

# Tutte Polynoom

Eline Renskers  
Radboud Universiteit Nijmegen  
Begeleider: Wieb Bosma

20 juni 2013



# Inhoudsopgave

<b>Voorwoord</b>	<b>ii</b>
<b>Inleiding</b>	<b>iii</b>
<b>1 Definities van het Tuttepolynoom</b>	<b>1</b>
1.1 Verwijdering-fusiealgoritme . . . . .	1
1.2 Opspannende bossen . . . . .	4
1.3 Rang en nullity . . . . .	7
1.4 Equivalentie van de definities . . . . .	9
<b>2 Universaliteit</b>	<b>15</b>
2.1 Universele eigenschap . . . . .	15
2.2 Complexiteit . . . . .	17
<b>3 Toepassingen</b>	<b>20</b>
3.1 Chromatische polynoom . . . . .	20
3.2 Betrouwbaarheidspolynoom . . . . .	23
3.3 Flow-polynoom . . . . .	25
<b>Literatuurlijst</b>	<b>27</b>

## Voorwoord

# Inleiding

# 1 Definities van het Tuttepolynoom

In dit hoofdstuk zullen drie verschillende definities van het Tuttepolynoom aan bod komen. Hiervoor zullen vooraf enkele andere definities en notaties gegeven moeten worden. Aan het eind van dit hoofdstuk zal worden aangetoond dat de definities equivalent zijn en dus altijd hetzelfde Tuttepolynoom opleveren.

## 1.1 Verwijdering-fusiealgoritme

**Definitie.** Een graaf  $G = (V, E)$  bestaat uit een knopenverzameling  $V$  en een kantenverzameling  $E$ . Een kant in  $E$  kan worden genoteerd met  $e \in E$  of met  $(v, w) \in E$ , waarbij  $v, w \in V$  ( $v$  en  $w$  zijn in dit geval met elkaar verbonden). Een graaf heet simpel, wanneer voor alle  $v, w \in V$  geldt dat als  $(v, w) \in E$ , dan  $v \neq w$  en  $v$  en  $w$  door hoogstens één kant worden verbonden.

Opmerking: wanneer we het in het vervolg over een graaf  $G$  hebben, hoeft dit niet een simpele graaf te zijn.

**Definitie.** We noemen  $\kappa(E)$  het aantal samenhangscomponenten van een graaf  $G = (V, E)$ . Een kant  $e$  van graaf  $G = (V, E)$  met  $\kappa(E) = n$  heet een brug, als geldt:  $\kappa(E \setminus \{e\}) = n + 1$ .

Een kant  $e$  heet een lus, als  $e = (v, v)$  met  $v \in V$ .

Een kant heet simpel, als deze geen brug of lus is.

Opmerking: vanaf nu zal voor het gemak  $E \setminus \{e\}$  ook wel genoteerd worden als  $E \setminus e$ .

Nu deze termen gedefinieerd zijn, kunnen we een definitie geven van het Tuttepolynoom door middel van een verwijdering-fusiealgoritme.

**Definitie 1.1.** Zij  $G = (V, E)$  een graaf. Het Tuttepolynoom  $T(G; x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$  van graaf  $G$  is als volgt gedefinieerd:

$$T(G; x, y) = \begin{cases} xT(G \setminus e; x, y) & \text{als } e \text{ een brug is} \\ yT(G/e; x, y) & \text{als } e \text{ een lus is,} \\ T(G \setminus e; x, y) + T(G/e; x, y) & \text{als } e \text{ een simpele kant is} \\ 1 & \text{als } E = \emptyset. \end{cases}$$

Hierbij is  $G \setminus e$  de graaf verkregen door kant  $e$  uit de kantenverzameling  $E$  te verwijderen. Deze bewerking op  $G$  wordt ook wel verwijdering genoemd.

Graaf  $G/e$  is de graaf verkregen door de twee knopen  $v_1$  en  $v_2$  die door  $e$  verbonden worden samen te voegen (fuseren) tot één knoop  $v'$ , waarna kant  $e$  wordt verwijderd. Kanten  $(v_i, v_1)$  en  $(v_j, v_2)$  worden na de bewerking genoteerd als  $(v_i, v')$  respectievelijk  $(v_j, v')$ . Deze bewerking op  $G$  wordt ook wel fusie genoemd.

**Propositie 1.2.** Zij  $G_1$  en  $G_2$  twee disjuncte grafen, oftewel:  $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$  en  $E(G_1) \cap E(G_2) = \emptyset$ . Dan:

$$T(G_1 \cup G_2; x, y) = T(G_1; x, y) \cdot T(G_2; x, y)$$

*Bewijs.* Deze propositie zal worden bewezen met inductie.

Stel:  $E(G_1) \cup E(G_2) = \emptyset$ . Dan geldt logischerwijs dat  $E(G_1) = \emptyset$  en  $E(G_2) = \emptyset$ .

Uit de Definitie 1.1 volgt  $T(G_1 \cup G_2; x, y) = 1$ ,  $T(G_1; x, y) = 1$  en  $T(G_2; x, y) = 0$  en dus  $T(G_1 \cup G_2; x, y) = T(G_1; x, y) \cdot T(G_2; x, y)$ .

Stel: de uitspraak is waar voor  $|E(G_1) \cup E(G_2)| = n$ .

- Voeg aan  $G_1$  een simpele kant  $e$  toe:

$$\begin{aligned} T((G_1 \cup e) \cup G_2; x, y) &= T((G_1 \setminus e) \cup G_2; x, y) + T((G_1/e) \cup G_2; x, y) \\ &= T(G_1 \setminus e; x, y) \cdot T(G_2; x, y) + T(G_1/e; x, y) \cdot T(G_2; x, y) \\ &= (T(G_1 \setminus e; x, y) + T(G_1/e; x, y)) \cdot T(G_2; x, y) \\ &= T(G_1 \cup e; x, y) \cdot T(G_2; x, y) \end{aligned}$$

- Voeg aan  $G_1$  een brug  $e$  toe:

$$\begin{aligned} T((G_1 \cup e) \cup G_2; x, y) &= xT((G_1 \setminus e) \cup G_2; x, y) \\ &= xT(G_1 \setminus e; x, y) \cdot T(G_2; x, y) \\ &= T(G_1 \cup e; x, y) \cdot T(G_2; x, y) \end{aligned}$$

- Voeg aan  $G_1$  een lus  $e$  toe:

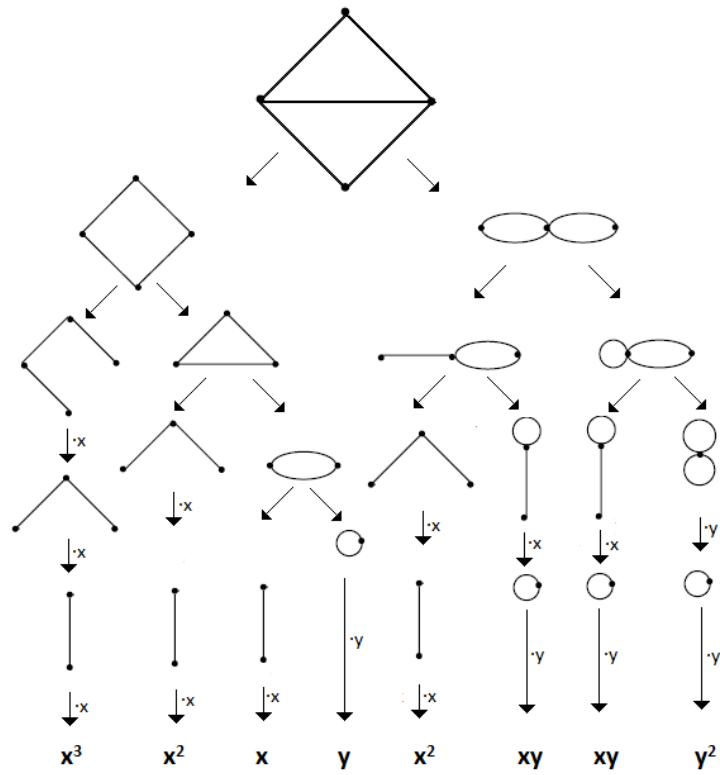
$$\begin{aligned} T((G_1 \cup e) \cup G_2; x, y) &= yT((G_1/e) \cup G_2; x, y) \\ &= yT(G_1/e; x, y) \cdot T(G_2; x, y) \\ &= T(G_1 \cup e; x, y) \cdot T(G_2; x, y) \end{aligned}$$

□

Opmerking: Een graaf hoeft dus niet samenhangend te zijn om het Tuttepolynoom ervan te berekenen.

Ter verduidelijking van deze definitie zal er in het volgende voorbeeld het Tuttepolynoom van een graaf worden bepaald aan de hand van de definitie door middel van het verwijdering-fusiealgoritme.

**Voorbeeld 1.3.** In dit voorbeeld horen de pijlen die naar links wijzen bij verwijdering, en de pijlen die naar rechts wijzen bij fusie.  
 Dit levert het Tuttepolynoom  $T(G; x, y) = x^3 + 2x^2 + x + 2xy + y + y^2$  op.



## 1.2 Opspannende bossen

Naast de definitie door middel van een lineaire recursie, kan het Tuttepolynoom van een graaf ook worden bepaald aan de hand van opspannende bossen. Voor het zover is dat we de definitie op die manier kunnen geven, zullen wederom eerst enkele definities en notaties voorafgaan aan de definitie van het Tuttepolynoom.

**Definitie.** Een pad  $P$  tussen twee knopen  $v_1$  en  $v_n$  van een graaf, wordt als volgt gedefinieerd:  $P = [(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-1}, v_n)]$  met  $(v_i, v_{i+1}) \in E$  en  $v_i \neq v_j$  voor  $i \neq j$ .

Een cykel is een gesloten pad, oftewel:  $v_1 = v_n$ .

Opmerking: een lus is een cykel. Het is immers een gesloten pad bestaande uit slechts één kant.

**Definitie.** Graaf  $G = (V, E)$  heet een bos, als het geen cyclen bevat.

Graaf  $H = (V, F) \subset G$  heet een opspannend bos van  $G$ , als  $H$  een bos is,  $H$  en  $G$  dezelfde knopenverzameling  $V$  hebben,  $F \subset E$  en  $\kappa(H) = \kappa(G)$ .

Opmerking: Vanaf nu zal een deelgraaf  $H = (V, F)$  van  $G$  met dezelfde knopenverzameling  $V$  en met kantenverzameling  $F \subset E$  voor het gemak ook wel genoteerd worden als  $F$ .

**Definitie.** Zij  $G = (V, E)$  een graaf. Deze graaf heet gewogen als  $w(e) \in \mathbb{R}$  voor alle  $e \in E$ .

Een ordening van de kantenverzameling  $E$  van een graaf is het toekennen van een volgorde aan alle kanten van de graaf.

Als kant  $e$  in de ordening voorafgaat aan kant  $f$ , noteren we dat als  $e < f$ .

Een ordening zouden we dus kunnen geven aan de hand van de gewichten die we de kanten hebben toegewezen in een gewogen graaf. De ordening wordt dan zodanig bepaald, dat  $e < f$  als  $w(e) \leq w(f)$ . Let op: de ordening op deze manier gegeven hoeft niet uniek te zijn!

**Definitie.** Zij  $F \subset G$  een opspannend bos van  $G$ .

$S_e = \{f \in G \mid (F \setminus e) \cup f \text{ opspannend bos van } G\}$  heet de snederuimte van  $e$ .

$C_e = \{f \in G \mid (F \cup \{e\}) \setminus \{f\} \text{ opspannend bos van } G\}$  heet de cykelruimte van  $e$ .

Opmerking:  $S_e = \emptyset$  voor alle  $e \notin F$  en  $C_e = \emptyset$  voor alle  $e \in F$ .

**Definitie.** Zij  $G = (V, E)$  een graaf met een ordening op  $E(G)$  en zij  $F \subset G$  een opspannend bos van  $G$ .

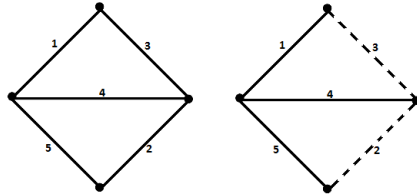
Kant  $e \in F$  heet intern actief, als voor alle  $f \in S_e$  geldt dat  $e < f$ .

Kant  $e \notin F$  heet extern actief, als voor alle  $f \in C_e$  geldt dat  $e < f$ .

De interne activiteit  $i$  van een opspannend bos is precies het aantal intern actieve kanten van dit bos en net zo is de externe activiteit  $j$  van een opspannend bos precies het aantal extern actieve kanten van dit bos.



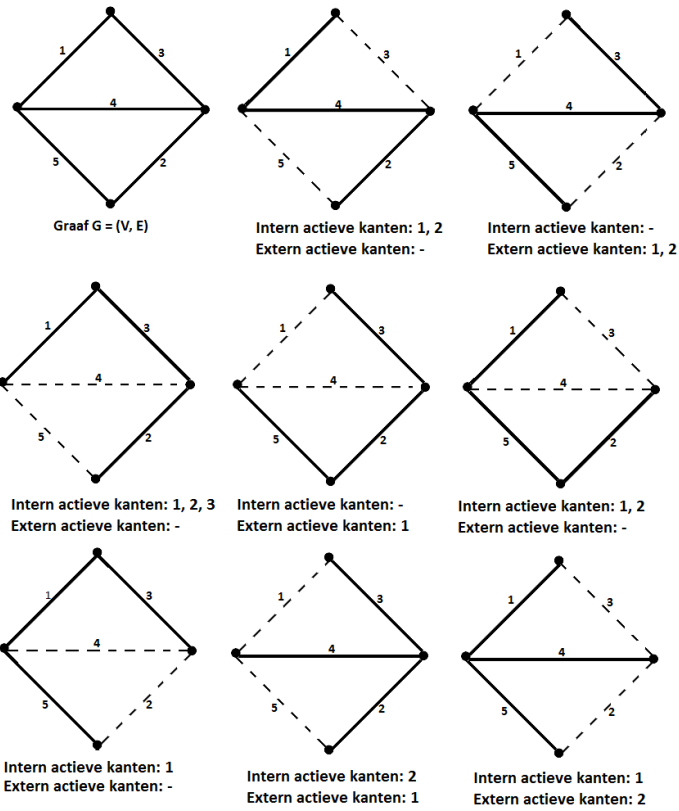
**Voorbeeld 1.4.** Hieronder zijn een graaf met een ordening op de kanten en een opspannend bos van deze graaf weergegeven. De interne en externe activiteit zijn beide 1, omdat de kant met nummer 1 de enige intern actieve kant is en de kant met nummer 2 de enige extern actieve kant.



**Definitie 1.5.** Zij  $G = (V, E)$  een graaf met een ordening op  $E$  en zij  $t_{ij}$  het aantal opspannende bossen van  $G$  met interne activiteit  $i$  en externe activiteit  $j$ . Het Tuttepolynoom  $T(G; x, y)$  van graaf  $G$  is als volgt gedefinieerd:

$$T(G; x, y) = \sum_{i,j} t_{ij} x^i y^j.$$

**Voorbeeld 1.6.** In dit voorbeeld zullen we het Tuttepolynoom uitrekenen met behulp van Definitie 1.5. We doen dit voor dezelfde graaf als in Voorbeeld 1.3, alleen wijzen we nu een ordening toe aan de kanten van de graaf.



We zien dat deze berekening hetzelfde polynoom oplevert als in Voorbeeld 1.3:

$$\begin{aligned}
 T(G; x, y) &= x^2 + y^2 + x^3 + y + x^2 + x + xy + xy \\
 &= x^3 + 2x^2 + x + 2xy + y + y^2.
 \end{aligned}$$

Opmerking: in dit voorbeeld zagen we dat de berekening van het Tuttepolynoom voor deze graaf met deze specifieke ordening van de kanten hetzelfde polynoom oplevert als in Voorbeeld 1.3. Later zullen we zien dat het Tuttepolynoom van een graaf met dezelfde kanten- en knopenverzameling onafhankelijk is van de gekozen ordening van de kanten.

### 1.3 Rang en nullity

De definitie die in deze paragraaf gegeven wordt, wordt vooral gebruikt om eigenschappen van het Tuttepolynoom mee te bewijzen. Het daadwerkelijk uitrekenen van het polynoom gaat gemakkelijker met de definities die in de vorige twee paragrafen gegeven zijn.

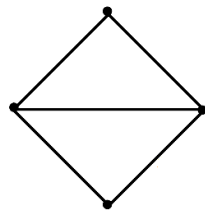
**Definitie.** Zij  $G = (V, E)$  een graaf en zij  $A \subseteq E$  een deelgraaf van  $G$ . De rang  $r(A)$  en de nullity  $n(A)$  van deelgraaf  $A$  zijn als volgt gedefinieerd:

$$\begin{aligned}r(A) &= |V| - \kappa(A), \\n(A) &= |A| - r(A).\end{aligned}$$

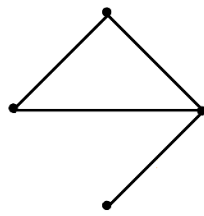
**Definitie 1.7.** Zij  $G = (V, E)$  een graaf. Het Tuttepolynoom  $T(G; x, y)$  van graaf  $G$  is als volgt gedefinieerd:

$$\begin{aligned}T(G; x, y) &= \sum_{A \subseteq E} (x-1)^{r(E)-r(A)} (y-1)^{n(A)} \\ &= \sum_{A \subseteq E} (x-1)^{\kappa(A)-\kappa(E)} (y-1)^{|A|-|V|+\kappa(A)}.\end{aligned}$$

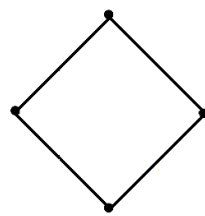
**Voorbeeld 1.8.** Ook in dit voorbeeld zullen we het Tuttepolynoom berekenen aan de hand van de zojuist gegeven definitie voor dezelfde graaf als in Voorbeeld 1.3 en Voorbeeld 1.6.



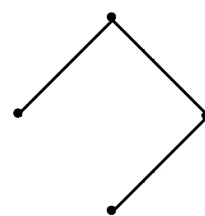
$\kappa(A) - \kappa(E) = 0$   
 $|A| - |V| + \kappa(A) = 2$   
 geen isomorfe deelgrafen



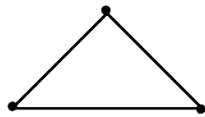
$\kappa(A) - \kappa(E) = 0$   
 $|A| - |V| + \kappa(A) = 1$   
 3 isomorfe deelgrafen



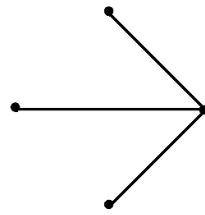
$\kappa(A) - \kappa(E) = 0$   
 $|A| - |V| + \kappa(A) = 1$   
 geen isomorfe deelgrafen



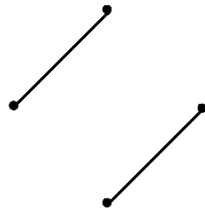
$\kappa(A) - \kappa(E) = 0$   
 $|A| - |V| + \kappa(A) = 0$   
 5 isomorfe deelgrafen



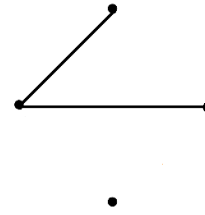
$\kappa(A) - \kappa(E) = 1$   
 $|A| - |V| + \kappa(A) = 1$   
 1 isomorfe deelgraaf



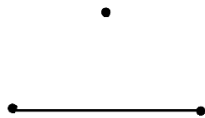
$\kappa(A) - \kappa(E) = 0$   
 $|A| - |V| + \kappa(A) = 0$   
 1 isomorfe deelgraaf



$\kappa(A) - \kappa(E) = 1$   
 $|A| - |V| + \kappa(A) = 0$   
 1 isomorfe deelgraaf



$\kappa(A) - \kappa(E) = 1$   
 $|A| - |V| + \kappa(A) = 0$   
 7 isomorfe deelgrafen



$\kappa(A) - \kappa(E) = 2$   
 $|A| - |V| + \kappa(A) = 0$   
 4 isomorfe deelgrafen



$\kappa(A) - \kappa(E) = 3$   
 $|A| - |V| + \kappa(A) = 0$   
 geen isomorfe deelgrafen

Met deze gegevens kunnen we het Tuttepolynoom voor deze graaf berekenen:

$$\begin{aligned} T(G; x, y) &= (y - 1)^2 + 4(y - 1) + (y - 1) + 6 + 2(y - 1)(x - 1) \\ &\quad + 2 + 2(x - 1) + 8(x - 1) + 5(x - 1)^2 + (x - 1)^3 \\ &= x^3 + 2x^2 + x + 2xy + y + y^2. \end{aligned}$$

Ook hier zien we dat deze definitie van het Tuttepolynoom hetzelfde polynoom oplevert voor de gekozen graaf als in Voorbeeld 1.3 en Voorbeeld 1.6.

## 1.4 Equivalentie van de definities

Voor we kunnen beginnen met het aantonen van equivalentie (Stelling 1.12), zullen er eerst enkele lemma's gegeven en bewezen worden. In het bewijs van de stelling zullen deze namelijk gebruikt worden.

**Lemma 1.9.** *Zij  $G = (V, E)$  een graaf en zij  $e \in E$  een brug. Dan:  $F \subset G$  is een opspannend bos van  $G$  met  $e \in F \iff F \setminus e$  is een opspannend bos van  $G \setminus e$ .*

*Bewijs.*  $e$  is een brug, dus  $\kappa(F \setminus e) = \kappa(F) + 1$  en  $\kappa(G \setminus e) = \kappa(G) + 1$ .  
 $F$  is een opspannend bos van  $G \iff \kappa(F) = \kappa(G)$  en  $F$  bevat geen cyclen  
 $\iff \kappa(F \setminus e) - 1 = \kappa(G \setminus e) - 1$  en  $F$  bevat geen cyclen  $\iff \kappa(F \setminus e) = \kappa(G \setminus e)$   
en  $F \setminus e$  bevat geen cyclen ( $e$  is een brug)  $\iff F \setminus e$  is een opspannend bos van  $G \setminus e$ .  $\square$

**Lemma 1.10.** *Zij  $G = (V, E)$  een graaf en zij  $e \in E$  een lus. Dan:  $F \subset G$  een opspannend bos van  $G \iff F$  opspannend bos van  $G \setminus e$ .*

*Bewijs.*  $e$  is een lus, dus  $\kappa(G) = \kappa(G \setminus e)$ .  
 $F$  is opspannend bos van  $G \iff \kappa(F) = \kappa(G)$  en  $F$  bevat geen cyclen  $\iff$   
 $\kappa(F) = \kappa(G \setminus e)$  en  $F$  bevat geen cyclen  $\iff F$  is een opspannend bos van  $G \setminus e$ .  $\square$

**Lemma 1.11.** *Zij  $G = (V, E)$  een graaf en zij  $e \in E$  een simpele kant. Dan:  $F \subset G$  een opspannend bos van  $G$  met  $e \notin F \iff F$  een opspannend bos van  $G \setminus e$ .*

*Bewijs.*  $e$  is een simpele kant, dus  $\kappa(G) = \kappa(G \setminus e)$ .  
 $F$  is een opspannend bos van  $G$ , met  $e \notin F \iff \kappa(F) = \kappa(G)$  en  $F$  bevat geen cyclen  
 $\iff \kappa(F) = \kappa(G \setminus e)$  en  $F$  bevat geen cyclen  $\iff F$  opspannend bos van  $G \setminus e$ .  $\square$

**Lemma 1.12.** *Zij  $G = (V, E)$  een graaf en zij  $e \in E$  een simpele kant. Dan:  $F \cup e \subset G$  is een opspannend bos van  $G$  met  $e \notin F \iff F$  opspannend bos van  $G/e$ .*

*Bewijs.*  $e$  is een simpele kant, dus  $\kappa(G) = \kappa(G/e)$ .  
 $F \cup e$  is een opspannend bos van  $G \iff \kappa(F \cup e) = \kappa(G)$  en  $F \cup e$  bevat geen cyclen  
 $\iff \kappa(F \cup e) = \kappa(G/e)$  en  $F \cup e$  bevat geen cyclen  $\iff \kappa(F) = \kappa(G/e)$  en  $F$   
bevat geen cyclen ( $e \notin E(G/e)$ ).  $\iff F$  is een opspannend bos van  $G/e$ .  $\square$

**Stelling 1.13.** Zij  $G = (V, E)$  een graaf. Noteer het Tuttepolynoom gedefinieerd als in Definitie 1.1  $T_1(G; x, y)$ , noteer het Tuttepolynoom gedefinieerd als in Definitie 1.5  $T_2(G; x, y)$  en noteer het Tuttepolynoom gedefinieerd als in Definitie 1.7  $T_3(G; x, y)$ .

Dan:  $T_1(G; x, y) = T_2(G; x, y) = T_3(G; x, y)$ .

Tevens is het polynoom onafhankelijk van de keuze van de ordening van de kanten.

*Bewijs.* De uitspraak  $T_1(G; x, y) = T_2(G; x, y)$  zal worden bewezen door middel van inductie op het aantal kanten van graaf  $G$ .

Zij  $G = (V, E)$  een graaf en  $|V| = n$  en  $|E| = 0$ . Voor  $T_1(G; x, y)$  geldt per definitie:  $T_1(G; x, y) = 1$ .

Graaf  $G$  heeft geen kanten, dus er kunnen ook geen kanten intern of extern actief zijn  $\implies t_{ij} = 0$  voor  $i > 0$  of  $j > 0$ . Voor  $i = 0$  en  $j = 0$  geldt: slechts één opspannend bos heeft interne en externe activiteit gelijk aan 0, namelijk graaf  $G$  zelf  $\implies t_{00} = 1$ . Dus:

$$T_2(G; x, y) = \sum_{i,j} t_{ij} x^i y^j = t_{00} x^0 y^0 = 1$$

Vanuit de inductiehypothese nemen we nu aan dat de stelling geldt voor grafen met  $|E|$  hoogstens  $m - 1$ . We bekijken nu de graaf  $G = (V, E)$  met  $|V| = n$  en  $|E| = m$ .

Wijs aan de kanten van  $G$  willekeurig gewichten toe.

Orden de kanten als volgt:  $e_1, e_2, \dots, e_m$ , zodat  $w(e_i) \leq w(e_j)$  als  $i \leq j$ . Deze ordening is willekeurig, omdat de gewichten willekeurig aan de kanten toegewezen zijn.

Bekijk nu grafen  $G \setminus e_m$  en  $G/e_m$ . Dit zijn duidelijk allebei grafen met  $m - 1$  kanten. Zij  $t_{ij \setminus}$  het aantal opspannende bossen van  $G \setminus e_m$  met interne activiteit  $i$  en externe activiteit  $j$  en zij  $t_{ij /}$  het aantal opspannende bossen van  $G/e_m$  met interne activiteit  $i$  en externe activiteit  $j$ .

Volgens de inductiehypothese geldt:  $T_1(G \setminus e_m; x, y) = T_2(G \setminus e_m; x, y)$

en  $T_1(G/e_m; x, y) = T_2(G/e_m; x, y)$ . Bekijk nu kant  $e_m$  in graaf  $G$ . Deze kan een brug, lus of een simpele kant zijn. Deze drie gevallen gaan we onderscheiden:

- Geval 1:  $e_m$  is een brug.

Dan moet  $e_m$  voorkomen in ieder opspannend bos van  $G$ . Tevens draagt  $e_m$  bij aan de interne activiteit van ieder opspannend bos, omdat  $S_{e_m} = \{e_m\}$  voor ieder opspannend bos.

Dankzij Lemma 1.9 zien we dat alle opspannende bossen van  $G$  zijn te verkrijgen door aan alle opspannende bossen uit  $G \setminus e_m$  kant  $e_m$  toe te voegen. Daarnaast blijft de interne activiteit van iedere kant uit een bos in  $G \setminus e_m$  gewaarborgd na toevoegen van kant  $e_m$ , omdat  $e_m$  een brug is en dus niet voor cykels zal zorgen.

Uit deze uitspraken volgt  $t_{ij} = t_{(i-1)j \setminus}$  en dus  $T_2(G; x, y) = \sum_{i,j} t_{(i-1)j \setminus} x^i y^j$ .

Daarnaast geldt  $T_1(G; x, y) = xT_1(G \setminus e_m; x, y)$ , en dus:

$$\begin{aligned}
T_2(G; x, y) &= \sum_{i,j} t_{(i-1)j} x^i y^j \\
&= \sum_{i,j} t_{ij} x^{i+1} y^j \\
&= x \sum_{i,j} t_{ij} x^i y^j \\
&= xT_2(G \setminus e_m; x, y) \\
&= xT_1(G \setminus e_m; x, y) = T_1(G; x, y).
\end{aligned}$$

- Geval 2:  $e_m$  is een lus.

Bekijk  $G/e_m$ . Deze graaf levert in dit geval dezelfde graaf op als  $G \setminus e_m$ , want verwijderen van kant  $e_m$  levert hetzelfde op als samenvoegen van de knopen die  $e_m$  met elkaar verbindt (een knoop met zichzelf samenvoegen levert de knoop zelf op) en dan de kant verwijderen.

Kant  $e_m$  draagt bij aan de externe activiteit van ieder opspannend bos van  $G$ , omdat  $C_{e_m} = \{e_m\}$  voor ieder opspannend bos.

Uit deze uitspraken en uit Lemma 1.10 volgt:  $t_{ij} = t_{i(j-1)}/$  en dus  $T_2(G; x, y) = \sum_{i,j} t_{i(j-1)}/x^i y^j$ . Daarnaast geldt  $T_1(G; x, y) = yT_1(G/e_m; x, y)$  en dus:

$$\begin{aligned}
T_2(G; x, y) &= \sum_{i,j} t_{i(j-1)}/x^i y^j \\
&= \sum_{i,j} t_{ij}/x^i y^{j+1} \\
&= y \sum_{i,j} t_{ij}/x^i y^j \\
&= yT_2(G/e_m; x, y) \\
&= yT_1(G/e_m; x, y) = T_1(G; x, y).
\end{aligned}$$

- Geval 3:  $e_m$  is een simpele kant.

Zij  $F$  een opspannend bos van  $G$ .

Als  $e_m \notin F$ , dan draagt  $e_m$  niet bij aan de externe activiteit van  $F$ , omdat  $e_m$  geen lus is en na toevoegen aan bos  $F$  een cykel vormt met één of meerdere  $e_i$ , met  $i < m$ .

Als  $e_m \in F$ , dan draagt  $e_m$  niet bij aan de interne activiteit van  $F$ , omdat  $e_m$  geen brug is en er dus een  $e_i$  bestaat met  $i < m$ , zodat  $(F \setminus e_m) \cup e_i$  een opspannend bos is.

Uit deze twee uitspraken, Lemma 1.3 en Lemma 1.4 volgt:  $t_{ij} = t_{ij} \setminus + t_{ij} /$  en dus  $T_2(G; x, y) = \sum_{i,j} t_{ij} \setminus x^i y^j + \sum_{i,j} t_{ij} / x^i y^j$ .

Daarnaast geldt  $T_1(G; x, y) = T_1(G \setminus e_m; x, y) + T_1(G/e_m; x, y)$ , en dus:

$$\begin{aligned} T_2(G; x, y) &= \sum_{i,j} t_{ij} \setminus x^i y^j + \sum_{i,j} t_{ij} / x^i y^j \\ &= T_2(G \setminus e_m; x, y) + T_2(G/e_m; x, y) \\ &= T_1(G \setminus e_m; x, y) + T_1(G/e_m; x, y) = T_1(G; x, y). \end{aligned}$$

Nu zal de uitspraak  $T_1(G; x, y) = T_3(G; x, y)$  bewezen worden.

Definieer  $T'_3(G; x, y) = \sum_{A \subseteq E} x^{\kappa(A) - \kappa(E)} y^{|A| - |V| + \kappa(A)}$ .

Als  $E = \emptyset$ , dan is  $A$  met  $A = E$  de enige deelverzameling van  $E$  en dus  $r(A) = r(E)$  en  $n(A) = |A| - |V| + \kappa(A) = 0 - |V| + \kappa(A) = 0$  en dus  $T'_3(G; x, y) = 1$ .

Verder geldt:

$$\begin{aligned} T'_3(G; x, y) &= \sum_{A \subseteq E} x^{\kappa(A) - \kappa(E)} y^{|A| - |V| + \kappa(A)} \\ &= \sum_{A \subseteq E, e \notin A} x^{\kappa(A) - \kappa(E)} y^{|A| - |V| + \kappa(A)} + \sum_{A \subseteq E, e \in A} x^{\kappa(A) - \kappa(E)} y^{|A| - |V| + \kappa(A)} \\ &= \sum_{A \subseteq E \setminus e} x^{\kappa(A) - \kappa(E)} y^{|A| - |V| + \kappa(A)} + \sum_{A \subseteq E \setminus e} x^{\kappa(A \cup e) - \kappa(E)} y^{|A \cup e| - |V| + \kappa(A \cup e)} \end{aligned}$$

Voor het gemak noteren we

$$\begin{aligned} T'_{3,0}(G; x, y) &= \sum_{A \subseteq E \setminus e} x^{\kappa(A) - \kappa(E)} y^{|A| - |V| + \kappa(A)} \\ T'_{3,1}(G; x, y) &= \sum_{A \subseteq E \setminus e} x^{\kappa(A \cup e) - \kappa(E)} y^{|A \cup e| - |V| + \kappa(A \cup e)}. \end{aligned}$$

Dan:

$$T'_{3,0}(G; x, y) = \begin{cases} \sum_{A \subseteq E \setminus e} x^{\kappa(A) - \kappa(E \setminus e) + 1} y^{|A| - |V| + \kappa(A)} & \text{als } e \text{ een brug is,} \\ \sum_{A \subseteq E \setminus e} x^{\kappa(A) - \kappa(E \setminus e)} y^{|A| - |V| + \kappa(A)} & \text{anders.} \end{cases}$$

Immers, als  $e$  een brug is, dan geldt  $\kappa(E) = \kappa(E \setminus e) - 1$  en als  $e$  een lus of een simpele kant is, dan geldt  $\kappa(E) = \kappa(E \setminus e)$ . Kortom:

$$\begin{aligned} T'_{3,0}(G; x, y) &= \begin{cases} x \sum_{A \subseteq E \setminus e} x^{\kappa(A) - \kappa(E \setminus e)} y^{|A| - |V| + \kappa(A)} & \text{als } e \text{ een brug is,} \\ \sum_{A \subseteq E \setminus e} x^{\kappa(A) - \kappa(E \setminus e)} y^{|A| - |V| + \kappa(A)} & \text{anders;} \end{cases} \\ &= \begin{cases} x T'_3(G \setminus e; x, y) & \text{als } e \text{ een brug is,} \\ T'_3(G \setminus e; x, y) & \text{anders.} \end{cases} \end{aligned}$$

Voor de andere term geldt:

$$T'_{3,1}(G; x, y) = \begin{cases} \sum_{A \subseteq E/e} x^{\kappa(A) - \kappa(E/e)} y^{|A| + 1 - |V| + \kappa(A)} & \text{als } e \text{ een lus is,} \\ \sum_{A \subseteq E/e} x^{\kappa(A) - \kappa(E/e)} y^{|A| - |V| + \kappa(A)} & \text{anders.} \end{cases}$$



Immers, als  $e$  een lus is en  $A \subseteq E/e$ , dan geldt  $E \setminus e = E/e$  en  $|A \cup e| = |A| + 1$ . Daarnaast, als  $e$  een brug of simpele kant is, geldt  $\kappa(A \cup e) = \kappa(A)$ ,  $|A \cup e| = |A| + 1$  en  $|V_{E/e}| = |V| - 1$ . Kortom:

$$T'_{3,1}(G; x, y) = \begin{cases} y \sum_{A \subseteq E/e} x^{\kappa(A) - \kappa(E/e)} y^{|A| - |V| + \kappa(A)} & \text{als } e \text{ een lus is,} \\ \sum_{A \subseteq E/e} x^{\kappa(A) - \kappa(E/e)} y^{|A| - |V| + \kappa(A)} & \text{anders;} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} yT'_3(G/e; x, y) & \text{als } e \text{ een brug is,} \\ T'_3(G/e; x, y) & \text{anders.} \end{cases}$$

Samengevat levert dit het volgende op:

$$T'_3(G; x, y) = \begin{cases} xT'_3(G \setminus e; x, y) + T'_3(G/e; x, y) & \text{als } e \text{ een brug is,} \\ yT'_3(G/e; x, y) + T'_3(G \setminus e; x, y) & \text{als } e \text{ een lus is,} \\ T'_3(G \setminus e; x, y) + T'_3(G/e; x, y) & \text{als } e \text{ een simpele kant is,} \\ 1 & \text{als } E = \emptyset. \end{cases}$$

Voor een lus  $e$  geldt dat  $T'_3(G \setminus e; x, y) = T'_3(G/e; x, y)$ . Als  $e$  een brug is, dan:

$$r(E \setminus e) = |V_{E \setminus e}| - \kappa(E \setminus e) = |V| - (\kappa(E) + 1) = |V| - \kappa(E) - 1,$$

$$r(E/e) = |V_{E/e}| - \kappa(E/e) = (|V| - 1) - \kappa(E) = |V| - \kappa(E) - 1.$$

Daarnaast geldt voor  $A_\setminus \subseteq E \setminus e$  en  $A_/ \subseteq E/e$  en  $e$  een brug:

$$\begin{aligned} r(A_\setminus) &= |V_{E \setminus e}| - \kappa(A_\setminus) \\ &= |V| - (\kappa(A \cup e) + 1) \\ &= |V| - \kappa(A \cup e) - 1, \\ r(A_/) &= |V_{E/e}| - \kappa(A_/) \\ &= (|V| - 1) - \kappa(A \cup e) \\ &= |V| - \kappa(A \cup e) - 1, \\ n(A_\setminus) &= |A_\setminus| - |V_{E \setminus e}| + \kappa(A_\setminus) \\ &= (|A \cup e| - 1) - (|V|) + (\kappa(A \cup e) + 1) \\ &= |A \cup e| - |V| + \kappa(A \cup e), \\ n(A_/) &= |A_/| - |V_{E/e}| + \kappa(A_/) \\ &= (|A \cup e| - 1) - (|V| - 1) + (\kappa(A \cup e)) \\ &= |A \cup e| - |V| + \kappa(A \cup e). \end{aligned}$$

Oftewel:

$$T'_3(G \setminus e; x, y) = \sum_{A \subseteq E \setminus e} x^{r(E \setminus e) - r(A)} y^{n(A)} = \sum_{A \subseteq E/e} x^{r(E/e) - r(A)} y^{n(A)} = T'_3(G/e; x, y).$$

En dus:

$$T'_3(G; x, y) = \begin{cases} (x+1)T'_3(G \setminus e; x, y) & \text{als } e \text{ een brug is,} \\ (y+1)T'_3(G/e; x, y) & \text{als } e \text{ een lus is,} \\ T'_3(G \setminus e; x, y) + T'_3(G/e; x, y) & \text{als } e \text{ een simpele kant is,} \\ 1 & \text{als } E = \emptyset. \end{cases}$$

Zo zien we inderdaad dat

$$T_3(G; x, y) = \begin{cases} xT_3(G \setminus e; x, y) & \text{als } e \text{ een brug is,} \\ yT_3(G/e; x, y) & \text{als } e \text{ een lus is,} \\ T_3(G \setminus e; x, y) + T_3(G/e; x, y) & \text{als } e \text{ een simpele kant is,} \\ 1 & \text{als } E = \emptyset. \end{cases}$$

Dus geldt ook  $T_1(G; x, y) = T_3(G; x, y)$ . □

## 2 Universaliteit

De reden waarom het Tuttepolynoom interessant is, is omdat het over een universele eigenschap beschikt. Deze houdt in, dat ieder polynoom van een graaf die verkregen kan worden door een verwijdering-fusiealgoritme uiteindelijk afgeleid kan worden uit het Tuttepolynoom, en omgekeerd.

Dit hoofdstuk zal gaan over deze bijzondere eigenschap.

### 2.1 Universele eigenschap

**Definitie.** Met  $\mathcal{G}$  geven we de verzameling aan van alle eindige grafen, oftewel:  $|V| \in \mathbb{N}$  en  $|E| \in \mathbb{N}$  voor alle  $G = (V, E) \in \mathcal{G}$ .

**Stelling 2.1.** Er is een unieke afbeelding  $U : \mathcal{G} \rightarrow R[x, y, \alpha, \beta, \gamma]$  zodanig dat

$$U(G) = \begin{cases} xU(G \setminus e) & \text{als } e \text{ een brug is} \\ yU(G/e) & \text{als } e \text{ een lus is,} \\ \beta U(G \setminus e) + \gamma U(G/e) & \text{als } e \text{ een simpele kant is} \\ \alpha^n & \text{als } E = \emptyset. \end{cases} \quad (1)$$

Daarnaast geldt:

$$U(G) = \alpha^{\kappa(E)} \beta^{n(E)} \gamma^{r(E)} T(G; \frac{\alpha x}{\gamma}, \frac{y}{\beta}). \quad (2)$$

*Bewijs.* We bekijken eerst de afbeelding gedefinieerd zoals bij (1). Duidelijk is dat  $U(G)$  een polynoom oplevert, omdat de afbeelding gedefinieerd wordt volgens een verwijdering-fusiealgoritme op de graaf.

Zij  $e \in E$ . Omdat de afbeelding  $U(G)$  in dit geval wordt vastgelegd door  $U(G \setminus e)$  en  $U(G/e)$ , is de afbeelding voor grafen met een niet-lege kantenverzameling uniek bepaald. Wanneer  $E = \emptyset$ , is de uniciteit volgens (1) duidelijk.

Wat rest is om aan te tonen dat ook (2) een polynoom oplevert en wel hetzelfde als bij (1).

Om aan te tonen dat (2) een polynoom oplevert, kijken we (met behulp van Definitie 1.6) eerst naar de graad van het Tuttepolynoom:

$$\deg_x T(G; x, y) = \max\{r(E) - r(A) \mid A \subseteq E\} = r(E)$$

$$\deg_y T(G; x, y) = \max\{n(A) \mid A \subseteq E\} = n(E)$$

Deze zijn beide eindig en dus levert ook (2) een polynoom op.

Wat we nu nog moeten aantonen, is dat (1) en (2) dezelfde polynomen opleveren.

- Geval 1:  $E = \emptyset$ .

In dit geval  $|E| = 0$  en zeg  $|V| = n$ . Dan:  $\kappa(E) = n$ ,  $n(E) = |V| - \kappa(E) = 0$  en  $r(E) = |E| - |V| + \kappa(E) = 0$ .

$$\begin{aligned} U(G) &= \alpha^n \beta^0 \gamma^0 T(G; \frac{\alpha x}{\gamma}, \frac{y}{\beta}) \\ &= \alpha^n \end{aligned}$$

- Geval 2:  $e \in E$  is een brug.

Dan:  $\kappa(E) = \kappa(E \setminus e) - 1$ ,  $n(E) = n(E \setminus e)$  en  $r(E) = r(E \setminus e) + 1$ . Oftewel:

$$\begin{aligned}
U(G) &= \alpha^{\kappa(E)} \beta^{n(E)} \gamma^{r(E)} T(G; \frac{\alpha x}{\gamma}, \frac{y}{\beta}) \\
&= \alpha^{\kappa(E \setminus e) - 1} \beta^{n(E \setminus e)} \gamma^{r(E \setminus e) + 1} \frac{\alpha x}{\gamma} T(G \setminus e; \frac{\alpha x}{\gamma}, \frac{y}{\beta}) \\
&= x \alpha^{\kappa(E \setminus e)} \beta^{n(E \setminus e)} \gamma^{r(E \setminus e)} T(G \setminus e; \frac{\alpha x}{\gamma}, \frac{y}{\beta}) \\
&= x U(G \setminus e)
\end{aligned}$$

- Geval 3:  $e \in E$  is een lus.

Dan:  $\kappa(E) = \kappa(E/e)$ ,  $n(E) = n(E/e) + 1$  en  $r(E) = r(E/e)$ . Oftewel:

$$\begin{aligned}
U(G) &= \alpha^{\kappa(E)} \beta^{n(E)} \gamma^{r(E)} T(G; \frac{\alpha x}{\gamma}, \frac{y}{\beta}) \\
&= \alpha^{\kappa(E/e)} \beta^{n(E/e) + 1} \gamma^{r(E/e)} \frac{y}{\beta} T(G/e; \frac{\alpha x}{\gamma}, \frac{y}{\beta}) \\
&= y \alpha^{\kappa(E/e)} \beta^{n(E/e)} \gamma^{r(E/e)} T(G/e; \frac{\alpha x}{\gamma}, \frac{y}{\beta}) \\
&= y U(G/e)
\end{aligned}$$

- Geval 4:  $e \in E$  is simpel.

Dan:  $\kappa(E) = \kappa(E \setminus e)$ ,  $\kappa(E) = \kappa(E/e)$ ,  $n(E) = n(E \setminus e) + 1$ ,  $n(E) = n(E/e)$ ,  $r(E) = r(E \setminus e)$  en  $r(E) = r(E/e) + 1$ . Oftewel:

$$\begin{aligned}
U(G) &= \alpha^{\kappa(E)} \beta^{n(E)} \gamma^{r(E)} T(G; \frac{\alpha x}{\gamma}, \frac{y}{\beta}) \\
&= \alpha^{\kappa(E \setminus e)} \beta^{n(E \setminus e) + 1} \gamma^{r(E \setminus e)} T(G \setminus e; \frac{\alpha x}{\gamma}, \frac{y}{\beta}) \\
&\quad + \alpha^{\kappa(E/e)} \beta^{n(E/e)} \gamma^{r(E/e) + 1} T(G/e; \frac{\alpha x}{\gamma}, \frac{y}{\beta}) \\
&= \beta U(G \setminus e) + \gamma U(G/e).
\end{aligned}$$

□

## 2.2 Complexiteit

We hebben gezien dat het Tuttepolynoom op verschillende manieren berekend kan worden. Tevens zagen we dat het polynoom over de universele eigenschap beschikt. In deze paragraaf werpen we een blik op de tijd die het kost om het polynoom aan de hand van de verschillende definities uit te rekenen.

**Stelling 2.2** (Cayley). *Zij  $G = (V, E)$  een volledige graaf met  $|V| = n$ . Het aantal opspannende bomen van deze graaf is  $n^{n-2}$*

*Bewijs.* Voor het bewijs van deze stelling wil ik verwijzen naar het werk van Martin Aigner en Günter M. Ziegler.  $\square$

**Definitie.** *Bij het berekenen van  $T(G; x, y)$  voor graaf  $G$  verstaan we onder een stap:*

- *het selecteren van een kant uit graaf  $G$  of uit een graaf verkregen door één of meerdere keren verwijdering en/of fusie op  $G$  toe te passen, bepalen of deze kant een brug, lus of simpele kant is en vervolgens verwijdering en/of fusie op de graaf toe te passen (**verwijdering-fusiealgoritme**),*
- *het bepalen of een kant intern actief, extern actief of geen van beide is met betrekking tot een opspannend bos van  $G$  (**opspannende bossen**),*
- *het bepalen van  $\kappa(A) - \kappa(E)$  en  $|A| - |V| + \kappa(A)$  voor een deelgraaf  $A$  van  $G$  (**rang en nullity**).*

*Wanneer  $|E| = \emptyset$ , geldt voor alle drie de definities dat er geen stap nodig is, want het polynoom is dan triviaal.*

In het gevolg dat nu komt, kijken we slechts naar simpele grafen. Dit om de omvang van de vraag naar de berekeningstijd te reduceren. Desondanks geeft het een goede vergelijking tussen de berekeningstijden van de drie verschillende definities.

**Gevolg 2.3.** *Zij  $G = (V, E)$  een simpele graaf met  $|V| = n$  en  $|E| = m$ . Om  $T(G; x, y)$  te berekenen voor  $G$  zijn er*

- *minstens  $m$  stappen nodig en hoogstens  $2^m - 1$  stappen nodig (**verwijdering-fusiealgoritme**),*
- *minstens  $m$  stappen nodig en hoogstens  $n^{n-2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}$  stappen nodig (**opspannende bossen**),*
- *$2^m$  stappen nodig (**rang en nullity**).*

*Bewijs.* We bewijzen de uitspraken per definitie van het polynoom.

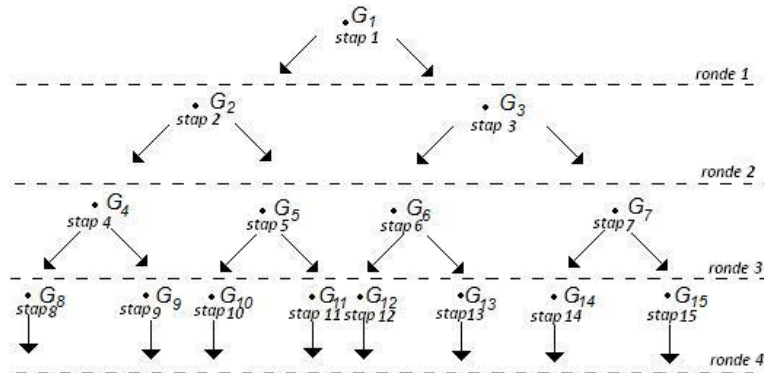
- **Verwijdering-fusiealgoritme:** In het simpelste geval bevat  $G$  alleen bruggen, want in dat geval volgt uit alle stappen slechts één graaf ontstaan door verwijdering toegepast op de graaf uit die stappen. Dit in tegenstelling

tot de twee grafen die ontstaan wanneer een kant simpel zou zijn. Er zijn  $m$  kanten, die moeten allen geselecteerd worden, dus er zijn minstens  $m$  stappen nodig.

In het ergste geval treedt bij iedere stap een splitsing van de graaf op in twee nieuwe grafen (wanneer de kant in die stap simpel is). Na iedere stap heeft de ontstane graaf na bewerking op de oorspronkelijke graaf van die stap één kant minder. We kunnen nu rondes definiëren, waarbij een ronde alle stappen bevat op grafen met hetzelfde aantal kanten.

In de laatste ronde (dus wanneer we kijken naar grafen die nog maar één kant over hebben) vindt tijdens iedere stap slechts één bewerking op de graaf plaats, omdat deze ene kant een brug of lus moet zijn.

Wanneer in iedere ronde bij elke stap splitsing optreedt, behalve bij de laatste ronde, zijn er dus  $\sum_{i=0}^{m-1} 2^i = 2^m - 1$  stappen nodig. Ter verduidelijking hiervan een schets, waarbij  $G = (V, E)$  met  $|E| = 4$  en  $G_1 = G$ :



Er zijn inderdaad hoogstens  $2^4 - 1 = 15$  stappen nodig.

- **Opspannende bossen:** In het simpelste geval bevat  $G$  alleen bruggen, want dan is er slechts één opspannend bos (namelijk: de deelgraaf van  $G$  die bestaat uit alle bruggen van  $G$ ). Een stap bestaat uit het bepalen of een kant intern actief, extern actief of geen van beide is met betrekking tot dit opspannende bos. We moeten dit voor alle  $m$  kanten doen. Dus er zijn minstens  $m$  stappen nodig.

In het ergste geval is graaf  $G$  een volledige graaf met  $|V| = n$  (er zijn dan meer opspannende bossen dan wanneer de graaf op  $n$  knopen niet volledig is). In dit geval geldt  $|E| = \frac{n(n-1)}{2}$  en zijn er  $n^{n-2}$  opspannende bossen. Er zijn dus hoogstens  $\frac{n(n-1)}{2} \cdot n^{n-2}$  stappen nodig.

- **Rang en nullity:** Graaf  $G$  heeft  $2^m$  deelgrafen. Een stap bestaat uit het bepalen van  $\kappa(A) - \kappa(E)$  en  $|A| - |V| + \kappa(A)$  voor alle deelgrafen  $A$  van  $G$  en is dus slechts afhankelijk van het aantal kanten van de graaf.

□

Opmerking: Wanneer  $G$  een volledige graaf is, hebben we met het berekenen door middel van opspannende bossen precies  $\frac{n(n-1)}{2} \cdot n^{n-2}$  stappen nodig. Opvallend is dat niet dat er precies  $2^{\frac{1}{2}n(n-1)}$  stappen nodig zijn wanneer we het polynoom berekenen met behulp van het verwijdering-fusiealgoritme (zie de illustratie hieronder). Dit komt doordat we kanten ‘slim’ kunnen kiezen, zodat het aantal stappen zo min mogelijk is. Voor meer informatie over het ‘slim’ kiezen van kanten wil ik verwijzen naar het werk van David J. Pearce en Gary Haggard.

## 3 Toepassingen

### 3.1 Chromatische polynoom

Eén van de onderwerpen waarbij we een toepassing van het Tuttepolynoom zien, is het onderwerp kleuringen. Deze paragraaf zal gaan over het kleuren van grafen en hoe we hierbij een toepassing van het Tuttepolynoom zien.

**Definitie.** Zij  $G = (V, E)$  een graaf en zij  $\lambda \in \mathbb{N}$ . Een nette knopenkleuring (of simpelweg: een kleuring) van graaf  $G$  met  $\lambda$  kleuren, is een kleuring van iedere knoop  $v \in V$ , zodanig dat  $k(v_i) \neq k(v_j)$  voor alle  $(v_i, v_j) \in E$  en met  $k(v) \in \{1, 2, \dots, \lambda\}$  voor alle  $v \in V$ .

Hierbij bedoelen we met  $k(v)$  de kleur van knoop  $v$ .

**Definitie 3.1.** Zij  $G = (V, E)$  en zij  $\lambda \in \mathbb{N}$ . Met  $\chi(G; \lambda)$  geven we aan hoeveel kleuringen van graaf  $G$  er zijn met  $\lambda$  kleuren.

Opmerking: duidelijk is dat  $\chi(G; \lambda) = 0$  als  $G$  één of meerdere lussen bevat.

**Stelling 3.2.** Zij  $G = (V, E)$  een graaf zonder lussen, zij  $|V| = n$  en zij  $\lambda \in \mathbb{N}$ . Dan geldt:

$$\chi(G; \lambda) = \sum_{A \subseteq E} (-1)^{|A|} \lambda^{\kappa(A)}.$$

*Bewijs.* Zij  $\mathcal{K}$  de verzameling van alle knopenkleuringen van  $G$  met  $\lambda$  kleuren. Dan  $|\mathcal{K}| = \lambda^n$ , want voor alle  $n$  knopen zijn er  $\lambda$  kleuren.

Zij  $K_{ij} \subseteq \mathcal{K}$  de verzameling van  $\lambda$ -kleuringen zodat knopen  $v_i$  en  $v_j$  dezelfde kleur krijgen. Dan:

$$\begin{aligned} \chi(G; \lambda) &= \left| \bigcap_{(v_i, v_j) \in E} \overline{K_{ij}} \right| \\ &= |\mathcal{K} - \bigcup_{(v_i, v_j) \in E} K_{ij}| \\ &= |\mathcal{K}| - \sum_{(v_i, v_j) \in E} |K_{ij}| \\ &\quad + \sum_{\substack{(v_i, v_j), (v_k, v_l) \in E \\ (v_i, v_j) \neq (v_k, v_l)}} |K_{ij} \cap K_{kl}| - \dots + (-1)^{|E|} \left| \bigcap_{(v_i, v_j) \in E} K_{ij} \right| \\ &= \sum_{A \subseteq E} (-1)^{|A|} \lambda^{\kappa(A)}. \end{aligned}$$

De eerste equivalentie volgt uit het feit dat we voor het aantal kleuringen kijken naar verbonden knopen die juist niet dezelfde kleur hebben. Daarom nemen we de vereniging van de complementen.

Bij de tweede equivalentie maken we gebruik van de wetten van De Morgan en bij de derde van het principe van inclusie-exclusie.



Tenslotte volgt de laatste equivalentie uit het feit dat we de som over kanten kunnen zien als de som over een deelgraaf  $A$  van  $E$ . Het teken van de som wordt vervolgens bepaald door het aantal kanten van  $A$ , oftewel  $|A|$ . Vervolgens volgt  $\lambda^{\kappa(A)}$  uit het feit dat de kanten uit ieder samenhangscomponent dezelfde kleur moeten hebben.  $\square$

Aan de hand van deze stelling zien we dat het getal  $\chi(G; \lambda)$  uitgedrukt kan worden als polynoom in  $\lambda$ . Vanaf nu zullen we dan ook spreken van het chromatisch polynoom  $\chi(G; \lambda)$ , dat het aantal kleuringen van  $G$  met  $\lambda$  kleuren uitrekenet. Zoals vermeld in de introductie van dit hoofdstuk, zal het Tuttepolynoom in verband worden gebracht met het kleuren van een graaf en wel aan de hand van de volgende stelling:

**Stelling 3.3.**  $\chi(G; \lambda) = (-1)^{r(E)} \lambda^{\kappa(E)} T(G; 1 - \lambda, 0)$ .

*Bewijs.*

$$\begin{aligned}
(-1)^{r(E)} \lambda^{\kappa(E)} T(G; 1 - \lambda, 0) (-1)^{n(A)} &= \\
&= (-1)^{r(E)} \lambda^{\kappa(E)} \sum_{A \subseteq E} (-\lambda)^{r(E) - r(A)} \\
&= (-1)^{r(E)} \lambda^{\kappa(E)} \sum_{A \subseteq E} (-1)^{r(E) - r(A)} \lambda^{r(E) - r(A)} (-1)^{|A| - r(A)} \\
&= (-1)^{r(E)} \lambda^{\kappa(E)} \sum_{A \subseteq E} (-1)^{r(E) - r(A)} \lambda^{\kappa(A) - \kappa(E)} (-1)^{|A| - r(A)} \\
&= (-1)^{r(E)} \sum_{A \subseteq E} (-1)^{r(E) - r(A)} \lambda^{\kappa(A)} (-1)^{|A| - r(A)} \\
&= \sum_{A \subseteq E} (-1)^{r(E) - r(A)} (-1)^{r(E) - r(A)} (-1)^{|A|} \lambda^{\kappa(A)} \\
&= \sum_{A \subseteq E} (-1)^{|A|} \lambda^{\kappa(A)} = \chi(G; \lambda).
\end{aligned}$$

$\square$

**Gevolg 3.4.** *Het chromatische polynoom kan gegeven worden aan de hand van een verwijdering-fusiealgoritme:*

$$\chi(G; \lambda) = \begin{cases} (1 - \frac{1}{\lambda}) \chi(G \setminus e; \lambda) & \text{als } e \text{ een brug is} \\ 0 & \text{als } e \text{ een lus is,} \\ \chi(G \setminus e; \lambda) - \chi(G/e; \lambda) & \text{als } e \text{ een simpele kant is} \\ \lambda^n & \text{als } E = \emptyset. \end{cases}$$

*Bewijs.* Dit volgt uit Stelling 2.1, met

$$x = 1 - \frac{1}{\lambda}$$

$$y = 0$$

$$\alpha = \lambda$$

$$\beta = 1$$

$$\gamma - 1 = .$$

□

### 3.2 Betrouwbaarheidspolynoom

In deze paragraaf wordt het betrouwbaarheidspolynoom besproken. Dit is wederom een polynoom, waarbij we een toepassing van het Tuttepolynoom zien.

**Definitie 3.5.** *Zij  $G = (V, E)$  een graaf. Stel dat van alle kanten van deze graaf willekeurig wordt bepaald of ze worden verwijderd of behouden blijven, met voor iedere kant een kans  $0 \leq p \leq 1$  om behouden te blijven. Met  $R(G; p)$  geven we aan hoe groot de kans is dat geen van de samenhangscomponenten van  $G$  als gevolg van het verwijderen van kanten onsamenvast wordt. Notatie:*

$$R(G; p) = \sum_{\substack{A \subseteq E \\ \kappa(A) = \kappa(E)}} p^{|A|} (1-p)^{|E-A|}.$$

**Stelling 3.6.** *Zij  $G = (V, E)$  een samenhangende graaf met  $|V| = n$  en  $|E| = m$ . Dan:*

$$R(G; p) = p^{n-1} (1-p)^{m-(n-1)} T(G; 1, \frac{1}{1-p}).$$

*Bewijs.* Voor de deelgrafen  $A$  waarover wordt gesommeerd in de definitie van  $R(G; p)$  geldt  $\kappa(A) = \kappa(E) = 1$  en daarom:  $|A| \geq n - 1$ . Aan de hand hiervan geldt:

$$\begin{aligned} R(G; p) &= \sum_{\substack{A \subseteq E \\ \kappa(A) = \kappa(E)}} p^{|A|} (1-p)^{|E-A|} \\ &= \sum_{k=0}^{m-n+1} g_k p^{k+n-1} (1-p)^{m-k-n+1}, \end{aligned}$$

waarbij  $g_k$  het aantal samenhangende deelgrafen van  $G$  met  $k + n - 1$  kanten is. Dat de som gaat van  $k = 0$  tot en met  $k = m - n + 1$  is daarom duidelijk: een samenhangende, opspannende deelgraaf moet minstens  $0 + n - 1 = n - 1$  kanten hebben en kan hoogstens  $(m - n + 1) + n - 1 = m$  kanten hebben. Bekijken we nu  $T(G; 1, \frac{1}{1-p})$ : omdat hier  $x = 1$ , is het bij dit polynoom alleen interessant om naar deelgrafen te kijken met  $\kappa(A) = 1$ , omdat dan  $r(A) = r(E)$ .

$$\begin{aligned} T(G; 1, \frac{1}{1-p}) &= \sum_{\substack{A \subseteq E \\ \kappa(A) = \kappa(E)}} (1 - \frac{1}{1-p})^{|A| - |V| + \kappa(A)} \\ &= \sum_{\substack{A \subseteq E \\ \kappa(A) = \kappa(E)}} (1 - \frac{1}{1-p})^{|A| - n + 1} \\ &= \sum_{k=0}^{m-n+1} g_k (1 - \frac{1}{1-p})^k. \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned}
R(G; p) &= \sum_{k=0}^{m-n+1} g_k p^{k+n-1} (1-p)^{m-k-n+1} \\
&= p^{n-1} (1-p)^{m-(n-1)} \sum_{k=0}^{m-n+1} g_k p^k (1-p)^{-k} \\
&= p^{n-1} (1-p)^{m-(n-1)} \sum_{k=0}^{m-n+1} g_k \left(\frac{p}{1-p}\right)^k \\
&= p^{n-1} (1-p)^{m-(n-1)} T(G; 1, 1 + \frac{p}{1-p}) \\
&= p^{n-1} (1-p)^{m-(n-1)} T(G; 1, \frac{1}{1-p}).
\end{aligned}$$

□

**Gevolg 3.7.** *Het betrouwbaarheidspolynoom kan gegeven worden aan de hand van een verwijdering-fusiealgoritme:*

$$R(G; p) = \begin{cases} pR(G \setminus e; p) & \text{als } e \text{ een brug is} \\ R(G/e; p) & \text{als } e \text{ een lus is,} \\ (1-p)R(G \setminus e; p) + pR(G/e; p) & \text{als } e \text{ een simpele kant is} \\ 1 & \text{als } E = \emptyset. \end{cases}$$

*Bewijs.* Dit volgt uit Stelling 2.1, met

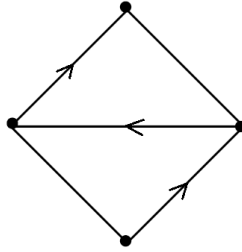
$$\begin{aligned}
x &= p \\
y &= 1 \\
\alpha &= 1 \\
\beta &= 1 - p \\
\gamma &= p.
\end{aligned}$$

□

### 3.3 Flow-polynoom

Ook het flow-polynoom is een toepassing van het Tuttepolynoom. In deze paragraaf zullen we dan ook stil staan bij dit polynoom.

**Definitie.** Zij  $G = (V, E)$  een graaf. Deze graaf heet gericht, als voor elke kant  $e \in E$  een richting is aangegeven waarin deze kant doorlopen mag worden.



**Voorbeeld 3.8.**

Deze graaf is gericht, omdat voor alle kanten is aangegeven in welke richting de kant doorlopen mag worden. Voor drie van deze kanten is dit slechts één richting, de andere twee kanten mogen in beide richtingen doorlopen worden.

**Definitie.** Zij  $G = (V, E)$  een gerichte graaf en zij  $H$  een Abelse groep met een nul- en eenheidselement.

De functie  $f : E \rightarrow H$  is een  $H$ -flow, als voor alle  $v \in V$  geldt:

$$\sum_{e \in \delta^+(v)} f(e) = \sum_{e \in \delta^-(v)} f(e).$$

Met  $\delta^+(v)$  bedoelen we de kanten die vanuit knoop  $v$  vertrekken en met  $\delta^-(v)$  bedoelen we de knopen die naar  $v$  toe gaan.

Als  $H = \mathbb{Z}$ ,  $\lambda \in \mathbb{Z}$  en voor alle  $e \in E$  geldt:  $f(e) \neq 0$  en  $|f(e)| < \lambda$ , dan heet  $f$  een niet-nul  $\lambda$ -flow.

**Definitie 3.9.** Zij  $G = (V, E)$  een gerichte graaf en zij  $\lambda \in \mathbb{Z}$ . Met  $F(G; \lambda)$  geven we aan hoeveel niet-nul  $\lambda$ -flows graaf  $G$  heeft. Notatie:

$$F(G; \lambda) = (-1)^{|E|} \sum_{A \subseteq E} (-1)^{|A|} \lambda^{n(A)}.$$

**Stelling 3.10.** Zij  $G = (V, E)$  een gerichte graaf en zij  $\lambda \in \mathbb{Z}$ . Dan:

$$F(G; \lambda) = (-1)^{n(E)} T(G; 0, 1 - \lambda).$$

*Bewijs.*

$$\begin{aligned}
(-1)^{n(E)}T(G; 0, 1 - \lambda) &= (-1)^{n(E)} \sum_{A \subseteq E} (-1)^{\kappa(A) - \kappa(E)} (-\lambda)^{|A| - |V| + \kappa(A)} \\
&= (-1)^{|E| - |V| + \kappa(E)} \sum_{A \subseteq E} (-1)^{\kappa(A) - \kappa(E)} (-1)^{|A| - |V| + \kappa(A)} \lambda^{n(A)} \\
&= (-1)^{|E|} \sum_{A \subseteq E} (-1)^{-|V|} (-1)^{|V|} (-1)^{\kappa(A)} (-1)^{\kappa(A)} (-1)^{|A|} \lambda^{n(A)} \\
&= (-1)^{|E|} \sum_{A \subseteq E} (-1)^{|A|} \lambda^{n(A)}.
\end{aligned}$$

□

**Gevolg 3.11.** *Het flow-polynoom kan gegeven worden aan de hand van een verwijdering-fusiealgoritme:*

$$F(G; \lambda) = \begin{cases} 0 & \text{als } e \text{ een brug is} \\ (\lambda - 1)F(G/e; \lambda) & \text{als } e \text{ een lus is,} \\ F(G/e; \lambda) - F(G \setminus e; \lambda) & \text{als } e \text{ een simpele kant is} \\ 1 & \text{als } E = \emptyset. \end{cases}$$

*Bewijs.* Dit volgt uit Stelling 2.1, met

$$\begin{aligned}
x &= 0 \\
y &= \lambda - 1 \\
\alpha &= 1 \\
\beta &= -1 \\
\gamma &= 1.
\end{aligned}$$

□

## Literatuurlijst

- [1] Aigner, M. en Ziegler, G.M. (2010) *Proofs from THE BOOK*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verslag
- [2] Biggs, N. (1974) *Algebraic Graph Theory*. Cambridge: Cambridge University Press
- [3] Bollobas, B. (1998) *Modern Graph Theory, Graduate Texts in Mathematics*. New York: Spinger
- [4] Ellis-Monaghan, J.A. en Merino, C. (2008) *Graph Polynomials and Their Applications I: The Tutte Polynomial*. <http://arxiv.org/abs/0803.3079>,2013
- [5] Pearce, D.J. en Haggard, G en Royle, G. (2009) *Edge-Selection Heuristics for Computing Tutte Polynomials*. <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=1862793>,2013
- [6] Shahmohamad, H. (2002) *A survey on Flow Polynomial*. <https://ritdml.rit.edu/handle/1850/4728>,2013
- [7] Welsh, D.J.A. (1993) *Complexity: Knots, Colourings and Counting*. Cambridge: Cambridge University Press