepaalde combinaties van m en n kortere tours geconstrueerd worden, maar is het ook mogelijk om voor meer combinaties van m en n een optimale TSP-tour door een $m \times n$ rooster te construeren dan op het vlak mogelijk is.

2.2.2 n oneven

Waar in het geval van n is even een kant van lengte $\sqrt{2}$ nooit een even met een oneven knoop kan verbinden, kan dit wel wanneer n oneven is. Zo kunnen alle even en oneven knopen in kolom 1 worden verbonden met respectievelijk oneven en even knopen in kolom n gebruikmakend van een kant met lengte $\sqrt{2}$ (bijvoorbeeld $(1, 1)$ met $(2, n)$). Wel geldt nog steeds dat outer knopen (uitgezonderd friendly knopen) door middel van een kant van lengte $\sqrt{2}$ enkel met inner knopen kunnen worden verbonden. Daarmee kan het verschil tussen het aantal outer knopen (waarbij een reeks friendly knopen als één outer knoop wordt geteld) en het aantal inner knopen gebruikt worden om tot een ondergrens te komen voor de lengte van een optimale TSP-tour. Indien er k meer outer knopen zijn dan inner knopen, dan heeft elke tour door het rooster minstens k kanten van lengte minstens 2. Deze redenatie is gebruikt om tot de ondergrenzen beschreven in Lemma 2.8 te komen.

Lemma 2.8. *Ondergrenzen voor de lengte van een optimale TSP-tour door een $m \times n$ rooster met n oneven op een cilinder met $r = 1$ zijn:*

a) $2\sqrt{2}\,n$ *indien* $m = 2$*;*

b) $\sqrt{2}\,(mn - 1) + 2$ *indien* $m \geq 4$ *even;*

c) $\sqrt{2}\,n(m - 1) + 2n$ *indien* m *oneven.*

Bewijs.

a) Aangezien de minimale lengte van een kant $\sqrt{2}$ is, is $2\sqrt{2}\,n$ sowieso een ondergrens voor de lengte van een optimale TSP-tour door een $2 \times n$ rooster op een cilinder.

b) $\underline{m \equiv 0 \bmod 4}$. Als $m \equiv 0 \bmod 4$, dan zijn er evenveel rijen met inner knopen als rijen met outer knopen en is het aantal inner knopen dus gelijk aan het aantal outer knopen. Het is mogelijk om een Hamilton-pad te creëren door het rooster gebruikmakend van enkel kanten van

lengte $\sqrt{2}$. Omdat er in dit Hamiltonpad sowieso een inner knoop met een inner knoop verbonden moet worden, namelijk om rij $\frac{1}{2}m$ met rij $\frac{1}{2}m+1$ te kunnen verbinden, begint en eindigt dit Hamiltonpad in een outer knoop. Daarom is er in een tour tenminste één kant van lengte minstens 2 nodig om het begin- en het eindpunt van het Hamiltonpad met elkaar te kunnen verbinden. Daarmee is $\sqrt{2}\,(mn-1)+2$ een ondergrens voor de optimale TSP-tour.
$\underline{m \equiv 2 \bmod 4}$. Als $m \equiv 2 \bmod 4$, dan zijn er twee rijen meer outer knopen dan inner knopen. Deze knopen zijn echter alle friendly knopen en daarmee is het verschil tussen het aantal outer knopen en inner knopen gelijk aan 1. Een ondergrens voor de optimale TSP-tour is daarmee $\sqrt{2}\,(mn-1)+2$.

c) Als m oneven is, dan is er één rij meer outer knopen dan inner knopen en zijn er geen friendly knopen aanwezig. Het verschil tussen het aantal outer en inner knopen is dus n. Daarom zijn er in een tour door het rooster minstens n kanten nodig van lengte minstens 2 en is $\sqrt{2}\,n(m-1)+2n$ dus een ondergrens voor de optimale TSP-tour. □

Stelling 2.9. *De lengte van een optimale TSP-tour door een $m \times n$ rooster met n oneven op een cilinder met $r = 1$ is:*

a) $2n$ *indien* $m = 1, n \geq 3$ *en indien* $m = 3, n \neq 5$*;*

b) $2\sqrt{2}\,n$ *indien* $m = 2$ *en* $n \geq 3$.

Bewijs. Volgens Lemma 2.8 zijn bovengenoemde lengtes ondergrenzen voor de lengte van een optimale TSP-tour. Met het geven van een constructie van een dergelijke TSP-tour is deze stelling bewezen.

a) Om de constructie van een tour te geven, zullen twee gevallen onderscheiden worden: i) $m = 1, n \geq 3$; en ii) $m = 3, n \neq 5$.

   i) Een tour door een $1 \times n$ rooster met $n \geq 3$ oneven en lengte $2n$ kan geconstrueerd worden door te starten in $(1,1)$ en vervolgens alle knopen van links naar rechts met elkaar te verbinden, gebruikmakend van kanten van lengte 2.

   ii) Een tour door een $3 \times n$ rooster met $n \geq 5$ oneven en lengte $2\sqrt{2}\,n + 2n$ kan als volgt geconstrueerd worden:

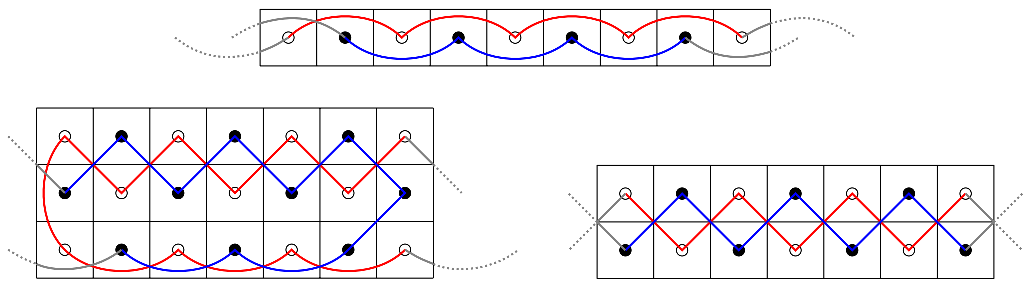
   - Start in knoop $(1,1)$ en doorloop alle even knopen in de rijen 1 en 2 van links naar rechts door kanten van lengte $\sqrt{2}$, eindigend in knoop $(1,n)$;

- Verbind vervolgens $(1, n)$ met $(2, 1)$ en doorloop alle oneven knopen in de rijen 1 en 2 van links naar rechts door kanten van lengte $\sqrt{2}$, eindigend in knoop $(2, n)$;
- Verbind dan $(2, n)$ met $(3, n-1)$ en doorloop vervolgens alle knopen in rij 3 van rechts naar links, gebruikmakend van kanten van lengte 2, eindigend in $(3, 1)$;
- Verbind ten laatste $(3, 1)$ met $(1, 1)$.

b) Een tour door een $2 \times n$ rooster met $n \geq 3$ oneven en lengte $2\sqrt{2}\,n$ kan als volgt geconstrueerd worden:

- Start in knoop $(1, 1)$ en doorloop alle even knopen in de rijen 1 en 2 van links naar rechts door kanten van lengte $\sqrt{2}$, eindigend in knoop $(1, n)$;
- Verbind vervolgens $(1, n)$ met $(2, 1)$ en doorloop alle oneven knopen in de rijen 1 en 2 van links naar rechts door kanten van lengte $\sqrt{2}$, eindigend in knoop $(2, n)$;
- Verbind ten laatste $(2, n)$ met $(1, 1)$.

Zie Figuur 7 voor een visualisatie van de constructie van de hierboven beschreven optimale TSP-tours. □



Figuur 7. De constructie van een optimale TSP-tour door een 1×9 rooster (boven) 3×7 rooster (links onder) en een 2×7 rooster (rechts onder) op een cilinder.

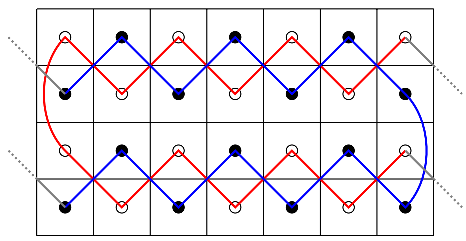
Hieronder zullen gevallen besproken worden waarvan de lengte van de optimale TSP-tour niet gelijk is aan de ondergrens gegeven in Lemma 2.8. Het gaat hierbij om $m \times n$ roosters met $m \geq 4$ en $n \geq 3$ oneven.

Stelling 2.10. *Zij $m = 4$ en $n \geq 3$ oneven. De lengte van een optimale TSP-tour door een rooster op een cilinder met $r = 1$ is $2\sqrt{2}\,(2n-1) + 4$.*

Bewijs. Volgens Lemma 2.8 is er in een optimale TSP-tour minimaal één kant nodig van lengte groter dan $\sqrt{2}$. Om een Hamiltonpad te creëren door alle knopen van het $4 \times n$ rooster met $n \geq 3$ oneven, en enkel gebruikmakend van kanten van lengte $\sqrt{2}$, moet het Hamiltonpad een begin- en eindpunt hebben in rij 1 en rij 4 (gebruik hiervoor dezelfde redenatie als in Lemma 2.4). Maar de afstand tussen een knoop in rij 1 en een knoop in rij 4 is minstens 3, dus de lengte van een optimale TSP-tour $> \sqrt{2}\,(4n-1)+2$. Er dient dus minimaal één kant gebruikt te worden die langer is. Omdat $3-2 > 2-\sqrt{2}$, is $2\sqrt{2}\,(2n-1)+4$ een ondergrens voor de lengte van een optimale TSP-tour door een $4 \times n$ rooster met $n \geq 3$ oneven op een cilinder. Deze kan als volgt geconstrueerd worden:

- Begin in knoop $(1,1)$ en doorloop alle knopen in rij 1 en 2 van links naar rechts, gebruikmakend van kanten van lengte $\sqrt{2}$, en eindigend in knoop $(2,n)$;
- Verbind $(2,n)$ met $(4,n)$ door een kant van lengte 2 en doorloop vervolgens alle knopen in de rijen 3 en 4 van rechts naar links, gebruikmakend van kanten van lengte $\sqrt{2}$, en eindigend in knoop $(3,1)$;
- Verbind ten laatste $(3,1)$ met $(1,1)$ door een kant van lengte 2.

Zie Figuur 8 voor een visualisatie van de constructie van deze optimale TSP-tour. □



Figuur 8. De constructie van een optimale TSP-tour door een 4×7 rooster op een cilinder.

Het enige wat nu nog rest is het oplossen van het TSPFN door $m \times n$ roosters indien $m, n = 3$ en indien $m \geq 5, n \geq 3$ oneven. Lemma 2.8 geeft een ondergrens voor de lengte van deze optimale TSP-tours. Indien $m, n = 3$ of $m \geq 5, n \geq 5$ oneven, dan kan de optimale TSP-tour door dergelijke roosters op het vlak [5] ook geconstrueerd worden door roosters op de cilinder. Daarmee zijn de lengtes van deze tours bovengrenzen voor de lengtes van de optimale TSP-tours door dergelijke roosters op de cilinder. Indien $m \geq 5, n = 3$, dan kan de optimale TSP-tour op het vlak niet geconstrueerd worden op de cilinder en daarom kan niet worden aangenomen dat de lengte van de optimale TSP-tour op het vlak een bovengrens is voor de lengte van een optimale TSP-tour op de cilinder. Daarom zal in Lemma 2.11 een bovengrens gegeven worden voor de lengte van een optimale TSP-tour door $m \times 3$ roosters op de cilinder indien $m \geq 5$.

Lemma 2.11. *Zij $m \geq 5$ en $n = 3$. Een bovengrens voor de lengte van een optimale TSP-tour door een $m \times 3$ rooster op de cilinder met $r = 1$ is $\sqrt{2}\,(3m - m + 2) + 2(m - 2)$.*

Bewijs. Aangezien er nog geen bovengrens is voor de lengte van een optimale TSP-tour door $m \times n$ roosters indien $m \geq 5$ en $n = 3$, is het geven van een tour met deze lengte voldoende als bewijs voor deze stelling. Voor dit bewijs wordt er onderscheid gemaakt tussen de volgende gevallen: i) $m \equiv 0 \mod 4$; ii) $m \equiv 2 \mod 4$ iii); $m \equiv 1 \mod 4$; en iv) $m \equiv 3 \mod 4$.

i) Een tour van lengte $\sqrt{2}\,(3m - m + 2) + 2(m - 2)$ indien $m \equiv 0 \mod 4$ kan als volgt geconstrueerd worden:

- Start in knoop $(1, 1)$ en doorloop achtereenvolgens de even knopen in de rijen $(1, 2)$, $(3, 4)$, ..., $(m - 1, m)$, waarbij de rijen $(1, 2)$ van links naar rechts doorlopen worden, de rijen $(3, 4)$ van rechts naar links, de rijen $(5, 6)$ van links naar rechts, enzovoorts, en eindigend in knoop $(m - 1, 1)$. Knopen in hetzelfde paar rijen worden verbonden met kanten van lengte $\sqrt{2}$ en om te wisselen van rijenpaar worden kanten van lengte 2 gebruikt;
- Verbind $(m - 1, 1)$ met $(m, 3)$ gebruikmakend van een kant van lengte $\sqrt{2}$;
- Doorloop achtereenvolgens alle oneven knopen in de rijen $(m - 1, m)$, $(m - 3, m - 2)$, ..., $(1, 2)$, waarbij $\forall i \in \{1, 3, ..., m - 1\}$ de oneven knopen in de rijen $(i, i + 1)$ in tegengestelde richting doorlopen worden als de even knopen in die rijen, en eindigend in knoop $(2, n)$. Knopen in hetzelfde paar rijen worden verbonden met kanten van lengte $\sqrt{2}$ en om te wisselen van rijenpaar worden kanten van lengte 2 gebruikt;
- Verbind ten laatste knoop $(2, n)$ met $(1, 1)$ door een kant van lengte $\sqrt{2}$.

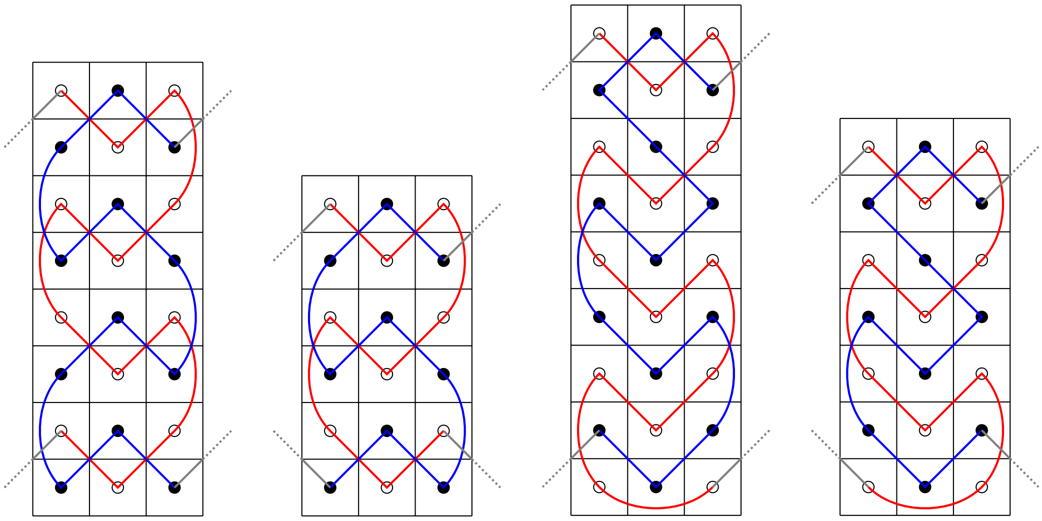
ii) De constructie van een tour van lengte $\sqrt{2}\,(3m - m + 2) + 2(m - 2)$ indien $m \equiv 2 \mod 4$ komt grotendeels overeen met de constructie van de tour indien $m \equiv 0 \bmod 4$. Het enige verschil is dat het pad door alle even knopen niet eindigt in $(m-1,1)$, maar in $(m-1,3)$. Bij de eerste switch van even naar oneven knopen, wordt daarom $(m-1,3)$ verbonden met $(m,1)$. Verder blijft de constructie hetzelfde.

iii) Een tour van lengte $\sqrt{2}\,(3m-m+2)+2(m-2)$ indien $m \equiv 1 \bmod 4$ kan als volgt geconstrueerd worden:

- Start in knoop $(1,1)$ en doorloop achtereenvolgens alle even knopen in de rijen $(1,2)$, $(3,4)$, ..., $(m-2,m-1)$, waarbij de rijen $(1,2)$ van links naar rechts worden doorlopen, de rijen $(3,4)$ van rechts naar links, de rijen $(5,6)$ van links naar recht, enzovoorts, en eindigend in knoop $(m-2,1)$. Knopen in hetzelfde rijenpaar worden verbonden met kanten van lengte $\sqrt{2}$ en om te wisselen van rijenpaar worden kanten van lengte 2 gebruikt;
- Doorloop vervolgens de knopen $(m,1)$ en $(m,3)$, gebruikmakend van kanten van lengte 2;
- Verbind de even knoop $(m,3)$ met de oneven knoop $(m-1,1)$ gebruikmakend van een kant van lengte $\sqrt{2}$;
- Doorloop achtereenvolgens alle oneven knopen in de rijen $(m-1,m)$, $(m-3,m-2)$, ...,$(4,5)$, waarbij $\forall i \in \{4,6,...,m-1\}$ de oneven knopen in de rijen $(i,i+1)$ in tegengestelde richting doorlopen worden als de even knopen in de rijen $(i-1,i)$, en eindigend in knoop $(4,3)$. Knopen in hetzelfde rijenpaar worden verbonden met kanten van lengte $\sqrt{2}$ en kanten van lengte 2 worden gebruikt om van rijenpaar te wisselen;
- Doorloop vervolgens achtereenvolgens de oneven knopen $(3,2)$, $(2,1)$, $(1,2)$ en $(2,3)$, gebruikmakend van kanten van lengte $\sqrt{2}$;
- Verbind ten laatste $(2,3)$ met $(1,1)$ door een kant van lengte $\sqrt{2}$.

iv) De constructie van een tour van lengte $\sqrt{2}\,(3m-m+2)+2(m-2)$ indien $m \equiv 3 \bmod 4$ komt grotendeels overeen met de de constructie van de tour indien $m \equiv 1 \bmod 4$. Maar als $m \equiv 3 \bmod 4$, dan eindigt het pad door alle even knopen in de rijen $(1,2)$, $(3,4)$, ..., $(m-2,m-1)$ niet in $(m-2,1)$, maar in knoop $(m-2,3)$. Daarom worden indien $m \equiv 3 \bmod 4$ vanaf knoop $(m-2,3)$ achtereenvolgens de knopen $(m,3)$ en $(m,1)$ doorlopen, gebruikmakend van kanten van lengte 2. Vervolgens wordt de even knoop $(m,1)$ met de oneven knoop $(m-1,3)$ verbonden. Verder blijft de constructie hetzelfde.

Zie Figuur 9 voor een visualisatie van de constructie deze tours. □



Figuur 9. De constructie van een tour door (van links naar rechts) een 8×3 rooster, een 6×3 rooster, een 9×3 rooster en een 7×3 rooster.

Voor sommige combinaties van m en n kan aangetoond worden dat er een kortere tour mogelijk is door $m \times n$ roosters op de cilinder dan op het vlak. Voor die combinaties kan de bovengrens dus naar beneden worden bijgesteld. Deze naar beneden bijgestelde bovengrenzen zullen behandeld worden in Lemma 2.12.

Lemma 2.12. *Een bovengrens voor de lengte van een optimale TSP-tour door een $m \times n$ rooster met n oneven op een cilinder met $r = 1$ is:*

a) $6\sqrt{2} + 4 + \sqrt{5}$ *indien* $m, n = 3$;

b) $\sqrt{2}\,(mn - m + 2) + 2(m - 2)$ *indien* $m \geq 6$ *even,* $n \geq 5$.

Bewijs. Omdat bovengenoemde lengtes allebei kleiner zijn dan de lengte van de optimale TSP-tour op het vlak [5], volstaat het geven van constructies van tours met deze lengte als bewijs van dit lemma.

a) Een tour van lengte $6\sqrt{2} + 4 + \sqrt{5}$ op een 3×3 rooster kan als volgt geconstrueerd worden:

- Start in knoop $(1, 1)$ en verbind deze door een kant van lengte 2 met $(3, 1)$;
- Doorloop vervolgens achtereenvolgens de knopen $(2, 2)$ en $(3, 3)$, gebruikmakend van kanten van lengte $\sqrt{2}$;
- Verbind $(3, 3)$ met $(1, 3)$ door een kant van lengte 2;

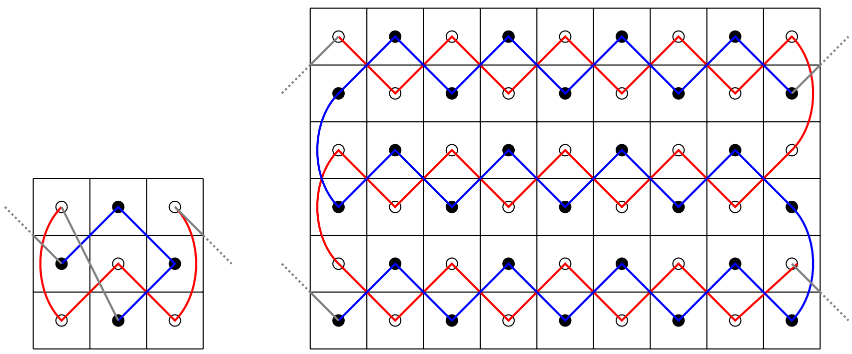
- Verbind de even knoop $(1,3)$ Met de oneven knoop $(2,1)$ door een kant van lengte $\sqrt{2}$ en doorloop vervolgens alle oneven knopen met de klok mee, gebruikmakend van kanten van lengte $\sqrt{2}$, en eindigend in knoop $(3,2)$;
- Verbind ten laatste $(3,2)$ met $(1,1)$ door een kant van lengte $\sqrt{5}$.

b) Voor dit bewijs wordt onderscheid gemaakt tussen i) $m \equiv 0 \bmod 4$; en ii) $m \equiv 2 \bmod 4$.

i) Een tour door een $m \times n$ rooster met $m \geq 6$ even en $n \geq 5$ oneven van lengte $\sqrt{2}\,(mn - m + 2) + 2(m-2)$ indien $m \equiv 0 \bmod 4$ kan op dezelfde manier geconstrueerd worden als een tour door een $m \times 3$ rooster met $m \geq 5$ en lengte $\sqrt{2}\,(3m - m + 2) + 2(m-2)$ indien $m \equiv 0 \bmod 4$. Zie dus Lemma 2.11 i) voor de uitwerking van deze constructie.

ii) De constructie van een tour van lengte $\sqrt{2}\,(mn-m+2)+2(m-2)$ indien $m \equiv 2 \bmod 4$ komt grotendeels overeen met de constructie van een tour indien $m \equiv 0 \bmod 4$. Het enige verschil is dat het pad door alle even knopen niet eindigt in $(m-1,1)$, maar in $(m-1,n)$. Daarom wordt bij de eerste switch van even naar oneven knopen $(m-1,n)$ verbonden met $(m,1)$. Verder blijft de constructie hetzelfde.

Zie Figuur 10 voor een visualisatie van de constructie van een dergelijke tour. □



Figuur 10. De visualisatie van een tour door een 3×3 rooster met lengte $6\sqrt{2}+4+\sqrt{5}$ (links) en een 6×9 rooster met lengte $\sqrt{2}\,(6\times 9-6+2)+2(6-2)$ (rechts) op de cilinder.

In Tabel 2 zijn deze onder- en bovengrenzen weergegeven voor de lengte van een optimale TSP-tour door $m \times n$ roosters met $m, n = 3$ en roosters met $m \geq 5$ en $n \geq 3$ oneven die tot zover bekend zijn. Het is de schrijver voor deze gevallen echter niet gelukt om een precieze formule te geven voor de lengte van een optimale TSP-tour of om een nog kortere tour te construeren. Dit blijven dus open problemen, welke mogelijk in toekomstig onderzoek opgelost kunnen worden.

Tabel 2

Onder- en bovengrenzen voor de lengte van een optimale TSP-tour door $m \times n$ roosters met $m, n = 3$ en roosters met $m \geq 5$ en $n \geq 3$ oneven.

	Ondergrens	Bovengrens
m oneven		
$n = 3$		
$m = 3$	$6\sqrt{2} + 6$	$6\sqrt{2} + 4 + \sqrt{5}$
$m \geq 5$	$3\sqrt{2}\,(m-1) + 6$	$\sqrt{2}\,(3m - m + 2) + 2(m-2)$
$n \geq 5$		
$m = n$ [a]	$\sqrt{2}\,n(m-1) + 2n$	$\sqrt{2}\,(m^2 - m - 1) + 2(m-1) + 2\sqrt{5}$
$m \neq n$ [a]	$\sqrt{2}\,n(m-1) + 2n$	$\sqrt{2}\,n(m-1) + 2(n-2) + 2\sqrt{5}$
m even [b]	$\sqrt{2}\,(mn-1) + 2$	$\sqrt{2}\,(mn - m + 2) + 2(m-2)$

Opmerking. n oneven.
[a] $m \geq 5$. [b] $m \geq 6,\ n \geq 3$.

In de gevallen met n oneven waarbij aangetoond is dat de optimale TSP-tour door $m \times n$ rooster op de cilinder met $r = 1$ korter is dan de optimale TSP-tour op door dergelijke roosters op het vlak, zijn korter omdat er op de cilinder minder of geen gebruik gemaakt hoeft te worden van kanten van lengte $\sqrt{5}$ dan io het vlak. Op het vlak zijn kanten van minstens lengte $\sqrt{5}$ noodzakelijk in een tour, omdat dit een ondergrens is voor de lengte van een kant tussen een even knoop en een oneven knoop [5]. Op de cilinder, kunnen – zoals eerder uitgelegd – sommige even (oneven) knopen wel door een kant van lengte $\sqrt{2}$ worden verbonden met een oneven (even) knoop. Hierdoor kan in vele gevallen kanten van lengte $\sqrt{2}$ of lengte 2 gebruikt worden in plaats van één of meerdere kanten van lengte $\sqrt{5}$. Tenslotte dient opgemerkt te worden dat er een op de cilinder een tour mogelijk is door een 1×3 rooster, terwijl dit op het vlak niet het geval is [5].

3 Het TSPFN door roosters op een torus

In deze sectie zal gezocht worden naar een oplossing voor het TSPFN door $m \times n$ roosters op een torus. Dit probleem kan op de torus bestudeerd worden door het rooster te krommen en kolom 1 zo aan kolom n te laten grenzen dat $\forall i \in \{1, 2, ..., m\}$ knoop $(i, 1)$ verbonden is met knoop (i, n) door een kant van lengte 1, en door rij 1 zo aan rij m te laten grenzen dat $\forall j \in \{1, 2, ..., n\}$ knoop $(1, j)$ verbonden is met (m, j) door een kant van lengte 1. Dit houdt in dat er net zoals op de cilinder het rooster links (rechts) ingelopen wordt wanneer het rechts (links) uitgelopen wordt, maar ook dat het rooster boven (beneden) ingelopen wordt wanneer het beneden (boven) uitgelopen wordt.

Om de lengte van een tour door een rooster op een torus te kunnen bepalen, zal eerst gedefinieerd worden wat afstand is tussen twee knopen op de torus. Zij $v = (i_v, j_v)$, $w = (i_w, j_w) \in V$, dan zou de lengte van e_{vw} op de torus onder andere op de volgende vier manieren kunnen worden berekend:

$$d_1(e_{vw}) = \sqrt{((i_w - i_v) \bmod m)^2 + ((i_v - i_w) \bmod n)^2}$$

$$d_2(e_{vw}) = \sqrt{((i_v - i_w) \bmod m)^2 + ((i_v - i_w) \bmod n)^2}$$

$$d_3(e_{vw}) = \sqrt{((i_w - i_v) \bmod m)^2 + ((i_w - i_v) \bmod n)^2}$$

$$d_4(e_{vw}) = \sqrt{((i_v - i_w) \bmod m)^2 + ((i_w - i_v) \bmod n)^2}$$

De lengte van de kant e_{vw} tussen v en w op de torus waarmee in deze scriptie gerekend wordt is als volgt gedefinieerd:

$$d(e_{vw}) := \min(d_1(e_{vw}), d_2(e_{vw})d_3(e_{vw}), d_4(e_{vw}))$$

Het TSPFN door roosters op een torus kan worden beschreven als het vinden van het kortste Hamiltoncircuit in de graaf $G_t = (V, E_t)$ waarbij de verzameling knopen $V = \{(i, j) \,|\, i \in \{1, 2, ..., m\},\, j \in \{1, 2, ..., n\}\,\}$ is en de verzameling kanten $E_t = \{e_{vw} \,|\, v, w \in V \,\wedge\, d(e_{vw}) > r\}$.

Doordat zowel de eerste en de laatste rij als de eerste en de laatste kolom aan elkaar grenzen, is een $m \times n$ rooster congruent aan een $n \times m$ rooster. Door een $n \times m$ rooster een kwartslag te draaien, ontstaat namelijk een $m \times n$ rooster waarin dezelfde paden en circuits mogelijk zijn. Daarom wordt in deze sectie aangenomen dat $m \leq n$. Neem nu een $m \times n$ rooster waarbij $m \in \{1, 2\}$, dan geldt dat $E_t = E_c$ en dat een optimale TSP-tour door het rooster op de cilinder ook een optimale route is door het rooster op de torus. Daarom zullen hier alleen uitwerkingen gegeven worden voor $m \times n$ roosters waarbij $m \geq 3$.

Opmerking 3.1. Wanneer van een $m \times n$ rooster een torus wordt gevormd in $\mathbb{R}^3$, dan zullen de cellen in het rooster niet allemaal even groot zijn. De cellen die aan de buitenste ronding liggen zullen namelijk groter zijn dan de cellen in de binnenste ronding, waardoor de afstand tussen knopen verandert. De optimale TSP-tour door het rooster in de torus waarbij de cellen niet even groot zijn, zal in deze scriptie echter niet behandeld worden.

3.1 Resultaten voor $r = 0$

In deze sectie geldt dat $r = 0$. Dit houdt in dat er geen verboden omgevingen zijn en dat vanuit een knoop iedere andere knoop bereikt mag worden. De kortste afstand tussen twee verschillende knopen is dus minimaal 1. Hieronder zal bewezen worden dat op de torus de lengte van een optimale TSP-tour voor alle combinaties van m en n gelijk is aan mn.

Stelling 3.2. *De lengte van een optimale TSP-tour door een $m \times n$ rooster op een torus met $r = 0$ is mn.*

Bewijs. De optimale TSP-route door een rooster op een cilinder had al lengte mn wanneer $n \neq 1$. In de torus kan ook in een $m \times 1$ rooster een circuit van lengte mn worden geconstrueerd, omdat op een torus een $m \times n$ rooster congruent is aan een $n \times m$ rooster. Door het $m \times 1$ rooster een kwartslag te draaien kan dezelfde constructie constructie gehanteerd worden als in het geval van een $1 \times n$ rooster op een cilinder. $\square$

3.2 Resultaten voor $r = 1$

In deze sectie wordt toegewerkt naar een oplossing voor het TSPFN door roosters op een cilinder waarbij $r = 1$. Knopen mogen dus alleen na elkaar doorlopen worden wanneer de lengte van de kant tussen de knopen groter is dan 1. Een ondergrens voor de lengte van een kant die doorlopen mag worden is dus $\sqrt{2}$. Allereerst zullen in Lemma 3.3 ondergrenzen gegeven worden voor de lengte van een optimale TSP-tour door $m \times n$ roosters op een torus.

Lemma 3.3. *Ondergrenzen voor de lengte van een optimale TSP-tour door een rooster op een torus met $r = 1$ zijn:*

a) $\sqrt{2}\, mn$ *indien m of n oneven;*

b) $\sqrt{2}\,(mn - 2) + 2\sqrt{5}$ *indien m, n even.*

Bewijs.

a) Kanten van lengte $\sqrt{2}$ bestaan zowel tussen even en even, oneven en oneven en tussen even en oneven knopen. Omdat er mn kanten gebruikt worden in een tour door het rooster, is $\sqrt{2}\,mn$ een triviale ondergrens voor de lengte van een optimale TSP-tour.

b) Kanten van lengte $\sqrt{2}$ verbinden enkel even met even knopen of oneven met oneven knopen. In elke tour moet minimaal twee keer geswitcht worden tussen even en oneven knopen, wat kan met een kant van lengte minstens $\sqrt{5}$. Daarmee is $\sqrt{2}\,(mn-2)+2\sqrt{5}$ een ondergrens voor de lengte van een optimale TSP-tour. □

Stelling 3.4. *De lengte van een optimale TSP-tour door een rooster op een torus met $r = 1$ is:*

a) $\sqrt{2}\,mn$ *indien m of n oneven;*

b) $\sqrt{2}\,(mn-2)+2\sqrt{2}$ *indien m, n even.*

Bewijs. Volgens Lemma 3.3 zijn bovengenoemde lengtes alle ondergrenzen voor de lengte van een optimale TSP-tour. Daarom volstaat het geven van een constructie van een dergelijke TSP-tour als bewijs van deze stelling.

a) Voor dit bewijs zal onderscheid gemaakt worden tussen de gevallen i) m, n oneven; en ii) m even, n oneven of m oneven, n even.

   i) Een tour door een $m \times n$ rooster met m, n oneven en een lengte van $\sqrt{2}\,mn$ kan als volgt geconstrueerd worden:

   - Start in knoop $(1, 1)$ en verbind alle even knopen in de rijen 1 en 2 van links naar rechts, gebruikmakend van kanten van lengte $\sqrt{2}$ en eindigend in $(1, n)$;
   - Verbind $(1, n)$ met $(2, 1)$ door een kant van lengte $\sqrt{2}$ en doorloop vervolgens alle oneven knopen in de rijen 2 en 3 van links naar rechts, gebruikmakend van kanten van lengte $\sqrt{2}$, eindigend in $(2, n)$ en verbind deze weer met de even kant $(3, 1)$;
   - Doorloop vervolgens op deze manier alle even knopen in de rijen $(3, 4)$, $(5, 6)$, ..., $(n-2, n-1)$ en alle oneven knopen in de rijen $(4, 5)$, $(6, 7)$, .., $(n-1, n)$, gebruikmakend van kanten van lengte $\sqrt{2}$ en eindigend in knoop $(m-1, n)$;

- Verbind $(m-1, n)$ met $(m, 1)$ door een kant van lengte $\sqrt{2}$ en doorloop vervolgens – even en oneven knopen afwisselend – alle even knopen in rij m en oneven knopen rij 1 van links naar rechts, gebruikmakend van kanten van lengte $\sqrt{2}$ en eindigend in (m, n);
- Verbind ten laatste (m, n) met $(1, 1)$ door een kant van lengte $\sqrt{2}$.

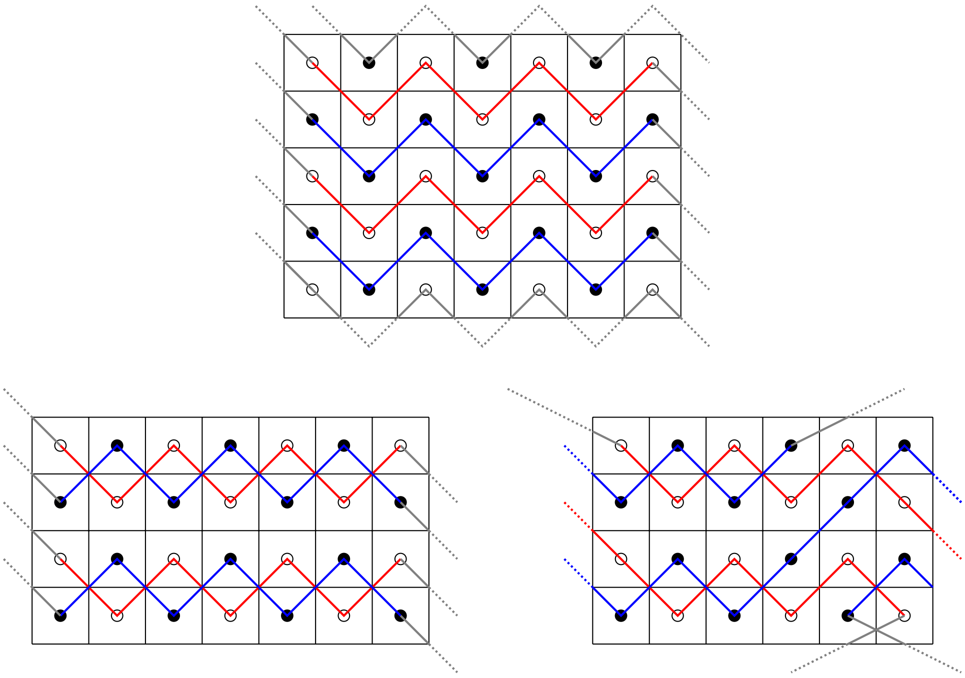
ii) Hieronder volgt een constructie van tour door een $m \times n$ rooster met m even, n oneven en lengte $\sqrt{2}\,mn$. Indien m oneven, n even, roteer het rooster een kwartslag en pas dan onderstaande constructie toe.

- Start in knoop $(1, 1)$ en doorloop achtereenvolgens alle even en oneven knopen in de rijen $(1, 2)$, $(3, 4)$, ..., $(m-1, m)$ van links naar rechts, gebruikmakend van kanten van lengte $\sqrt{2}$ en eindigend in knoop (m, n);
- Verbind ten laatste (m, n) met $(1, 1)$ gebruikmakend van een kant van lengte $\sqrt{2}$.

b) Een tour door een $m \times n$ rooster met m, n even en met een lengte van $\sqrt{2}\,(mn-2) + 2\sqrt{5}$ kan als volgt geconstrueerd worden:

- Start in knoop $(1, 1)$ en doorloop achtereenvolgens alle even knopen in de rijen $(1, 2)$,$(3, 4)$, ..., $(m-1, m)$ van links naar rechts, gebruikmakend van kanten van lengte $\sqrt{2}$, en eindigend in knoop (m, n);
- Verbind (m, n) met $(1, n-2)$ door een kant van lengte $\sqrt{5}$;
- Doorloop vervolgens achtereenvolgens alle oneven knopen in de rijen $(1, 2)$, $(3, 4)$, ..., $(m-1, m)$ van rechts naar links, gebruikmakend van kanten van lengte $\sqrt{2}$ en eindigend in knoop $(m, n-1)$;
- Verbind ten laatste $(m, n-1)$ met $(1, 1)$ door een kant van lengte $\sqrt{5}$.

Zie Figuur 11 voor de visualisatie een constructie van de hierboven beschreven TSP-tours. $\square$



Figuur 11. De constructie van een optimale TSP-tour door een 4×7 rooster (links boven), een 4×6 rooster (rechts boven), een 3×7 rooster (links onder) en een 5×7 rooster (rechts onder) op de torus.

Voor iedere combinatie van m en n is er een precieze formule voor de lengte van een optimale TSP-tour en de uitwerking van een constructie van een dergelijke tour gegeven. Hiermee is het TSPFN door $m \times n$ roosters op een torus met $r = 1$ opgelost.

4 Het TSPFN door roosters op een Möbiusband

Het TSPFN kan bestudeerd worden in roosters op een Möbiusband door het rooster te krommen en te draaien, waardoor kolom 1 en kolom n zodanig aan elkaar te laten grenzen dat $\forall i \in \{1, 2, ..., m\}$ knoop $(i, 1)$ verbonden is met knoop $(m - i + 1, n)$ door een kant van lengte 1. Voor een visualisatie van hoe de eerste en laatste kolom van het rooster op de Möbiusband met elkaar verbonden zijn, zie Figuur 12.

(5,6)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(5,1)
(4,6)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)	(4,1)
(3,6)	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	(3,1)
(2,6)	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)	(2,1)
(1,6)	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)	(1,1)

Figuur 12. Hoe de eerste en de laatste kolom van een 5×6 rooster op de Möbiusband met elkaar verbonden zijn.

Omdat de eerste en de laatste kolom van het rooster in de Möbiusband aan elkaar grenzen, wordt links (rechts) het rooster ingelopen wanneer er rechts (links) het rooster uitgelopen wordt. Zij nu $v = (i_v, j_v),\ w = (i_w, j_w) \in V$, dan zou de lengte van de kant e_{vw} onder andere op de volgende twee manieren kunnen worden berekend:

$$d_1(e_{vw}) = \sqrt{|i_v - i_w|^2 + (j_v - j_w)^2}$$

$$d_2(e_{vw}) = \sqrt{|(m - i_w + 1) - i_v|^2 + ((j_w - j_v) \bmod n)^2}$$

De lengte van de kant e_{vw} tussen v en w op de cilinder waarmee in deze scriptie gerekend wordt is als volgt gedefinieerd:

$$d(e_{vw}) \coloneqq \min(d_1(e_{vw}), d_2(e_{vw}))$$

Het TSPFN door roosters op een Möbiusband is dan het vinden van het kortste Hamiltoncircuit in de graaf $G_m = (V, E_m)$ waarbij de verzameling knopen $V = \{(i, j)\,|\, i \in \{1, 2, ..., m\},\ j \in \{1, 2, ..., n\}\}$ is en de verzameling kanten $E_m = \{e_{vw}\,|\, v, w \in V\ \wedge\ d(e_{vw}) > r\}$.

Zij nu $m = 1$. Omdat het rooster uit slechts één rij bestaat, grenst op de Möbiusband knoop $(1, 1)$ aan knoop $(1, n)$, net zoals op de cilinder. Dit houdt in dat $E_m = E_c$ en dat de optimale TSP-tour door een $1 \times n$ rooster op een cilinder ook een optimale TSP-tour is door een $1 \times n$ rooster op een Möbiusband. Daarom zal er enkel nog gezocht moeten worden voor een oplossing van het TSPFN door $m \times n$ roosters op de Möbiusband waarbij $m \geq 2$.

4.1 Resultaten voor $r = 0$

In deze sectie zal de oplossing gegeven worden voor het TSPFN door $m \times n$ roosters op de Möbiusband met $r = 0$. Alle kanten in het rooster mogen dus doorlopen worden en een ondergrens voor de lengte van een optimale TSP-tour is daarmee mn. In Stelling 4.1 zal bewezen worden dat voor alle combinaties van m en n een tour geconstrueerd kan worden met deze lengte.

Stelling 4.1. *De lengte van een optimale TSP-tour door een $m \times n$ rooster op een Möbiusband met $r = 0$ is mn.*

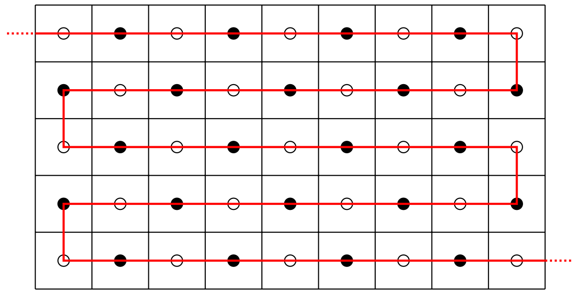
Bewijs. Wanneer $m, n \geq 2$ en m of n even, dan is op het vlak een tour van deze lengte mogelijk, en is ook te construeren op de Möbiusband. Alleen een bewijs voor de gevallen i) $n = 1$ en ii) m, n oneven volstaat:

i) Start in knoop $(1, 1)$ en doorloop alle knopen van boven naar beneden, eindigend in knoop $(m, 1)$. Verbind vervolgens $(m, 1)$ met $(1, 1)$.

ii) Een tour door een $m \times n$ rooster met m, n oneven en lengte mn kan als volgt geconstrueerd worden:

- Start in knoop $(1, 1)$ en doorloop alle knopen in rij 1 van links naar rechts, eindigend in $(1, n)$.
- Verbind $(1, n)$ met $(2, n)$ en doorloop alle knopen in rij 2 van rechts naar links.
- Doorloop vervolgens op dezelfde manier alle knopen in achtereenvolgens de rijen 3, 4, ...,m, waarbij de oneven rijen van links naar rechts worden doorlopen en de even rijen van rechts naar links, eindigend in knoop (m, n)
- Verbind (m, n) met $(1, 1)$

Zie Figuur 13 voor een visualisatie van een constructie van de optimale TSP-tour beschreven bij ii). □



Figuur 13. De constructie van een optimale TSP-tour door een 5×9 rooster op een Möbiusband.

4.2 Resultaten voor $r = 1$

Ten laatste zal in deze sectie toegewerkt worden naar de oplossing voor het TSPFN door $m \times n$ roosters op een Möbiusband met $r = 1$. Twee knopen mogen dus alleen na elkaar doorlopen worden indien de lengte van de kant tussen deze knopen groter is dan 1. De kortst mogelijke lengte van een kant die doorlopen mag worden is dus $\sqrt{2}$.

Allereerst zal er gezocht worden naar een ondergrens voor de lengte van een optimale TSP-tour. Hiervoor zal net zoals bij de cilinder onderscheid gemaakt worden tussen even on oneven knopen, inner en outer knopen, en friendly knopen. Hieronder volgt een redenering die gebruikt is om tot de ondergrenzen te komen beschreven in Lemma 4.2.

Als *m, n even of m, n oneven*, dan zijn alle even en oneven knopen in de kolommen 1 en n door een kant van lengte $\sqrt{2}$ verbonden met een oneven en even knoop, respectievelijk. Wel geldt nog steeds dat alle outer knopen – uitgezonderd de friendly knopen – enkel met inner knopen verbonden zijn. Daarom is het verschil in outer en inner knopen – waarbij alle met elkaar te verbinden friendly knopen als 1 outer knoop worden gerekend – het minimum voor het aantal kanten met een lengte groter dan $\sqrt{2}$ dat een Hamiltonciruit in het rooster door een Möbiusband bevat.

Indien *m oneven en n even of m oneven en n even*, dan zijn even knopen door een kant van lengte $\sqrt{2}$ enkel met even knopen verbonden en oneven knopen enkel met oneven knopen. Er moet in een tour minimaal tweemaal geswitcht worden tussen even en oneven knopen, wat kan met kanten van lengte minstens $\sqrt{5}$. Een ondergrens voor een optimale TSP-tour kan berekend worden door ondergrenzen te bepalen voor de lengte van een Hamiltonpad door de even en oneven knopen, deze te sommeren en daar nog tweemaal $\sqrt{5}$ bij op te tellen.

Lemma 4.2. *Ondergrenzen voor de lengte van een optimale TSP-tour door een $m \times n$ rooster op een Möbiusband met $r = 1$ zijn*

a) $\sqrt{2}\,mn$ *indien* m, n *even en* $m \equiv 0 \mod 4$ *of* $m = 2$*;*

b) $\sqrt{2}\,(mn - 1) + 2$ *indien* m, n *even en* $m \equiv 2 \mod 4$ *en* $m \neq 2$*;*

c) $\sqrt{2}\,n(m - 1) + 2n$ *indien* m, n *oneven;*

d) $\sqrt{2}\,n(m - 1) + 2(n - 2) + 2\sqrt{5}$ *indien* m *oneven en* n *even;*

e) $\sqrt{2}\,(mn - 2) + 2\sqrt{5}$ *indien* m *even en* n *oneven.*

Bewijs. In de eerste drie gevallen geldt dat m, n *even of* m, n *oneven*, en word dus naar het verschil tussen het aantal outer knopen en inner knopen gekeken.

a) Voor dit bewijs wordt onderscheid gemaakt tussen i) $m \equiv 0 \mod 4$; en ii) $m = 2$.

   i) Indien $m \equiv 0 \mod 4$ dan zijn er precies evenveel inner- als outer knopen. Dus is $\sqrt{2}\,mn$ een ondergrens voor de lengte van een optimale TSP-tour.

   ii) Indien $m = 2$, dan bestaat het rooster enkel uit friendly knopen. Een ondergrens voor de lengte van een optimale TSP-tour is daarmee $2\sqrt{2}\,n$

b) Indien $m \equiv 2 \mod 4$ dan is er één outer knoop meer dan er inner knopen zijn, namelijk de reeks friendly knopen die de rijen $\frac{m}{2}$ en $\frac{m}{2} + 1$ vormen. Er is dus minstens één kant tussen twee outer knopen nodig, welke minstens lengte 2 is. Daarmee is $\sqrt{2}\,(mn - 1) + 2$ een ondergrens voor het de lengte van een optimale TSP-tour.

c) Indien m, n oneven, dan is er één rij meer outer dan inner knopen. Er zijn dus minstens n kanten van minstens lengte 2 nodig. Daarmee is $\sqrt{2}\,n(m - 1) + 2n$ een ondergrens voor de lengte van een optimale TSP-tour.

In de volgende twee gevallen geldt dat m *oneven en* n *even of* m *oneven en* n *even* en wordt de ondergrens bepaald door ondergrenzen te bepalen voor Hamiltonpaden door de even knopen en oneven knopen.

d) Indien m oneven en n even, dan is er één rij meer outer knopen dan inner knopen. Elke rij bevat $\frac{n}{2}$ even en $\frac{n}{2}$ oneven knopen en dus zijn er $\frac{n}{2}$ meer outer even (oneven) knopen dan inner even (oneven) knopen. Een Hamiltonpad door alle even (oneven) knopen bevat dus minstens $\frac{n}{2} - 1$ kanten van lengte 2, omdat het pad mag beginnen en eindigen in een outer knoop. Daarmee is $\sqrt{2}\,n(m-1) + 2(n-2) + 2\sqrt{5}$ een ondergrens voor de lengte van een optimale TSP-tour.

e) Voor dit bewijs wordt onderscheid gemaakt tussen i) $m \equiv 0 \bmod 4$; en ii) $m \equiv 2 \bmod 4$

   i) Indien $m \equiv 0 \bmod 4$ dan zijn en evenveel rijen met inner knopen als met outer knopen. $\forall i \in \{0, 1, ..., \frac{m}{2}\}$ geldt dat de rijen i en $m - i + 1$ samengenomen n even en n oneven knopen bevat. Dit houdt in dat er dus ook evenveel outer even (oneven) als inner even (oneven) knopen zijn. Een ondergrens voor het aantal kanten met lengte minimaal 2 in een Hamiltonpad door alle even (oneven) knopen is dus 0. Dus is $\sqrt{2}\,(mn-2) + 2\sqrt{5}$ een ondergrens voor de lengte van een optimale TSP-tour.

   ii) Indien $m \equiv 2 \bmod 4$ dan zijn er twee rijen meer outer dan inner knopen. De rijen $\frac{m}{2}$ en $\frac{m}{2} + 1$ bestaat uit één reeks even friendly knopen en één reeks oneven friendly knopen. Daarbij geldt $\forall i \in \{0, 1, ..., \frac{m}{2} - 1\}$ de rijen i en $m-i+1$ samengenomen n even en n oneven knopen bevat. Er is dus 1 outer even (oneven) knoop meer dan er inner even (oneven) knopen zijn. Een ondergrens voor het aantal kanten met lengte minimaal 2 in een Hamiltonpad door alle even (oneven) knopen is dus 0, omdat het pad zowel mag beginnen als eindigen in een outer knoop. Dus is $\sqrt{2}\,(mn-2) + 2\sqrt{5}$ een ondergrens voor de lengte van een optimale TSP-tour. $\square$

Net zoals bij de cilinder zullen er bij de Möbiusband vele gevalsonderscheidingen moeten worden gemaakt om het TSPFN door $m \times n$ roosters op een Möbiusband met $r = 1$ op te lossen. Deze zullen echter niet allemaal besproken worden. Wat nog volgt is enkel de uitwerking van een aantal gevallen waarvoor de lengte van de optimale TSP-tour gelijk is aan de hierboven beschreven ondergrens.

Stelling 4.3. *De lengte van een optimale TSP-tour door een $m \times n$ rooster op een Möbiusband met $r = 1$ is:*

a) $\sqrt{2}\,n(m-1) + 2(n-2) + 2\sqrt{5}$ *indien $m \geq 5$ oneven en $n \geq 6$ even;*

b) $\sqrt{2}\,mn$ *indien $m = 2$ en n even;*

c) $\sqrt{2}\,(4n-2)+2\sqrt{5}$ *indien* $m=4$ *en* n *oneven.*

Bewijs. Aangezien deze lengtes volgens Lemma 4.2 alle ondergrenzen zijn voor de lengte van een optimale TSP-tour, volstaat een constructie van een dergelijke tour als bewijs.

a) Een TSP-tour van lengte $\sqrt{2}\,n(m-1)+2(n-2)+2\sqrt{5}$ indien $m \geq 5$ oneven en $n \geq 6$ even bestaat op het vlak [5]. Deze tour kan ook doorlopen worden op de Möbiusband (zie Theorem 4b voor de constructie [5]).

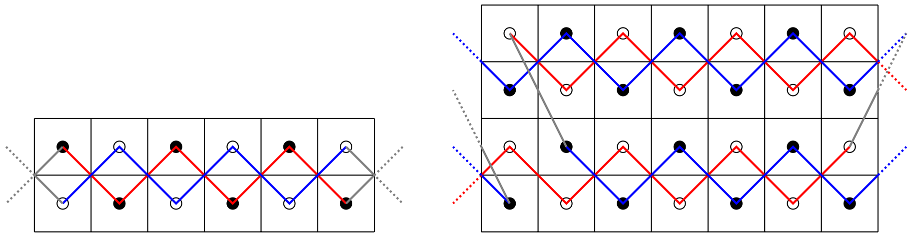
b) Een tour door een $m \times n$ rooster met $m=2$, n oneven en lengte $\sqrt{2}\,mn$ kan als volgt geconstrueerd worden:

- Start in knoop (1,1) en doorloop alle even knopen van links naar rechts, gebruikmakend van kanten van lengte $\sqrt{2}$, eindigend in knoop $(2,n)$;
- Verbind $(2,n)$ met $(2,1)$ door een kant lengte $\sqrt{2}$ en doorloop vervolgens alle oneven knopen van links naar rechts, gebruikmakend van kanten van lengte $\sqrt{2}$ en eindigend in knoop $(1,n)$;
- Verbind ten laatste $(1,n)$ met $(1,1)$ door een kant van lengte $\sqrt{2}$.

c) Een tour door een $m \times n$ rooster met $m=4$, n oneven en lengte $\sqrt{2}\,(4n-2)+2\sqrt{5}$ kan als volgt geconstrueerd worden:

- Start in $(1,1)$ en doorloop achtereenvolgens de even knopen in de rijen $(1,2)$ en $(3,4)$ van links naar rechts, gebruikmakend van kanten van lengte $\sqrt{2}$ en eindigend in knoop $(3,n)$;
- Verbind $(3,n)$ met $(4,1)$ door een kant van lengte $\sqrt{5}$ en vervolgens $(4,1)$ met $(2,n)$ door een kant van lengte $\sqrt{2}$;
- Doorloop achtereenvolgens alle overige oneven knopen in de rijen $(1,2)$ en $(3,4)$ van rechts naar links, gebruikmakend van kanten van lengte $\sqrt{2}$ en eindigend in $(2,3)$;
- Verbind ten laatste $(2,3)$ met $(1,1)$ door een kant van lengte $\sqrt{5}$.

Zie Figuur 14 voor een visualisatie van de constructie van de optimale TSP-tours beschreven bij b) en c). $\square$



Figuur 14. De constructie van een optimale TSP-tour door een 3×6 rooster (links) en een 5×6 rooster (rechts) op een Möbiusband.

5 Conclusie en vervolgonderzoek

In deze scriptie werd gezocht naar een oplossing voor het Handelsreizigersprobleem met Verboden Omgevingen (Traveling Salesman Problem with Forbidden Neighborhoods; TSPFN) door $m \times n$ roosters op een cilinder, torus en Möbiusband met $r = 0$ en $r = 1$. Voor $r = 0$ werd er op de cilinder, torus en Möbiusband voor alle combinaties van m en n en precieze formule gegeven voor de lengte van een optimale TSP-tour en werd ook de constructie voor dergelijke tours uitgewerkt. Voor $r = 1$ werd het TSPFN op de torus volledig opgelost; op de cilinder voor vele combinaties van m en n; en op de Möbiusband slecht een enkele combinatie. Zowel op de cilinder en de Möbiusband zijn er dus nog open problemen.

Vervolgonderzoek naar het TSPFN zou meerdere kanten op kunnen gaan. Als eerst zou in een vervolgonderzoek verder gezocht kunnen worden gedaan de oplossing van het TSPFN voor de combinaties van m en n waarvoor in huidige scriptie geen oplossing werd gevonden. De open problemen op de cilinder zijn beschreven in Tabel 2, en op de Möbiusband zijn dit de volgende combinaties van m, n: i) $m = 2$, n oneven; ii) $m = 3$, n even; iii) $m \geq 3$, n oneven; iv) $m \geq 4$, m even; v) $m \geq 5$ oneven, $n \geq 4$ even; en vi) $m \geq 6$ even, n oneven.

Een tweede mogelijkheid voor vervolgonderzoek is het oplossen van het TSPFN door $m \times n$ roosters op de cilinder, torus en Möbiusband waarbij de verboden omgevingen groter zijn, oftewel met grotere waarden voor r. Een andere interessante weg die ingeslagen kan worden is het bestuderen van het TSPFN op roosters waarbij de cellen niet allemaal even groot zijn. Op deze manier zou er bijvoorbeeld gezocht kunnen worden naar een optimale TSP-tour door een rooster welke na kromming daadwerkelijk een torus vormt in $\mathbb{R}^3$. Tenslotte zou het TSPFN ook kunnen worden bestudeerd op andere wiskundige figuren of meetkundige structuren die in deze scriptie en in het onderzoek van Fischer en Hunderländer [5] niet aan bod zijn gekomen. Voorbeelden hiervan zijn de fles van klein en het projectief vlak. Al met al zijn er nog vele mogelijkheden om het TSPFN nader te bestuderen.

Referenties

[1] Voigt, B.F. (1831). *Der Handlungsreisende, wie er sein soll und was er zu thun hat, um Aufräge zu erhalten und eines glücklichen Erfolgs in seinen Geschäften gewiss zu sein.* Von einem alten Commis-Voyageur, Ilmenau.

[2] Schneider, J.J., Bukur, T., & Krausse, A. (2010). Traveling Salesman Problem with Clustering. *Journal of Statistical Physics*, **141**, 767–784. doi:10.1007/s10955-010-0080-z

[3] Schneider, J. (2002). The time-dependent traveling salesman problem. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **314**(1–4), 151–155. doi:10.1016/S0378-4371(02)01078-6

[4] Laporte, G., Mercure, H., & Nobert, Y. (1987). Generalized travelling salesman problem through *n* sets of nodes: the asymmetrical case. *Discrete Applied Mathematics*, **18**(2), 185–197. doi:10.1016/0166-218X(87)90020-5

[5] Fischer, A., & Hunderländer, P. (2017). The traveling salesman problem on grids with forbidden neighborhoods. *Journal of Combinatorial Optimization*. doi:10.1007/s10878-017-0119-z

[6] Kordaß, R. (2014). *Untersuchungen zum Eigenspannungs- und Verzugsverhalten beim Laserstrahlschmelzen* (master thesis). Geraadpleegd van http://publica.fraunhofer.de/dokumente/N-315118.html