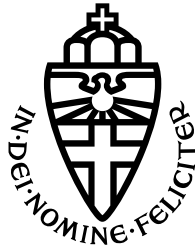


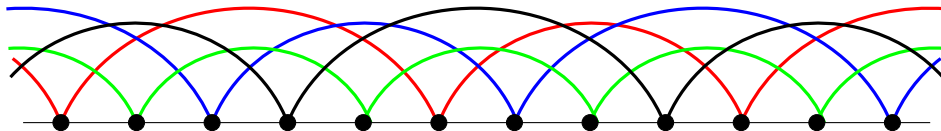
RADBOUD UNIVERSITEIT NIJMEGEN



FACULTEIT DER NATUURWETENSCHAPPEN, WISKUNDE EN INFORMATICA

De wiskunde achter Jongleren

BACHELORSRIPTIE WISKUNDE



Auteur:
Fieke HUIZENGA

Begeleider:
dr. Bernd SOUVIGNIER

Tweede lezer:
dr. Wieb BOSMA

29 maart 2022

Inhoudsopgave

1	Inleiding	2
2	Jongleerpatronen	3
2.1	Aannames en voorbeelden	3
2.2	Wat is een jongleerpatroon?	5
3	Welke patronen zijn mogelijk?	9
3.1	Site swaps	9
3.2	Hoeveel ballen zijn er nodig?	12
3.3	Permutaties van kandidaatrijen	14
4	Aantal patronen	22
4.1	Minimale jongleerpatronen	22
4.2	Patronen met b ballen en periode n	26
5	Kleurperiode	28
5.1	Kleurperiode	28
5.2	Aantal patronen met minimale kleurperiode k	30
6	Toestandsgrafien	34
6.1	Jongleertoestanden	34
6.2	Grond- en aangeslagen patronen	37
6.3	Paden tussen toestanden	38
6.4	Kralenkettingen	41
6.5	De complementaire graaf van een toestandsgraaf	45
7	Discussie	49

1 Inleiding

"Mathematics is the study of patterns. Juggling is the art of controlling patterns."

Ron Graham

Deze scriptie gaat over de wiskunde achter jongleren. Op het eerste gezicht is het niet erg vanzelfsprekend dat die twee gebieden iets met elkaar te maken hebben, maar dit blijkt wel het geval. Wiskundigen en jongleurs vinden het allebei leuk om patronen te ontdekken. Bovendien blijkt een wiskundige notatie erg handig om over jongleerpatronen te communiceren. Als ik een nieuw patroon bedenk en iemand anders wil dat leren, dan is het nog best lastig om goed uit te leggen hoe het moet. Gewone woorden en zinnen zijn in dit geval vaak niet toereikend, omdat het nu eenmaal best lastig in woorden te vatten is welke bal op welk moment en op welke manier gegooid moet worden. Dit probleem is vergelijkbaar met muziek. Het is lastig om met woorden precies te beschrijven wat je hoort, maar met het notenschrift is dat wel mogelijk. Daarom gingen jongleurs op zoek naar een geschikte notatie - een wiskundige notatie.

In deze scriptie zal ik gaan onderzoeken op welke manieren jongleren op een wiskundige manier beschreven kan worden. Vervolgens kunnen we ons richten op een aantal praktische vragen. Onder andere de vraag hoeveel ballen er nodig zijn om een gegeven patroon te jongleren, en hoeveel verschillende patronen er eigenlijk bestaan onder bepaalde voorwaarden. En de vraag wanneer twee patronen in elkaar kunnen overgaan - en of er patronen zijn waarbij dat niet kan. We zullen zien dat uit de antwoorden op deze vragen steeds weer nieuwe vragen volgen, die zowel voor wiskundigen als voor jongleurs leuk zijn om over na te denken.

2 Jongleerpatronen

Voordat we het kunnen gaan hebben over de wiskunde achter jongleren, moeten we eerst een manier vinden om jongleren op een wiskundige manier te beschrijven. In dit hoofdstuk maken we duidelijk welke aannames we hiervoor maken, geven we voorbeelden van patronen, en zullen we wiskundig definiëren wat we precies bedoelen met een 'jongleerpatroon'. Zie onder andere ook [13] en [6].

2.1 Aannames en voorbeelden

Een groot deel van de lol van jongleren zit natuurlijk in de vele verschillende manieren om een object te gooien (achter de rug om, onder een been door, etc.), en de variatie in de objecten zelf (kegels, fakkels, kettingzagen, etc.). Toch zullen we al deze dingen gaan negeren, en beperken we ons als het ware tot een soort 'ideale wereld'. Geen zorgen, ondanks de aannames die we maken blijft er wiskundig gezien - en ook voor jongleurs - nog genoeg interessants over. We maken de volgende aannames:

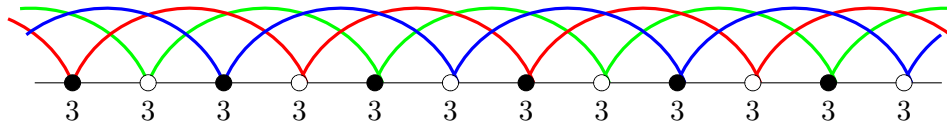
- Het is niet van belang welke objecten worden gegooid. Voor het gemak zullen we het in het vervolg hebben over 'ballen', maar dit had ook ieder ander object kunnen zijn.
- Er is een vast aantal ballen. Er komen geen ballen bij en er verdwijnen er ook geen.
- We doen alsof we altijd aan het jongleren zijn geweest en daar ook altijd mee doorgaan. De jongleerpatronen die we bekijken hebben geen begin- of eindpunt.
- Hoe de ballen worden gegooid (in het geval van kegels met of zonder draai, onder een been door, etc.) is niet van belang. We kijken alleen naar de tijd die een bal in de lucht is voor die weer wordt gevangen.
- We jongleren in een vast ritme. De tijdstippen die we bekijken zijn $t \in \mathbb{Z}$, waarbij we voor \mathbb{Z} een geschikte schaling kiezen. Het tijdsinterval tussen twee opeenvolgende worpen is dus altijd gelijk.
- Jongleerpatronen zijn periodiek. Eenzelfde patroon wordt steeds opnieuw herhaald.
- We negeren de tijd dat een bal wordt vastgehouden voordat die opnieuw wordt gegooid - de zogenaamde 'dwell time'. We gaan er dus

van uit dat het tijdstip waarop een bal wordt gevangen gelijk is aan het tijdstip waarop diezelfde bal weer wordt gegooid. Deze aanname doet niets af aan de toepasbaarheid van ons model in de praktijk. Rekening houden met de dwell time zou het model alleen maar nodeloos ingewikkeld maken.

- Op ieder tijdstip $t \in \mathbb{Z}$ wordt maximaal één bal gegooid. Let op: het kan dus ook zo zijn dat er op een zeker tijdstip géén bal wordt gegooid (een zogenaamde 0-worp, waarbij je hand leeg is). Uiteraard bestaan er ook veel patronen waarbij wél meerdere ballen tegelijk kunnen worden gegooid - dit heet *multiplex juggling* - maar daar zullen we ons in deze scriptie niet mee bezig houden.
- We negeren het aantal handen waarmee we jongleren. Omdat we steeds maar één bal tegelijkertijd gooien is het (in theorie) mogelijk om ieder patroon met één hand te jongleren.

Laten we - voor dat we alles abstract maken - even wat voorbeelden bekijken om een beetje gevoel te krijgen voor jongleerpatronen.

Voorbeeld 2.1 Het patroon met drie ballen waar veel mensen mee beginnen als ze leren jongleren, waarbij de ballen elkaar volgen in een 'acht-vorm', kunnen we als volgt weergeven in een tijdsdiagram:

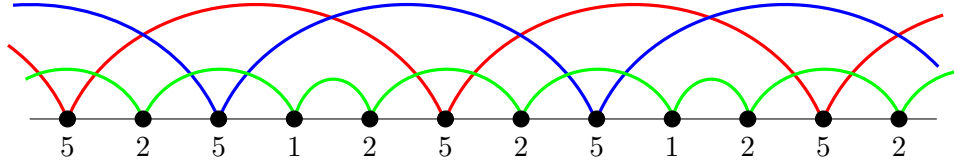


De kleuren geven de verschillende ballen aan, en bij ieder tijdstip staat aangegeven hoe lang de bal die op dat tijdstip wordt gegooid in de lucht zal blijven (in dit geval is dat voor iedere bal steeds exact 3 tellen). Omdat er in dit voorbeeld drie kleuren nodig zijn om het diagram te kleuren, zijn er ook drie ballen nodig om dit patroon te jongleren.

Als je dit patroon met twee handen jongleert (zoals gebruikelijk), dan zal iedere bal steeds van de ene naar de andere hand worden gegooid. Om dit inzichtelijk te maken zijn in bovenstaand diagram de tijdstippen afwisselend wit- en zwart gekleurd, maar omdat we in principe ieder patroon met een willekeurig aantal handen kunnen jongleren zullen we in het vervolg dit onderscheid niet meer maken.

Onder jongleurs staat dit patroon bekend als de "3-ball cascade". Wij zullen er naar refereren als het *basispatroon* met drie ballen.

Voorbeeld 2.2 Een wat ingewikkelder voorbeeld is het volgende patroon:



Er zijn opnieuw drie kleuren nodig om het diagram te kleuren, dus om dit patroon te jongleren heb je ook weer drie ballen nodig. Je ziet dat er twee ballen zijn die steeds vrij hoog worden gegooid: de rode en de blauwe bal. De groene bal blijft veel lager.

Als je met twee handen jongleert, dan is een worp van hoogte 2 een worp naar dezelfde hand. In praktijk is hoogte 2 zó laag dat de bal dan meestal gewoon voor die tel wordt vastgehouden. De groene bal in dit voorbeeld wordt dus eigenlijk nooit 'echt' gegooid, hij wordt alleen overgegeven van de ene naar de andere hand. Door jongleurs wordt dit patroon ook wel het 'baby patroon' genoemd. Niet dat het zo makkelijk is dat een baby het kan, maar je kunt de groene bal zonder gevaar vervangen door een baby.¹ Die wordt immers toch alleen overgegeven van de ene naar de andere hand.

2.2 Wat is een jongleerpatroon?

Stel je voor dat de tijd discreet verloopt. Dus $t \in \mathbb{Z}$ voor ieder tijdstip t (met een geschikte schaling van \mathbb{Z}). We kunnen dan een functie $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ definiëren die ons precies vertelt hoe lang een bal in de lucht zal zijn. Dus de bal die wordt gegooid op tijdstip t zal $h(t)$ tellen later neerkomen op tijdstip $t + h(t)$. Merk op dat we toestaan dat $h(t) = 0$. Hiermee bedoelen we dat er op tijdstip t geen bal wordt gegooid.

We kunnen zo een oneindig lange lijst maken van de worpen $h(t)$. Omdat we aangenomen hebben dat jongleerpatronen periodiek zijn, zal ook deze lijst van getallen periodiek zijn.

Definitie 2.3 De *periode* van een jongleerpatroon is de periode van de corresponderende oneindige lijst van worpen. Oftewel het kleinste strikt positieve getal $n \in \mathbb{Z}$ zodanig dat $h(n + t) = h(t)$ voor alle $t \in \mathbb{Z}$.

We kunnen ieder patroon van periode n nu dus beschrijven als een rij $H = (h(0), h(1), \dots, h(n-1))$, waarbij H steeds opnieuw wordt herhaald. In het vervolg zullen we voor het gemak vaak h_i schrijven in plaats van $h(i)$. Een

¹Ja, er zijn jongleurs die dit echt hebben gedaan. Zoek op YouTube maar eens naar "Allen Knutson giocolieri".

jongleerpatroon H ziet er dan uit als een rijtje getallen $(h_0, h_1, \dots, h_{n-1})$, waarbij worp h_i plaatsvindt op alle tijdstippen t met $t \equiv i \pmod{n}$. Bij concrete voorbeelden zullen we hierna ook de kortere notatie $H = h_0 h_1 \dots h_{n-1}$ gebruiken.

Opmerking 2.4 Je zou het getal h_t als het ware kunnen zien als de 'hoogte' van de worp op tijdstip t . Merk wel op dat deze hoogte in de praktijk kan verschillen, afhankelijk van de snelheid van het jongleren. Maar als we uitgaan van een constante snelheid, dan geldt hoe hoger het getal h_t is, hoe hoger de bal moet worden gegooid.

Omdat we hebben aangenomen dat er op ieder tijdstip maximaal één bal kan worden gegooid, mag het niet zo zijn dat er op een zeker tijdstip meerdere ballen tegelijk neerkomen. Hieruit volgt dat niet iedere eindige rij getallen een jongleerpatroon is. Bekijk bijvoorbeeld de rij $H = (3, 2, 1)$. Als we de landingstijdstippen berekenen zien we dat alle ballen op hetzelfde moment neer zullen komen:

$$0 + h_0 = 0 + 3 = 3, \quad 1 + h_1 = 1 + 2 = 3 \quad \text{en} \quad 2 + h_2 = 2 + 1 = 3$$

Voor een jongleerbare rij H moet dus gelden dat $t_i + h(t_i) \neq t_j + h(t_j)$ voor alle tijdstippen $t_i \neq t_j$. Of beter gezegd: omdat het patroon periodiek is met periode n , weten we dat $h(t)$ gelijk is aan $h(t + kn)$ voor alle $k, t \in \mathbb{Z}$. En dus:

$$t_i + kn + h(t_i) \neq t_j + ln + h(t_j)$$

voor alle $k, l \in \mathbb{Z}$ en $t_i, t_j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ met $t_i \neq t_j$. Met andere woorden: alle $t + h(t)$ moeten verschillend zijn *modulo* de periode n . Dit brengt ons tot de volgende definitie van een jongleerpatroon, waarbij we $[n]$ schrijven voor de verzameling $\{0, 1, \dots, n-1\}$:

Definitie 2.5 Een *jongleerpatroon* of kortweg *patroon* van periode n is een eindige rij getallen $H = (h_0, h_1, \dots, h_{n-1})$ in $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ waarvoor geldt dat de functie

$$\begin{aligned} f: [n] &\rightarrow [n] \\ t &\mapsto t + h_t \pmod{n}. \end{aligned}$$

een permutatie is van $[n]$.

De permutatie $f : [n] \rightarrow [n]$ geeft dus het tijdstip $f(t)$ aan waarop de bal die op tijdstip t werd gegooid neerkomt, modulo n .

Lemma 2.6 *Iedere cyclische permutatie van een jongleerpatroon is ook een jongleerpatroon.*

Bewijs: Zij $H = (h_0, \dots, h_{n-1})$ een jongleerpatroon. Dus de functie $f : [n] \rightarrow [n]$ met $f(t) = t + h_t \pmod n$ is een permutatie van $[n]$. Zij σ de cyclische permutatie van $[n]$ die alle getallen 1 plaats naar rechts opschuift. Dus $\sigma(t) = t + 1 \pmod n$. Dit geeft de bijbehorende nieuwe rij

$$H_\sigma = (h_{\sigma(0)}, h_{\sigma(1)}, \dots, h_{\sigma(n-1)}) = (h_1, h_2, \dots, h_{n-1}, h_0)$$

Om te bewijzen dat H_σ ook een jongleerpatroon is, moeten we laten zien dat de functie $f_\sigma(t) = t + h_{t+1} \pmod n$ een permutatie is van $[n]$. Omdat f_σ een functie is van een eindige verzameling op zichzelf, is het voldoende om injectiviteit te bewijzen.

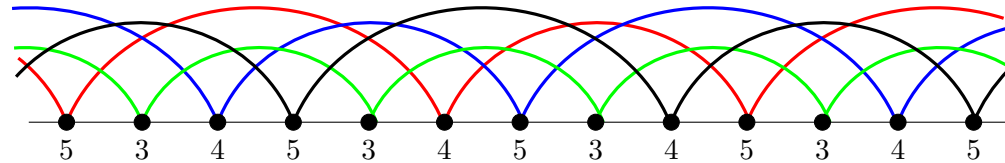
Stel f_σ is niet injectief. Dan bestaan er $i, j \in [n]$ met $i \neq j$ zodanig dat $f_\sigma(i) = f_\sigma(j)$, oftewel $i + h_{i+1} \equiv j + h_{j+1} \pmod n$. Neem nu $i' = i + 1$ en $j' = j + 1$. Dan geldt $i' - 1 + h_{i'} \equiv j' - 1 + h_{j'} \pmod n$, en dus $f(i') = i' + h_{i'} \equiv j' + h_{j'} \pmod n = f(j')$. Maar dit is in tegenspraak met de aanname dat f een permutatie is van $[n]$. Dus f_σ is injectief en daarmee ook een permutatie van $[n]$.

We kunnen σ natuurlijk vaker achter elkaar toepassen, dus iedere cyclische permutatie is een jongleerpatroon. \square

Voorbeeld 2.7 Het basispatroon met 3 ballen dat we zagen in voorbeeld 2.1 noteren we als $H = (3)$, of kortweg '3', en heeft periode 1.

Het baby patroon dat we zagen in voorbeeld 2.2 noteren we als $H = (5, 2, 5, 1, 2)$, of kortweg '52512', en heeft periode 5.

Voorbeeld 2.8 We bekijken het patroon $H = (5, 3, 4)$. Dit patroon heeft periode 3. In een tijdsdiagram ziet H er als volgt uit:



Er zijn vier kleuren nodig om het diagram te kleuren, dus om dit patroon te jongleren heb je vier ballen nodig. Merk op dat het aantal ballen dat nodig is dus groter kan zijn dan de periode van een patroon.

Zoals gezegd heeft dit patroon periode 3, maar als je naar de kleuren kijkt zie je dat de worpen van hoogte 5 niet iedere keer met dezelfde bal

worden gegooid. Je zou in dit geval dus kunnen zeggen dat het patroon zich pas echt herhaalt na 9 tellen. Wanneer we spreken over de periode van een patroon bedoelen we echter alleen de periode waarin de worpen zich herhalen, ongeacht welke ballen daarbij worden gebruikt. Het aantal tellen waarna ook de ballen (en dus de kleuren in het diagram) zich gaan herhalen noemen we de *kleurperiode*. Zie hoofdstuk 5 voor een verdere analyse van de kleurperiode van patronen.

3 Welke patronen zijn mogelijk?

In dit hoofdstuk gaan we kijken welke patronen er mogelijk zijn. We definiëren een bewerking genaamd 'site swaps', waarmee we gemakkelijk nieuwe patronen met hetzelfde aantal ballen kunnen vinden. Ook kunnen we met behulp van deze site swaps bewijzen dat het aantal ballen dat nodig is om een patroon te jongleren gelijk is aan het gemiddelde van de worphoogtes. Dit leidt tot de noodzakelijke voorwaarde dat het gemiddelde van de worphoogtes een geheel getal moet zijn.

In paragraaf 3.3 zullen we zien dat de omgekeerde bewering deels waar is: als het gemiddelde van een rij getallen een geheel getal is, dan bestaat er een jongleerbare permutatie van die rij.

3.1 Site swaps

Een siteswap is een bewerking op een jongleerpatroon waarbij we twee ballen laten wisselen van het tijdstip waarop ze landen. Er ontstaat zo een nieuw jongleerpatroon met evenveel ballen als het oorspronkelijke patroon.

Zij $H = (h_0, h_1, \dots, h_{n-1})$ een jongleerpatroon. Stel we willen de ballen die gegooid worden op tijdstip a en b laten wisselen van het tijdstip waarop ze landen. We willen dus een nieuwe rij $H_{a,b}$ maken waarin de worpen h_a en h_b zijn vervangen door twee nieuwe worpen h'_a en h'_b , zodanig dat $a + h'_a = b + h_b$ en $b + h'_b = a + h_a$. De nieuwe rij $H_{a,b}$ ziet er dan dus als volgt uit:

$$\begin{array}{c|cccccccc} \text{tijdstip} & 0 & 1 & \dots & a & \dots & b & \dots & n-1 \\ \text{worphoogte} & h_0 & h_1 & \dots & b + h_b - a & \dots & a + h_a - b & \dots & h_{n-1} \end{array}$$

Om $H_{a,b}$ nog steeds een jongleerpatroon te laten zijn is het noodzakelijk dat h'_a en h'_b groter of gelijk aan 0 zijn. Als we aannemen dat $a < b$, dan moet dus $b \leq a + h_a$. In praktijk betekent dit dat we alleen een site swap kunnen toepassen als de eerste bal niet eerder landt dan dat de tweede bal wordt gegooid. Anders zouden we na de site swap een bal terug in de tijd moeten gooien, wat natuurlijk niet kan.

Dit alles brengt ons tot de precieze definitie van een site swap. De definitie hieronder is zoals die op pagina 19 van [13] wordt gegeven, en ook gebruikt wordt in [12].

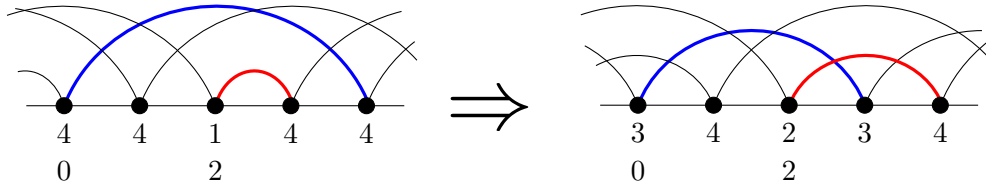
Definitie 3.1 Zij $H = (h_0, h_1, \dots, h_{n-1})$ een rij van $n \geq 2$ natuurlijke getallen. Zij $a, b \in \mathbb{N}$ zodanig dat $0 \leq a < b \leq n - 1$ en $b \leq a + h_a$. We

definiëren de rij $H_{a,b} = (h'_0, h'_1, \dots, h'_{n-1})$ door:

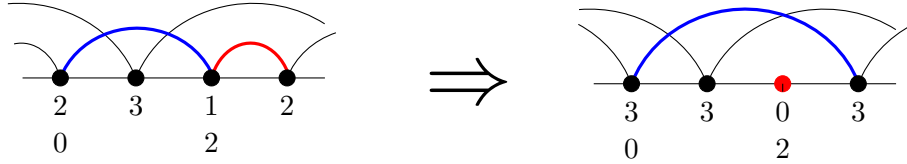
$$h'_t = h_t \quad \forall t \neq a, b, \quad h'_a = b + h_b - a, \quad h'_b = a + h_a - b$$

De bewerking waarbij we H veranderderen in $H_{a,b}$ noemen we een *site swap*.

Voorbeeld 3.2 Zie hier een site swap op het patroon $H = (4, 4, 1)$, waarbij we de ballen die op tijdstippen 0 en 2 worden gegooid van plek laten wisselen. Zo ontstaat het patroon $H_{0,2} = (1 + 2, 4, 4 - 2) = (3, 4, 2)$:



Voorbeeld 3.3 Het is ook mogelijk dat een site swap plaatsvindt tussen twee tijdstippen a en b die tot dezelfde baan behoren (worden gegooid met dezelfde bal). Volgens de definitie mag b namelijk gelijk zijn aan $a + h_a$. Hieronder zien we een voorbeeld van deze situatie. Hier is $H = (2, 3, 1)$ en $H_{0,2} = (1 + 2, 3, 2 - 2) = (3, 3, 0)$.



Opmerking 3.4 Omdat $h'_a + a = b + h_b \geq b$, kunnen we twee keer dezelfde site swap (op dezelfde tellen a en b) toepassen. We komen dan weer terug bij de rij H waar we mee begonnen. Een site swap is dus als het ware zijn eigen inverse.

Het is uit de definitie nog niet direct duidelijk dat een jongleerbare rij getallen na een site swap nog steeds jongleerbaar is. Daarvoor bewijzen we het volgende lemma:

Lemma 3.5 Zij $H = (h_0, h_1, \dots, h_{n-1})$ een rij van $n \geq 2$ natuurlijke getallen. Zij $a, b \in \mathbb{N}$ zodanig dat $0 \leq a < b \leq n - 1$ en $b \leq a + h_a$. Dan geldt:

$$H \text{ is jongleerbaar} \iff H_{a,b} \text{ is jongleerbaar}$$

Bewijs: Stel dat H een jongleerpatroon is. Dan volgt uit definitie 2.5 dat de functie $f : [n] \rightarrow [n]$ die t naar $t + h_t \pmod n$ stuurt een permutatie is. We moeten bewijzen dat de functie

$$\begin{aligned} f' : [n] &\rightarrow [n] \\ t &\mapsto t + h'_t \pmod n \end{aligned}$$

dan ook een permutatie is, met $h'_t \geq 0 \quad \forall t$. Per definitie geldt dat $f'(t) \equiv t + h_t \pmod n \quad \forall t \neq a, b$, en voor de tijdstippen a en b geldt:

$$f'(a) \equiv a + h'_a \equiv b + h_b \pmod n$$

$$f'(b) \equiv b + h'_b \equiv a + h_a \pmod n$$

Dus f' is surjectief en dus een permutatie (want f' is een afbeelding van een eindige verzameling naar zichzelf). Verder geldt $h'_a = b + h_b - a > 0$, want $b > a$ en $h_b \geq 0$. En omdat we in definitie 3.1 hebben geëist dat $b \leq a + h_a$ geldt ook $h'_b = a + h_a - b \geq 0$. Dus $h'_t \geq 0 \quad \forall t$ en daarmee is bewezen dat $H_{a,b}$ ook een jongleerpatroon is. Voor de omkering van het lemma kunnen we hetzelfde argument gebruiken (zie opmerking 3.4). \square

Opmerking 3.6 Merk op dat het aantal ballen dat nodig is om een patroon te jongleren gelijk blijft na het uitvoeren van een site swap, want we wisselen alleen de tijdstippen om waarop twee ballen worden gegooid.

Opmerking 3.7 Het gemiddelde van de getallen in $H_{a,b}$ is altijd gelijk aan het gemiddelde van de getallen in H . We tellen namelijk $(b - a)$ op bij één getal in de rij, en trekken van een ander getal in de rij $(b - a)$ af. Het gemiddelde blijft dus ongewijzigd.

Opmerking 3.8 Door jongleurs wordt ook vaak gebruik gemaakt van het begrip 'siteswap'. Hoewel deze naam wel voortkomt uit de bewerking zoals wij die hierboven hebben gedefinieerd, bedoelen jongleurs hiermee gewoon een jongleerpatroon. Er bestaan verschillende soorten siteswaps. De eenvoudigste is de *vanilla* siteswap, waarbij ervan uitgegaan wordt dat je jongleert met twee handen die steeds om en om een bal gooien. Ieder getal geeft aan hoe een bal moet worden gegooid. Zo betekent een 3 dat de bal op ongeveer ooghoogte moet worden gegooid naar de andere hand. Een 4 betekent dat de bal iets hoger moet worden gegooid naar dezelfde hand. Door het afwisselen van de handen wisselt de bal dus bij oneven worpen van hand, en bij even worpen blijft de bal in dezelfde hand. Speciale gevallen zijn 0, 1

en 2. Bij een 2-worp houd je de bal vast, bij een 1-worp geef je de bal snel over naar de andere hand, en bij een 0-worp is je hand leeg. Op deze manier bevat een (vanilla) siteswap dus alle informatie die een jongleur nodig heeft om een bepaald patroon te jongleren.

3.2 Hoeveel ballen zijn er nodig?

In deze paragraaf geven we antwoord op de vraag hoeveel ballen er nodig zijn om een gegeven jongleerpatroon te jongleren. Er bestaan verschillende bewijzen voor deze stelling. In bijvoorbeeld [13] en [1] is het bewijs gebaseerd op het bestaan van een zekere limiet. We kiezen hier voor een wat meer intuïtief bewijs uit [2] dat gebruik maakt van site swaps.

Stelling 3.9 Average theorem

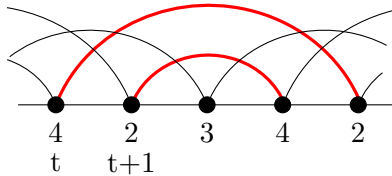
Het aantal ballen b dat nodig is om een jongleerpatroon $H = (h_0, \dots, h_{n-1})$ te jongleren is precies het gemiddelde van de getallen in het patroon:

$$b = \frac{h_0 + h_1 + \dots + h_{n-1}}{n}$$

Bewijs: Het is duidelijk dat de stelling klopt voor het constante patroon $B = (b, b, \dots, b) = (b)$. De bal die gegooid wordt op tijdstip i komt namelijk pas neer op tijdstip $i + b$, voor alle $i \in \mathbb{Z}$. Dus er zijn precies b ballen nodig en het gemiddelde van deze rij is ook duidelijk gelijk aan b .

Stel nu dat we een patroon $H = (h_0, \dots, h_{n-1})$ hebben dat *niet* constant is. Zij $m = \max\{h_0, \dots, h_{n-1}\}$. Dan is er een $t \in [n]$ met $m = h_t > h_{t+1} + 1$. Dat wil zeggen dat er op tijdstip t een worp plaatsvindt van maximale hoogte, die gevolgd wordt door een lagere worp. Deze lagere worp zal dan minstens 2 lager zijn dan de worp daarvoor, omdat de twee ballen anders zullen botsen.

Bij bijvoorbeeld de rij 423 is $m = 4$, en $h_0 = 4$ wordt gevolgd door $h_1 = 2 < 4$. De eerste bal landt dan dus pas ná de tweede bal:



We passen nu een site swap toe met $a = t$ en $b = t + 1$. Daarbij wisselen de ballen die gegooid worden op tijdstip t en $t + 1$ van landingstijdstip. De

worphaogtes h_t en h_{t+1} veranderen dan respectievelijk in $h_{t+1} + 1$ en $h_t - 1$. Als de rij $H_{t,t+1}$ dan nog niet constant is herhalen we deze procedure. Als $H_{t,t+1}$ wel constant is zijn we klaar.

Na de site swap zal h_t altijd met 1 zijn afgenomen en h_{t+1} met 1 zijn toegenomen. Omdat $m = h_t > h_{t+1} + 1$, zal de maximum waarde m - of het aantal getallen gelijk aan m - bij iedere site swap afnemen. Dit betekent dat we op deze manier vroeg of laat altijd uit zullen komen op een constant patroon (want worpen kunnen niet negatief zijn). Verder hebben we al gezien dat site swaps niets veranderen aan het aantal ballen of het gemiddelde van een patroon (zie opmerking 3.6 en 3.7). Omdat ieder patroon met behulp van site swaps dus te veranderen is in een constant patroon, geldt de stelling voor ieder jongleerpatroon. \square

Voorbeeld 3.10 Laten we eens kijken hoe het 'gladstrijken' van een patroon, zoals beschreven in bovenstaand bewijs, in zijn werk gaat. We bekijken het patroon 22731. De hoogste worp in dit patroon heeft hoogte $h_t = 7$, en deze worp wordt gevolgd door een lagere worp van hoogte $h_{t+1} = 3$. We passen dus een site swap toe op deze posities waarna we het patroon 22461 vinden. Zo doorgaan levert de volgende reeks:

$$22731 \rightarrow 22461 \rightarrow 22425 \rightarrow 22335 \rightarrow 42333 \rightarrow 33333$$

En dus zijn er 3 ballen nodig om het patroon 22731 te jongleren.

Bewijs: (alternatief bewijs average theorem)

Zij $H = (h_0, h_1, \dots, h_{n-1})$ een jongleerpatroon en zij T de totale tijd dat alle ballen in de lucht zijn tijdens één periode van het patroon H . We kunnen de waarde van T op twee manieren bepalen:

1. Er zijn b ballen. Iedere bal is altijd in de lucht, want iedere bal die wordt gevangen wordt op exact hetzelfde moment weer opnieuw gegooid. De tijdsperiode die we bekijken is n . Dus $T = bn$.
2. De bal die wordt gegooid op tijdstip $t \in \{0, \dots, n-1\}$ is vervolgens voor h_t tellen in de lucht. Dus $T = h_0 + h_1 + \dots + h_{n-1}$.

Dit samenvoegen geeft $bn = h_0 + h_1 + \dots + h_{n-1}$. De stelling volgt door dit te delen door n . \square

Gevolg 3.11 Zij $(h_0, h_1, \dots, h_{n-1})$ een jongleerpatroon. Dan geldt

$$\sum_{t=0}^{n-1} h_t = 0 \pmod{n}$$

Bewijs: Dit volgt uit stelling 3.9, maar is ook direct te zien. Omdat f een permutatie is van $[n]$ (zie definitie 2.5) geldt:

$$\sum_{t=0}^{n-1} t = \sum_{t=0}^{n-1} (t + h_t) \pmod{n}$$

En dus:

$$\sum_{t=0}^{n-1} h_t = 0 \pmod{n}$$

□

Merk op dat gevolg 3.11 in de omgekeerde richting niet werkt. Bekijk bijvoorbeeld de rij 321. $3 + 2 + 1 = 6 \equiv 0 \pmod{3}$, maar volgens definitie 2.5 is dit geen jongleerpatroon:

$$1 + 3 \equiv 1 \pmod{3}, \quad 2 + 2 \equiv 1 \pmod{3} \quad \text{en} \quad 3 + 1 \equiv 1 \pmod{3}$$

Definitie 3.12 Een rij $H = (h_0, h_1, \dots, h_{n-1})$ heet een *kandidaat-rij* als $\sum_{t=0}^{n-1} h_t = 0 \pmod{n}$.

Met behulp van gevolg 3.11 is dus snel na te gaan of een rij getallen een kandidaatrij is - en dus misschien een jongleerpatroon. Rijen die geen kandidaatrij zijn, zijn zeker niet jongleerbaar.

3.3 Permutaties van kandidaatrijen

Hoewel niet iedere kandidaatrij is te jongleren, is er toch iets bijzonders aan de hand met deze rijen. Het blijkt namelijk zo te zijn dat er voor iedere kandidaatrij een permutatie bestaat die wél te jongleren is. Als je dus een rij hebt waarvan het gemiddelde een geheel getal is, dan weet je zeker dat je met de getallen uit die rij een jongleerpatroon kan maken.

Deze bewering wordt de 'stelling van Hall' genoemd, en is eigenlijk een speciaal geval van een stelling bewezen door Marshall Hall in 1952 over abelse groepen [11]. Een bewijs in de context van jongleren wordt gegeven

door Polster in [13]. Het bewijs dat we hier geven komt van [4] en [5], en maakt slim gebruik van het feit dat het bij jongleren gaat om het speciale geval van cyclische groepen. In dit bewijs wordt het ook direct duidelijk hoe je zo'n jongleerbare permutatie van een kandidaatrij zou kunnen vinden.

Voordat we beginnen met het bewijs van de stelling van Hall, introduceren we een methode om een jongleerpatroon te beschrijven aan de hand van een rooster. Dit gaan we straks namelijk nodig hebben in ons bewijs. Het werkt als volgt: de rijen van het rooster geven aan op welke tel een bal wordt gegooid en de kolommen geven aan op welke tel een bal wordt gevangen (modulo n). In de vakjes van het rooster schrijven we hoe lang de bal voor die worp in de lucht is (modulo n).

Voorbeeld 3.13 Hieronder zie je het rooster voor patronen van lengte 5. Een bal die bijvoorbeeld op tel 2 wordt gegooid en op tel 1 wordt gevangen is $1 - 2 = 4 \pmod{5}$ tellen in de lucht.

	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	4	0	1	2	3
2	3	4	0	1	2
3	2	3	4	0	1
4	1	2	3	4	0

We kunnen jongleerpatronen nu gaan construeren aan de hand van dit rooster. Dit doen we door vakjes in het rooster te markeren, of anders gezegd door stenen op het rooster te leggen. Omdat er per aanname altijd maar één bal tegelijk wordt gegooid en gevangen, mogen er nooit twee of meer stenen in dezelfde rij of kolom komen te liggen.

Voorbeeld 3.14 Hieronder zie je een voorbeeld van de rooster-representatie van het jongleerpatroon 24612. Omdat $6 \equiv 1 \pmod{5}$, plaatsen we in rij 2 voor het getal 6 een steen in het vakje met een 1.

	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	4	0	1	2	3
2	3	4	0	1	2
3	2	3	4	0	1
4	1	2	3	4	0

Nu we weten hoe we jongleerpatronen kunnen beschrijven aan de hand van een rooster, kunnen we de stelling van Hall gaan bewijzen.

Stelling 3.15 Stelling van Hall

Zij $H = (h_0, \dots, h_{n-1})$ een kandidaat-rij. Dan bestaat er een permutatie $\pi \in S_n$ zodanig dat $H_\pi = (h_{\pi(0)}, h_{\pi(1)}, \dots, h_{\pi(n-1)})$ een jongleerpatroon is.

Bewijs: $H = (h_0, \dots, h_{n-1})$ is een kandidaat-rij, dus $h_0 + h_1 + \dots + h_{n-1} \equiv 0 \pmod n$. We beschrijven een algoritme waarmee we een jongleerbare permutatie van deze rij kunnen vinden. In het algoritme rekenen we altijd modulo n .

We gebruiken in ons bewijs de roosters zoals hierboven beschreven. Maak om te beginnen een rooster van n bij n :

	0	1	2	...	n-2	n-1
0	0	1	2	...	n-2	n-1
1	n-1	0	1	n-2
2	n-2	n-1	0	1
...	...	n-2	n-1	0	1	...
n-2	2	...	n-2	n-1	0	1
n-1	1	2	...	n-2	n-1	0

We zoeken dus een manier om de getallen h_0, \dots, h_{n-1} in het rooster te markeren, zodanig dat er in iedere rij en kolom maar één getal is gemarkeerd.

We doorlopen voor iedere $i \in \{0, \dots, n - 1\}$ de volgende stappen:

1. In ronde i plaatsen we de steen h_i in de eerste rij die nog vrij is.
2. Als er al een steen h_x in dezelfde kolom ligt als h_i , verplaats h_x dan naar de eerstvolgende vrije rij. Herhaal dit indien nodig, totdat er in iedere rij en kolom maximaal één steen ligt. Ga dan terug naar stap 1 voor ronde $i + 1$.

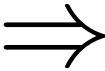
Voordat we bewijzen dat dit algoritme altijd werkt, bekijken we eerst een voorbeeld. We gebruiken hiervoor de rij $H = (0, 3, 2, 4, 1)$. Merk op dat de som van deze getallen 0 is modulo 5, dus dit is inderdaad een kandidaat-rij. We werken met een rooster van 5 bij 5.

Ronde 0, 1 We markeren in rij 0 het getal $h_0 = 0$ en in rij 1 het getal $h_1 = 3$:

	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	4	0	1	2	3
2	3	4	0	1	2
3	2	3	4	0	1
4	1	2	3	4	0

Ronde 2 We markeren in rij 2 het getal $h_2 = 2$, maar dan zijn er in kolom 4 twee getallen gemarkeerd. We verplaatsen $h_1 = 3$ dus naar de eerstvolgende vrije rij, in dit geval rij 3. Dan zijn er geen conflicten meer.

	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	4	0	1	2	3
2	3	4	0	1	2
3	2	3	4	0	1
4	1	2	3	4	0



	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	4	0	1	2	3
2	3	4	0	1	2
3	2	3	4	0	1
4	1	2	3	4	0

Ronde 3 We plaatsen $h_3 = 4$ in de eerste vrije rij, in dit geval rij 1. Er ontstaat een conflict met de steen $h_0 = 0$ in rij 0. We verplaatsen $h_0 = 0$ dus naar de volgende vrije rij, rij 4. Dan ontstaat er een nieuw conflict met rij 2. We verplaatsen $h_2 = 2$ naar rij 0. Nu zijn er geen conflicten meer.

	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	4	0	1	2	3
2	3	4	0	1	2
3	2	3	4	0	1
4	1	2	3	4	0

	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	4	0	1	2	3
2	3	4	0	1	2
3	2	3	4	0	1
4	1	2	3	4	0

	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	4	0	1	2	3
2	3	4	0	1	2
3	2	3	4	0	1
4	1	2	3	4	0

Ronde 4 We voegen $h_4 = 1$ aan het rooster toe en we vinden de jongleerbare permutatie $(2, 4, 1, 3, 0)$:

	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	4	0	1	2	3
2	3	4	0	1	2
3	2	3	4	0	1
4	1	2	3	4	0

Het is duidelijk dat we een jongleerbare rij hebben gevonden zodra het algoritme stopt. We hoeven dus alleen nog te bewijzen dat dit algoritme altijd na een eindig aantal stappen stopt. De enige manier waarop het algoritme vast kan lopen is als er een 'loop' ontstaat waarbij we in stap 2 blijven hangen. Als er zo'n loop ontstaat, dan is er een kolom die we daarbij vaker dan één keer tegenkomen (want er zijn eindig veel kolommen). We zullen laten zien dat dit niet kan gebeuren.

Observatie 1: omdat H een kandidatrij is ligt de waarde van $h_{n-1} \pmod n$ vast als je h_0 t/m h_{n-2} kent. De laatste ronde in het algoritme zorgt dus nooit voor conflicten.

Stel dat we in een zekere ronde i twee keer dezelfde kolom tegenkomen. Zij r_0 en r_1 aan het begin van de ronde de eerste twee beschikbare rijen in het rooster (er zijn er minstens twee, zie observatie 1). Zij $a_1 = h_i$ de waarde die in stap 1 in de eerste beschikbare rij (r_0) wordt geplaatst, en dus in kolom $k_1 \equiv r_0 + a_1$. In deze kolom ontstaat vervolgens een conflict met een zekere waarde a_2 in rij r_2 :

$$k_1 \equiv r_0 + a_1 \equiv r_2 + a_2$$

We verplaatsen a_2 naar de eerstvolgende beschikbare rij (r_1), dus naar kolom $k_2 \equiv r_1 + a_2$, waar weer opnieuw een conflict ontstaat:

$$k_2 \equiv r_1 + a_2 \equiv r_3 + a_3$$

Observatie 2: zodra we een steen uit een rij halen omdat deze een conflict veroorzaakte in een kolom, wordt deze rij de eerste beschikbare rij. In de volgende stap wordt deze rij dus ook als eerste weer gevuld.

Op dit moment is r_2 dus de eerste beschikbare rij. We verplaatsen a_3 dus naar rij r_2 , waar weer een conflict ontstaat:

$$k_3 \equiv r_2 + a_3 \equiv r_4 + a_4$$

Er geldt dus steeds $k_i \equiv r_{i-1} + a_i \equiv r_{i+1} + a_{i+1}$.

Observatie 3: Omdat per definitie van een rooster alle getallen in een kolom verschillend zijn, wordt een steen na een conflict altijd verplaatst naar een nieuwe kolom. Er geldt dus $k_i \neq k_{i+1}$ voor alle i .

Observatie 4: Stel de stenen a_i en a_{i+1} zijn in conflict in kolom k_i . We verplaatsen a_{i+1} naar een nieuwe rij en nieuwe kolom, waar een nieuw conflict ontstaat met steen a_{i+2} . Volgens observatie 2 moet vervolgens steen a_{i+2} verplaatst worden naar de rij waar a_{i+1} oorspronkelijk vandaan kwam. Omdat $a_{i+1} \neq a_{i+2}$ en alle getallen in een rij verschillend zijn, zal dit een andere kolom zijn dan k_i . Er geldt dus $k_i \neq k_{i+2}$ voor alle i .

Stel nu dat we in dit proces twee keer dezelfde kolom tegenkomen. Dus er bestaan $t, s \in \mathbb{N}$ met $t > s$ zodanig dat $k_t = k_s$:

$$r_{t-1} + a_t \equiv r_{s-1} + a_s$$

Merk op dat vanwege observatie 3 en 4 dan zelfs $t > s + 2$. Neem aan dat k_t de *eerste* kolom is die we voor de tweede keer tegenkomen. Dus $k_i \neq k_j$ voor alle $i, j < t$ met $i \neq j$. We bekijken de conflicten in de kolommen k_s tot en met k_t :

$$\begin{array}{rcccc} k_s & \equiv & r_{s-1} + a_s & \equiv & r_{s+1} + a_{s+1} \\ k_{s+1} & \equiv & r_s + a_{s+1} & \equiv & r_{s+2} + a_{s+2} \\ & & \vdots & & \vdots \\ k_{t-1} & \equiv & r_{t-2} + a_{t-1} & \equiv & r_t + a_t \\ k_t & \equiv & r_{t-1} + a_t & \equiv & r_{s-1} + a_s \end{array}$$

Al deze kolommen bij elkaar optellen geeft:

$$\begin{aligned} \sum_{i=s}^t (r_{i-1} + a_i) &= \sum_{i=s+1}^t (r_i + a_i) + r_{s-1} + a_s \\ \sum_{i=s}^{t-1} r_i + \sum_{i=s}^t a_i &= \sum_{i=s+1}^t r_i + \sum_{i=s}^t a_i \end{aligned}$$

Dus $r_s = r_t$. Dit leidt echter tot een tegenspraak:

We weten dat er eerder in kolom k_{t-1} een conflict was tussen a_{t-1} in rij r_{t-2} en het getal a_t dat zich op dat moment in rij r_t bevond:

$$k_{t-1} \equiv r_{t-2} + a_{t-1} \equiv r_t + a_t \equiv r_s + a_t$$

We weten ook dat a_{s+1} zich op het moment van dit conflict nog steeds bevindt in rij r_s , omdat alle kolommen die we hiervoor tegenkwamen onderling verschillend zijn en a_{s+1} alleen verplaatst had kunnen worden als er nog een conflict was in die kolom. Er moet dus gelden dat $a_t = a_{s+1}$. Maar dan:

$$k_{t-1} \equiv r_t + a_t \equiv r_s + a_{s+1} \equiv k_{s+1}$$

En dat is in tegenspraak met de aanname dat k_t de *eerste* kolom is die we vaker tegenkomen. \square

We kunnen nu dus voor iedere kandidaatrij een permutatie vinden die jongleerbaar is. Met onze methode vinden we één zo'n permutatie, maar deze hoeft niet uniek te zijn. In het bewijs van stelling 3.15 vonden we bijvoorbeeld het patroon 24130 bij de kandidaatrij 03241. Maar ook de rijen 01234 en 03142 zijn jongleerbaar. Door simpelweg alle mogelijke permutaties te bekijken is na te gaan dat dit de enige drie jongleerbare permutaties zijn bij deze kandidaatrij.

De vraag *hoeveel* jongleerbare permutaties er zijn bij een gegeven kandidaatrij is vooralsnog onbeantwoord. Wel bestaat er het sterke vermoeden dat dit aantal maximaal is voor kandidaatrijen met zo veel mogelijk verschillende getallen. Voor n oneven is dit de kandidaatrij $H = (0, 1, 2, \dots, n-1)$. Voor deze specifieke kandidaatrijen is voor kleine waarden van n ook bekend hoeveel jongleerbare permutaties er bestaan.

In de On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS, [10]) is bij nummer A003111 het aantal 'complete mappings' van de cyclische groep $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ gegeven voor kleine waarden van n . Een *complete mapping* van $[n]$ is daar gedefinieerd als een permutatie $\phi(x)$ van $[n]$ waarbij $\phi(0) = 0$ en $\phi(x) - x$ ook weer een permutatie is van $[n]$.

Als we nu $\phi = f$ kiezen zoals in definitie 2.5, dan is $f(t) - t = h(t)$ een permutatie van $[n]$, en $f(0) = h(0) = 0$, beiden vanwege onze keuze van de kandidaatrij. Het tellen van complete mappings van $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (oftewel $[n]$) komt dus op hetzelfde neer als het tellen van jongleerbare permutaties van de kandidaatrij $H = (0, 1, 2, \dots, n-1)$, voor oneven n . De lijst uit [10] geeft ons nu de volgende aantallen:

n	#jongleerbare permutaties van $H = (0, 1, \dots, n - 1)$
1	1
3	1
5	3
7	19
9	225
11	3441
13	79259
15	2424195
17	94471089
19	4613520889
21	275148653115
23	19686730313955
25	1664382756757625

Er is geen makkelijke manier bekend om al deze jongleerbare permutaties ook daadwerkelijk te vinden, maar voor kleine waarden van n is het nog wel te doen om gewoonweg alle mogelijkheden uit te proberen. Zo vinden we bijvoorbeeld voor $n = 7$ de volgende 19 patronen:

0135264	0461253	0315246	0416235	0512463
0263145	0531642	0526134	0142635	0246135
0425613	0362514	0241536	0245163	0413562
0415263	0346152	0123456	0236415	

Er zijn in totaal $\frac{7!}{7} = 720$ verschillende permutaties van de rij 0123456. Het percentage jongleerbare permutaties is dus relatief klein.

4 Aantal patronen

In dit hoofdstuk gaan we uitzoeken hoeveel jongleerpatronen er mogelijk zijn. In theorie bestaan er natuurlijk oneindig veel patronen, ervan uitgaande dat we oneindig hoog kunnen gooien. Als we restricties opleggen houden we een eindig aantal patronen over. Denk bij restricties bijvoorbeeld aan een maximum hoogte, een maximum aantal ballen, of een vaste periode.

4.1 Minimale jongleerpatronen

De eerste restrictie die we toepassen is dat we ons beperken tot een maximum hoogte. Om precies te zijn gaan we patronen tellen waarbij we niet hoger gooien dan de periode n van het patroon. Dit noemen we minimale patronen.

Definitie 4.1 Een jongleerpatroon $H = (h_0, \dots, h_{n-1})$ van lengte n heet *minimaal* als $h_i \in \{0, \dots, n-1\}$ voor alle $t \in \mathbb{Z}$.

Uit het volgende lemma volgt dat ieder jongleerpatroon altijd is terug te brengen tot precies één minimaal jongleerpatroon:

Lemma 4.2 Zij $H = (h_0, h_1, \dots, h_{n-1})$ een jongleerpatroon met b ballen. Zij $k_t \in \mathbb{Z}$ met $h_t + k_t \cdot n \geq 0$ voor alle $t \in \mathbb{Z}$. Dan is

$$H_k = ((h_0 + k_0 \cdot n), (h_1 + k_1 \cdot n), \dots, (h_{n-1} + k_{n-1} \cdot n))$$

ook een jongleerpatroon, met $b + \sum_{t=0}^{n-1} k_t$ ballen.

Bewijs: Omdat $f(t) = t + h_t$ een permutatie is van $[n]$, en $t + h_t + k_t \cdot n \equiv t + h_t \pmod{n}$ voor alle t , is ook $f_k(t) = t + h_t + k_t \cdot n$ een permutatie van $[n]$. Uit definitie 2.5 volgt dan dat H_k een jongleerpatroon is. Voor het aantal ballen berekenen we het gemiddelde (zie stelling 3.9):

$$\frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} (h_t + k_t \cdot n) = \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} h_t + \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} k_t \cdot n = b + \sum_{t=0}^{n-1} k_t$$

□

Iedere worp die met n wordt verhoogd zorgt dus voor één extra bal in het patroon, en iedere worp die met n wordt verlaagd zorgt voor één bal minder in het patroon.

Voorbeeld 4.3 Bekijk het patroon 6792. Dit patroon heeft periode 4.

$$6 \equiv 2 \pmod{4}, \quad 7 \equiv 3 \pmod{4}, \quad 9 \equiv 1 \pmod{4}, \quad 2 \equiv 2 \pmod{4}$$

Dus het bijbehorende minimale patroon is 2312.

Lemma 4.4 *Er bestaan precies $n!$ minimale jongleerpatronen van lengte n , waarbij we cyclische shifts als verschillend beschouwen.*

Merk op dat het hier gaat om patronen van lengte n , niet van periode n . De periode is altijd een deler van de lengte.

Bewijs: We bekijken de minimale jongleerpatronen aan de hand van een rooster, net zoals we dat deden in het bewijs van de stelling van Hall (zie voorbeeld 3.13 en 3.14). Het gaat nu om *minimale* patronen, dus voor een jongleerpatroon van lengte n duren de worpen nooit langer dan $n - 1$ tellen. Dit betekent in het rooster dat we de worphoogtes nu niet modulo n hoeven te bekijken. We zijn op zoek naar het totaal aantal patronen dat met behulp van een rooster is te maken, voor roosters ter grootte van $n \times n$. Omdat er niet twee of meer stenen in dezelfde rij of kolom mogen liggen, zijn hiervoor $n!$ mogelijkheden. Er bestaan dus $n!$ minimale jongleerpatronen van lengte n . \square

Voor $n = 3$ levert bovenstaande methode de volgende patronen:

$$000 \quad 120 \quad 222 \quad 012 \quad 111 \quad 201$$

Maar in praktijk zijn de patronen 120, 012 en 201 hetzelfde, vanwege het cyclische karakter van jongleerpatronen. En omdat jongleurs over het algemeen vooral geïnteresseerd zijn in patronen met minimale periode, zullen zij de patronen 000, 111 en 222 ook niet mee willen laten tellen. Deze patronen hebben namelijk wel lengte 3, maar niet periode 3. We hebben dus eigenlijk veel patronen dubbel geteld.

Merk op dat de patronen met een kortere periode dan n precies de patronen zijn met periode d , waarbij d een deler is van n . Deze patronen kunnen we er dus uit filteren met behulp van inclusie-exclusie. Vervolgens blijven alleen de patronen met periode n over, waarbij ieder patroon precies n keer voorkomt (vanwege de meegetelde cyclische shifts). Het echte aantal mogelijke jongleerpatronen met periode n vinden we dus door dit nog te delen door n .

Stelling 4.5 *Het aantal mogelijke minimale jongleerpatronen van periode n , waarbij cyclische shifts als gelijk worden beschouwd, is gelijk aan:*

$$F(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) d^{(n/d)} \left(\frac{n}{d}\right)!$$

Hierbij staat μ voor de Möbius functie.

Bewijs: Kies n vast, en zij m een deler van n . We definiëren de volgende twee functies van m :

- $f(m) :=$ het aantal patronen van periode m , met maximum hoogte $n - 1$.
- $g(m) :=$ het aantal patronen van lengte m (dus niet noodzakelijk periode m), met maximum hoogte $n - 1$.

De patronen die met de functies f en g worden geteld hoeven dus niet per se minimaal te zijn (dat is alleen het geval als $m=n$). Bij zowel f als g worden cyclische shifts ook meegeteld. Er geldt:

$$g(m) = \sum_{d|m} f(d)$$

Uit lemma 4.4 volgt dat er $m!$ minimale patronen zijn van lengte m . Omdat we bij $g(m)$ ook hogere worpen tot en met hoogte $n - 1$ toestaan, is $g(m)$ dus groter of gelijk aan $m!$. Ieder minimaal patroon van lengte m is m.b.v. lemma 4.2 op $\left(\frac{n}{m}\right)^m$ manieren te veranderen in een patroon van lengte m en maximale hoogte $n - 1$. Dus:

$$g(m) = \left(\frac{n}{m}\right)^m \cdot m!$$

Met *Möbius inversie* volgt nu:

$$f(m) = \sum_{d|m} \mu(d) g\left(\frac{m}{d}\right) = \sum_{d|m} \mu(d) \left(\frac{n \cdot d}{m}\right)^{(m/d)} \left(\frac{m}{d}\right)!$$

Invullen van $m = n$ geeft nu het aantal minimale patronen $f(n)$ van periode n , maar hier wordt nog wel ieder patroon n keer dubbel geteld, omdat de cyclische shifts nog als verschillend worden gezien. Voor het aantal jongleerpatronen van periode n waarbij cyclische shifts als gelijk worden beschouwd moeten we $f(n)$ dus nog delen door n . Dit geeft de gewenste formule. \square

Voorbeeld 4.6 Dit zijn de resultaten van $F(n)$ voor $n \leq 12$.

$F(1) = 1$	$F(5) = 23$	$F(9) = 40.302$
$F(2) = 0$	$F(6) = 110$	$F(10) = 362.492$
$F(3) = 1$	$F(7) = 719$	$F(11) = 3.628.799$
$F(4) = 4$	$F(8) = 4.992$	$F(12) = 39.912.804$

Laten we het geval $n = 4$ eens wat meer in detail bekijken. Er zijn $4! = 24$ minimale patronen met lengte 4 en dubbel getelde cyclische shifts:

0000	0013	0112	0233	2231	0202
1111	0130	1120	2330	2312	2020
2222	1300	1201	3302	3122	3131
3333	3001	2011	3023	1223	1313

De patronen die hier nu nog tussen zitten met een kleinere periode dan 4, moeten periode 2 of 1 hebben. Oftewel, dit zijn 'herhalingen' van patronen van lengte 2.

Er bestaan $2! = 2$ minimale patronen van lengte 2: 00 en 11 (merk op dat deze allebei niet *periode* 2 hebben, dus is inderdaad $F(2) = 0$). We kunnen deze patronen ieder op 4 manieren omvormen tot patronen van lengte 2 en maximum hoogte 3:

- 00 geeft de patronen 00, 02, 20 en 22
- 11 geeft de patronen 11, 13, 31 en 33

Er zijn dus 8 patronen van lengte 2 met maximum hoogte 3 (met de notatie uit stelling 4.5 is dit $g(2) = 2^2 \cdot 2 = 8$). En dus zijn er ook 8 minimale patronen van lengte 4 en periode kleiner dan 4:

0000	0202	2020	2222	1111	1313	3131	3333
------	------	------	------	------	------	------	------

Als we deze 8 patronen eruit halen blijven de patronen met echte periode 4 over. Er blijven 16 patronen over, waarbij iedere cyclische shift precies vier keer voorkomt. Er zijn dus $F(4) = \frac{16}{4} = 4$ minimale patronen van periode 4, waar we de cyclische shifts als gelijk beschouwen:

0013	0112	0233	2231
------	------	------	------

4.2 Patronen met b ballen en periode n

Een andere vraag is hoeveel jongleerpatronen er mogelijk zijn als we niet de maximum hoogte, maar het aantal ballen vast leggen. We tellen het aantal patronen met b ballen en periode n . Het resultaat hiervan is in de literatuur al vaker uitgewerkt en ik zal hier alleen kort beschrijven wat het idee is van het bewijs.

Het is het makkelijkste om gebruik te maken van zogenaamde *jongleerkaarten*. Dit zijn kaarten die aangeven wat de relatieve volgorde van de ballen is na een zekere worp. Door deze kaarten op een rij te leggen kunnen we jongleerpatronen beschrijven. Het aantal patronen met *hoogstens* b ballen en lengte n vinden we dan door alle mogelijke rijtjes van n kaarten met b ballen te tellen. Dit zijn er $(b+1)^n$. Hieruit volgt direct dat er $(b+1)^n - b^n$ patronen bestaan van lengte n met *precies* b ballen.

Cyclische shifts worden op deze manier nog wel dubbel geteld. Op dezelfde manier als bij stelling 4.5 kunnen we m.b.v. Möbius inversie alle patronen met een kortere periode eruit filteren. Daarna delen we door n om alle dubbel getelde cyclische shifts eruit te halen. We komen dan uit op het volgende resultaat:

Gevolg 4.7 *Het aantal patronen met b ballen en periode n is gelijk aan:*

$$M(b, n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) ((b+1)^{\frac{n}{d}} - b^{\frac{n}{d}})$$

Zie [8] en [13] voor een uitgebreidere uitleg over jongleerkaarten.

De eenvoud van het resultaat dat er $(b+1)^n$ patronen zijn met hoogstens b ballen en lengte n , is verrassend. Je zou denken dat er dan ook een makkelijke manier moet zijn om dit te bewijzen, zonder het gebruik van een heel nieuw systeem zoals de jongleerkaarten. Dit blijkt echter nog niet zo makkelijk te zijn.

Het is mogelijk om gevolg 4.7 te bewijzen door verder te werken op het resultaat uit stelling 4.5 over het aantal minimale patronen van een zekere periode. Dit is echter vrij veel combinatorisch rekenwerk dat verder niet veel nieuwe inzichten geeft. Vandaar dat we dit bewijs hier achterwege laten. Een volledig bewijs is te vinden in onder andere [1] en [2].

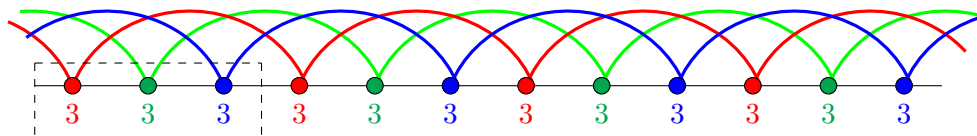
Voorbeeld 4.8 Dit zijn alle patronen met lengte n en hoogstens b ballen, voor een paar kleine waarden van n en b :

$n = 2$	20	31	40	51	60	24			
$b = 3$	02	13	04	15	06	42			
$(b + 1)^n = 16$	00	11	22	33					
$n = 3$	300	600	330	120	150	420	114	123	000
$b = 2$	030	060	303	201	501	204	141	231	111
$(b + 1)^n = 27$	003	006	030	012	015	041	411	312	222
$n = 4$	4000	1300	2011	2020	0000	1111			
$b = 1$	0400	0130	1201	0202					
$(b + 1)^n = 16$	0040	0013	1120						
	0004	3001	0112						
$n = 4$	8000	4400	1124	0013	0112	1223	4013	5300	0512
$b = 2$	0800	0440	4112	3001	2011	3122	3401	0530	2051
$(b + 1)^n = 81$	0080	0044	2411	1300	1201	2312	1340	0053	1205
	0008	4004	1241	0130	1120	2231	0134	3005	5120
	0233	4202	1700	1160	1115	2060	2015	0413	4000
	3023	2420	0170	0116	5111	0206	5201	3041	0400
	3302	0242	0017	6011	1511	6020	1520	1304	0040
	2330	2024	7001	1601	1151	0602	0152	4130	0004
	4040	1313	2020	0000	1111	2222			
	0404	3131	0202						

5 Kleurperiode

5.1 Kleurperiode

Tot nu toe hebben we steeds jongleerpatronen bekeken met identieke ballen. Vanaf nu geven we iedere bal een kleur, zodat we kunnen volgen welk traject iedere bal aflegt. We bekijken het patroon van de 3-bal cascade en geven ieder getal de kleur van de bijbehorende bal:



De periode van dit patroon is 1. Maar als we naar de kleuren kijken is de periode 3. Om deze twee soorten periodes uit elkaar te houden definiëren we het begrip *kleurperiode*:

Definitie 5.1 Zij $H = (h_0, \dots, h_{n-1})$ een jongleerpatroon van periode n . De *kleurperiode* $k \in \mathbb{Z}$ van H is dan een veelvoud van n , zodanig dat de kleur van $h(k+t)$ gelijk is aan de kleur van $h(t)$, voor alle t . Het kleinste mogelijke veelvoud van n waarvoor dit geldt noemen we de *minimale kleurperiode*.

Als we binnen een patroon één bal volgen, zien we dat deze steeds dezelfde 'baan' doorloopt. De cycli van de permutatie

$$\sigma : \{h_0, h_1, \dots, h_{n-1}\} \rightarrow \{h_0, h_1, \dots, h_{n-1}\} \quad \text{met} \quad h_i \mapsto h_{i+h_i}$$

zijn de banen die de ballen afleggen. Het kan zijn dat meerdere ballen dezelfde baan volgen.

Voorbeeld 5.2 Het patroon 57233 heeft 3 banen: $\sigma(57233) = (5)(7\ 3)(2\ 3)$. Het patroon 534 heeft 2 banen: $\sigma(534) = (5\ 4)(3)$

Je kunt de banen eigenlijk zien als 'sub-patronen' binnen het volledige patroon. Deze sub-patronen zijn ook op zichzelf te jongleren. Zo is het patroon 57233 te splitsen in de patronen 50000, 07030 en 00203. Om te bepalen hoeveel ballen een zekere baan volgen kunnen we dus gewoon stelling 3.9 toepassen. Zo volgt voor dit voorbeeld dat er één bal de baan (5) doorloopt, twee ballen de baan (7 3) en één bal de baan (2 3).

Stelling 5.3 Zij $H = (h_0, h_1, \dots, h_{n-1})$ een jongleerpatroon van periode n met banen B_1, B_2, \dots, B_m . Zij $S_i = \sum_{b \in B_i} b$ de som van de getallen in baan B_i . Dan is de minimale kleurperiode k van H gelijk aan het kleinste gemene veelvoud van de getallen S_i :

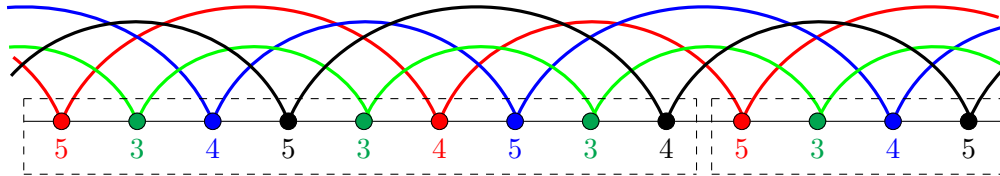
$$k = \text{kgv}(S_1, \dots, S_m)$$

Bewijs: Zij x een bal in een zekere baan $B_i = (b_0 \ b_1 \ \dots \ b_l)$. Neem z.v.v.a. aan dat x zich op tijdstip 0 bevindt op positie b_0 . Dan duurt het $b_0 + b_1 + \dots + b_l = S_i$ tellen voordat x weer terug is op zijn startpositie b_0 . Dit geldt voor alle ballen x en alle banen B_i . De kleurperiode is de tijd die het duurt voordat alle ballen weer terug zijn op hun startpositie. Dit is dus na $\text{kgv}(S_1, \dots, S_m)$ tellen. \square

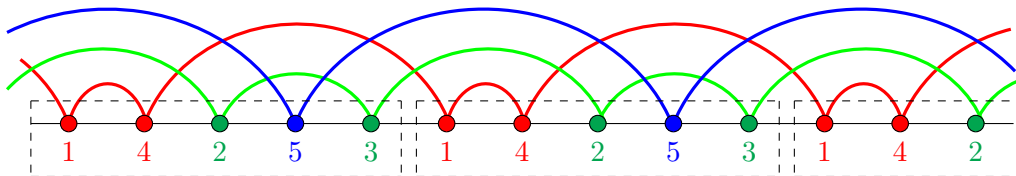
Voorbeeld 5.4 Het patroon 57233 heeft drie banen: één van lengte 10 en twee van lengte 5 (zie voorbeeld 5.2). De minimale kleurperiode van 57233 is dus $\text{kgv}(5, 10, 5) = 10$.

Het patroon 64 heeft twee banen: (4) en (6). De minimale kleurperiode van 64 is dus $\text{kgv}(6, 4) = 12$.

Het patroon 534 heeft twee banen: één van lengte 9 en één van lengte 3 (zie voorbeeld 5.2). De minimale kleurperiode van 534 is dus $\text{kgv}(9, 3) = 9$. In onderstaand diagram is te zien dat dit inderdaad klopt:



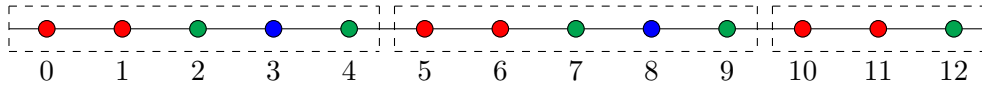
Het patroon 14253 heeft drie banen van lengte 5: (1 4), (2 3) en (5). De minimale kleurperiode van 14253 is hier dus gelijk aan de periode van het patroon: $n = 5 = \text{kgv}(5, 5, 5) = k$.



5.2 Aantal patronen met minimale kleurperiode k

We zullen nu gaan kijken hoeveel patronen er bestaan met een zekere minimale kleurperiode k en b ballen. We beginnen met het tellen van de patronen met (niet noodzakelijk minimale) kleurperiode k , waarbij ook alle cyclische shifts nog dubbel geteld worden. Het idee van het bewijs dat we hier geven komt van Steve Butler, zie [3]. Daarna zullen we met behulp van inclusie/exclusie (Möbius inversie) het aantal patronen met *minimale* kleurperiode k bepalen.

Bekijk het diagram van het patroon 14253 uit voorbeeld 5.4. De getallen zijn daar gekleurd op basis van welke bal er gegooid wordt. We hebben al gezien dat de kleurperiode van dit patroon $k = 5$ is. Hieronder zie je de kleurperiode van dit patroon nog eens schematisch weergegeven, waarbij de getallen nu de tijd aangeven en niet de worphoogte.



We kunnen zo'n blok van 5 tellen nu gaan verdelen op basis van kleur. Voor het patroon 14253 vinden we zo de verzamelingen $\{0, 1\}$, $\{2, 4\}$ en $\{3\}$. Deze opdeling bevat nu alle informatie die nodig is om het patroon weer te reconstrueren. Iedere deelverzameling van $[k]$ geeft daarbij de baan van precies één bal. Deze bal doorloopt de tijdstippen uit de verzameling van klein naar groot, omdat de som S_i van de worpen in een baan nooit groter kan zijn dan de kleurperiode k .

Zo zie je in het voorbeeld hierboven dat de bal die op tel 0 wordt gegooid op tel 1 neerkomt, dus $h_0 = 1$. De bal die op tel 3 wordt gegooid komt neer op tel 3 in het volgende blok, dus $h_3 = k = 5$. En de bal die op tel 4 wordt gegooid komt neer op tel 2 in het volgende blok, dus $h_4 = -2 + k = 3$. We komen zo tot het volgende lemma:

Lemma 5.5 *Als we de verzameling $[k]$ verdelen in b niet-lege disjuncte deelverzamelingen, dan geeft dat precies één jongleerpatroon met kleurperiode k en b ballen.*

Bewijs: Verdeel $[k]$ in b niet-lege disjuncte deelverzamelingen, en laat N één van deze deelverzamelingen zijn. We schrijven $N = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ met $t_i < t_{i+1}$ voor alle $1 \leq i \leq m$. Het patroon $H = (t_0, t_1, \dots, t_{k-1})$ dat hier uit volgt is dan als volgt gedefinieerd:

$$h_{t_i} = \begin{cases} t_{i+1} - t_i & \text{als } i < m \\ t_1 - t_i + k & \text{als } i = m \end{cases}$$

Iedere verzameling N geeft dus precies de tijdstippen aan waar één van de ballen zal landen. Omdat de verzamelingen disjunct zijn zullen er dus nooit twee ballen op hetzelfde moment landen. Er zijn b deelverzamelingen, dus het patroon dat we vinden is inderdaad een jongleerpatroon met b ballen. Bovendien is het duidelijk dat iedere baan volledig is doorlopen na k tellen. De (niet noodzakelijk minimale) kleurperiode is dus gelijk aan k . \square

Voorbeeld 5.6 Neem $k = 5$ en $b = 2$. We verdelen de verzameling $[5]$ in 2 disjuncte deelverzamelingen: $[5] = \{0, 2\} \cup \{1, 3, 4\}$. Iedere deelverzameling wordt van klein naar groot doorlopen door precies één bal. Zo vinden we:

$$\begin{aligned} h_0 &= 2 - 0 = 2, & h_1 &= 3 - 1 = 2, & h_2 &= (0 - 2) + 5 = 3 \\ h_3 &= 4 - 3 = 1, & h_4 &= (1 - 4) + 5 = 2 \end{aligned}$$

Het jongleerpatroon met 2 ballen en kleurperiode 5 dat bij deze verdeling van $[k]$ hoort is dus $H = (2, 2, 3, 1, 2)$.

In bovenstaand voorbeeld is ieder patroon dat je vind ook direct een patroon van *minimale* kleurperiode k , én periode k . Dit komt doordat 5 een priemgetal is. Bij samengestelde getallen k kan het zijn dat de minimale kleurperiode en/of de periode kleiner zijn dan k .

Stelling 5.7 *Het aantal patronen met b ballen en kleurperiode k , waarbij we cyclische shifts als verschillend beschouwen, is gelijk aan het Stirling-getal van de tweede soort $\left\{ \begin{smallmatrix} k+1 \\ b+1 \end{smallmatrix} \right\}$.*

Bewijs: Als we de tijdstippen in $[k]$ verdelen in b niet-lege verzamelingen, dan geeft dat precies één jongleerpatroon met kleurperiode k en b ballen. Het aantal manieren om k dingen te verdelen over b niet-lege groepen is gelijk aan het Stirling getal van de tweede soort $\left\{ \begin{smallmatrix} k \\ b \end{smallmatrix} \right\}$. Allen dit geeft wel nog alleen de patronen waar geen worpen van hoogte 0 in voorkomen, omdat we aan iedere deelverzameling precies één bal toekennen.

We lossen dit op door een extra element $*$ toe te voegen, en een extra groep te maken voor de worpen van hoogte 0. We verdelen dus nu de verzameling $\{0, 1, \dots, n-1, *\}$ in $b+1$ groepen. De elementen die vervolgens in dezelfde verzameling zitten als het element $*$ worden de worpen van hoogte 0, en de overige b verzamelingen representeren ieder de baan van één bal. Er bestaan in totaal dus $\left\{ \begin{smallmatrix} k+1 \\ b+1 \end{smallmatrix} \right\}$ patronen met b ballen en kleurperiode k . \square

Merk op dat we in stelling 5.7 de patronen met *kleurperiode* k tellen. Dit hoeft dus niet noodzakelijk de *minimale* kleurperiode te zijn.

Voorbeeld 5.8 Voor $b=2$ en $k=4$ vinden we $\left\{ \begin{smallmatrix} k+1 \\ b+1 \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} 5 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\} = 25$ patronen met kleurperiode 4 en 2 ballen. Dit zijn de volgende patronen:

$$\begin{array}{cccc} 4112 (4\times) & 0044 (4\times) & 4013 (4\times) & 4202 (4\times) \\ 4130 (4\times) & 1313 (2\times) & 0404 (2\times) & 2222 (1\times) \end{array}$$

Omdat we cyclische shifts als verschillend beschouwen wordt ieder patroon van periode n steeds n keer meegeteld. Het patroon 2222 heeft minimale kleurperiode 2. Alle andere patronen hebben minimale kleurperiode 4.

In het volgende gevolg beperken we ons tot het aantal patronen met *minimale* kleurperiode k .

Gevolg 5.9 *Het aantal patronen met b ballen en minimale kleurperiode k , waarbij cyclische shifts als verschillend worden beschouwd, is gelijk aan:*

$$\sum_{d|k} \mu(d) \left\{ \begin{smallmatrix} \frac{k}{d} + 1 \\ b + 1 \end{smallmatrix} \right\}$$

waarbij $\left\{ \begin{smallmatrix} \frac{k}{d} + 1 \\ b + 1 \end{smallmatrix} \right\}$ het Stirling-getal van de tweede soort is.

Bewijs: Dit volgt uit stelling 5.7 met Möbius inversie. Kies het aantal ballen b vast. Zij $g(k, b)$ het aantal patronen met kleurperiode k en b ballen. Zij $f(k, b)$ het aantal patronen met minimale kleurperiode k en b ballen. Dan geldt:

$$g(k, b) = \sum_{d|k} f(d, b)$$

En dus volgt met Möbius inversie:

$$f(k, b) = \sum_{d|k} \mu(d) g\left(\frac{k}{d}, b\right) = \sum_{d|k} \mu(d) \left\{ \begin{smallmatrix} \frac{k}{d} + 1 \\ b + 1 \end{smallmatrix} \right\}$$

□

Het zou mooi zijn als we de formule uit gevolg 5.9 nog konden aanpassen zodat niet alle cyclische shifts dubbel worden geteld. Dit is echter nog niet zo gemakkelijk te doen, zoals duidelijk wordt in het volgende voorbeeld:

Voorbeeld 5.10 Neem $b = 2$ en $k = 4$. Dan geeft de formule uit gevolg 5.9:

$$f(k, b) = \sum_{d|4} \mu(d) \left\{ \begin{matrix} \frac{4}{d} + 1 \\ 2 + 1 \end{matrix} \right\} = \mu(1) \left\{ \begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix} \right\} + \mu(2) \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} \right\} + \mu(4) \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \right\} = 25 - 1 = 24$$

Dit zijn de volgende 24 patronen:

$$\begin{array}{lll} 4112 \ (4\times) & 4202 \ (4\times) & 1313 \ (2\times) \\ 0044 \ (4\times) & 4130 \ (4\times) & 0404 \ (2\times) \\ 4013 \ (4\times) & & \end{array}$$

Het patroon 2222 dat in stelling 5.7 nog wordt meegeteld, is er bij de Möbius inversie in gevolg 5.9 uit gehaald, omdat 2222 niet kleurperiode 4 heeft. We kunnen om de cyclische shifts er nu niet uit halen door simpelweg te delen door $k = 4$, omdat er nog patronen tussen zitten die periode 2 hebben. Wel geeft delen door k een redelijke inschatting van de ondergrens, omdat de meeste patronen wel periode k hebben. In dit voorbeeld zou dat uitkomen op 6, terwijl het echte antwoord 7 moet zijn.

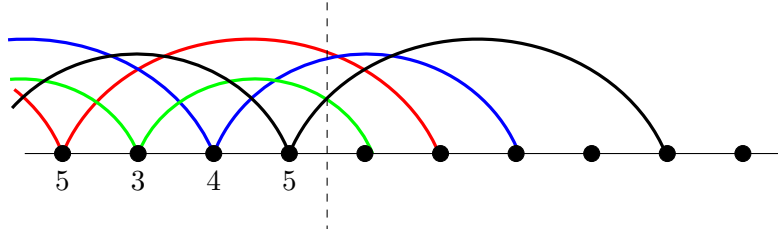
Als k een priemgetal is geeft deling door k uiteraard wel het exacte antwoord.

6 Toestandsgrafen

6.1 Jongleertoestanden

Stel je bent een zeker patroon aan het jongleren, en op een zeker tijdstip wil je zonder te stoppen beginnen met een nieuw patroon. Welke opties zijn er dan? Om te zien welke opties er zijn kijken we eerst wat er gebeurt als we op een bepaald tijdstip stoppen met het gooien van nieuwe ballen. Op welke tijdstippen komen de ballen die nog in de lucht zijn dan neer?

Voorbeeld 6.1 Stel we zijn het patroon 534 aan het jongleren, en we besluiten te stoppen na de stippelijijn. Dan ziet dat er als volgt uit:



We zien dat de vier ballen zullen landen op tijdstippen 1, 2, 3 en 5 na de stippelijijn. Voor de groene bal, die neerkomt op tijdstip 1, zijn er nu verschillende opties. Een worp van hoogte 1, 2 of 4 kan niet, want dan zullen er twee ballen op hetzelfde tijdstip landen. Maar we kunnen de groene bal wel gooien met een hoogte van 3 (dan blijven we in hetzelfde patroon) of bijvoorbeeld 5 of nog hoger. Op deze manier kunnen we dus op ieder tijdstip precies zien welke worpen er op dat moment mogelijk zijn.

Om op een makkelijke manier te noteren wat de opties zijn op een zeker tijdstip, introduceren we het begrip *jongleertoestand*. Voor het gemak gaan we uit van een maximum worp-hoogte h , zodat er eindig veel opties overblijven. Het idee van jongleertoestanden (en toestandsgrafen) wordt ook uitgebreid beschreven in [13].

Definitie 6.2 Zij h de maximale toegestane hoogte, en b het aantal ballen. Dan is een *jongleertoestand* of kortweg *toestand* een rijtje $T = t_0 t_1 \dots t_{h-1}$ van b enen en $h - b$ nullen, waarbij $t_i = 1$ als er op tijdstip i (nadat we zijn gestopt) een bal zal landen.

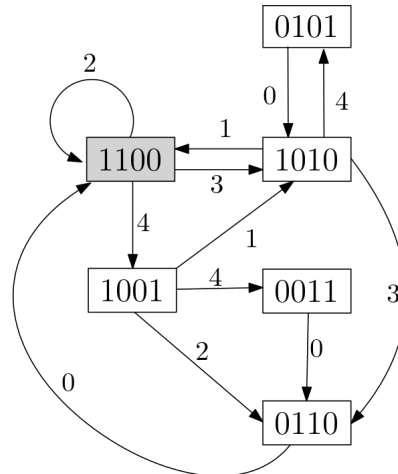
We nemen aan dat het aantal ballen dat we jongleren constant blijft, ook als we overgaan naar een ander patroon.

Voorbeeld 6.3 In voorbeeld 6.1 is de bijbehorende jongleertoestand 11101. Als we vervolgens de groene bal gooien met hoogte 3, dan komen we in de

toestand 11110. Als we in plaats daarvan de groene bal gooien met hoogte 5, dan komen we in de toestand 11011. Schematisch kunnen we dit als volgt noteren:

$$11011 \xleftarrow{5} 11101 \xrightarrow{3} 11110$$

Als we het aantal ballen en de maximum hoogte vast kiezen, dan zijn er eindig veel mogelijke toestanden. Om precies te zijn zijn dit er $\binom{h}{b}$, omdat we uit de h mogelijke plekken er b kiezen waar een 1 komt te staan. We kunnen nu dus een gelabelde gerichte graaf maken met als punten alle mogelijke toestanden, waarbij met pijlen is aangegeven met welke worp je van de ene naar de andere toestand kan. Zo'n gelabelde gerichte graaf noemen we een *toestandsgraaf*. Hieronder is de graaf voor 2 ballen met maximale hoogte 4 weergegeven:



In deze graaf is nu dus precies ieder patroon met 2 ballen en maximale hoogte 4 af te lezen. We zullen de toestandsgraaf voor b ballen en maximum hoogte h noteren als $G_{b,h}$. Merk op dat er altijd moet gelden dat $b \leq h$, omdat als er meer ballen zouden zijn dan de maximale hoogte, dan zouden er vanwege het duiventilprincipe minstens twee ballen op hetzelfde moment moeten landen, wat per definitie van een jongleerpatroon niet kan.

Opmerking 6.4 Uit de constructie van $G_{b,h}$ is het duidelijk dat ieder jongleerpatroon met b ballen en maximum hoogte h correspondeert met een *uniek* gesloten pad in $G_{b,h}$.

We kunnen in een gesloten pad natuurlijk wel een ander startpunt kiezen. We komen dan uit op een cyclische shift van hetzelfde patroon. Bekijk

bijvoorbeeld de patronen 1124 en 1241. Zij doorlopen hetzelfde pad maar starten niet in dezelfde toestand. Het patroon 1124 begint in de toestand 1001 en de cyclische shift 1241 begint in de toestand 1010:

$$\begin{array}{ccc}
 1001 & \xrightarrow{1} & 1010 \\
 \uparrow 4 & & \downarrow 1 \\
 1100 & \xleftarrow{2} & 1100
 \end{array}$$

Een cyclische shift nemen van een patroon is dus equivalent aan het nemen van een ander startpunt in het corresponderende gesloten pad.

Lemma 6.5 *De toestandsgraaf $G_{b,h}$ met b ballen en maximum hoogte h bevat $\binom{h}{b}$ punten en $\binom{h-1}{b-1} + \binom{h-1}{b}(b+1)$ pijlen.*

Bewijs: Het aantal punten is duidelijk gelijk aan $\binom{h}{b}$, omdat we uit de h beschikbare plekken b ballen (=enen) een plek moeten geven. Het aantal pijlen in de graaf is gelijk aan de som van alle ingraden. We bepalen dus het aantal pijlen dat in een toestand aankomt:

- Als het laatste getal van een toestand een 1 is, dan is er maar één worp mogelijk waarmee we in die toestand kunnen aankomen. Namelijk de hoogst mogelijke worp. De enige pijl die dus aankomt in zo'n toestand is de pijl met label h .
- Als het laatste getal van een toestand een 0 is, dan kunnen we daar op twee manieren zijn gekomen. Ofwel door het gooien van een worp ter hoogte van één van de b enen, ofwel door het gooien van een 0-worp. Er komen dus $b+1$ pijlen aan in zo'n toestand.

Er zijn $\binom{h-1}{b-1}$ toestanden met op de laatste plaats een 1, en $\binom{h-1}{b}$ toestanden met op de laatste plaats een 0. De som van alle ingraden (en dus ook het totale aantal pijlen) is dus gelijk aan $\binom{h-1}{b-1} + \binom{h-1}{b}(b+1)$. \square

Opmerking 6.6 Het aantal pijlen in een toestandsgraaf is natuurlijk ook gelijk aan de som van alle uitgraden. Het lemma is al bewezen, maar omdat het verder inzicht geeft in de toestandsgraaf zullen we deze insteek ook uitwerken. We bepalen hiervoor het aantal pijlen dat uit een toestand vertrekt:

- Als het eerste getal van een toestand een 1 is, dan zijn er $h+1-b$ worpen mogelijk die niet op één van de b enen uitkomen. Er vertrekken dan dus ook $h+1-b$ pijlen uit zo'n toestand.

- Als het eerste getal van een toestand een 0 is, dan betekent dat dat er geen bal is om te gooien. Er is dan maar één pijl mogelijk, namelijk de pijl met label 0.

Er zijn $\binom{h-1}{b-1}$ toestanden met op de eerste plaats een 1, en $\binom{h-1}{b}$ toestanden met op de eerste plaats een 0. De som van alle uitgraden (en dus ook het totale aantal pijlen) is dus gelijk aan $\binom{h-1}{b-1}(h+1-b) + \binom{h-1}{b}$. Je kunt nagaan dat dit gelijk is aan $\binom{h-1}{b-1} + \binom{h-1}{b}(b+1)$.

6.2 Grond- en aangeslagen patronen

In de graaf $G_{2,4}$ is te zien dat er maar één keer een pijl van een toestand naar zichzelf wijst. Dit is bij de toestand 1100, in het plaatje grijs gekleurd. We noemen zo'n toestand een *grondtoestand*. Het gesloten pad $1100 \xrightarrow{2} 1100$ correspondeert met het basispatroon $H = (2)$ met 2 ballen. Algemeen geldt dat er in iedere toestandsgraaf precies één grondtoestand is te vinden. Dit is voor de graaf $G_{b,h}$ de toestand $11\dots 1100\dots 00$ met eerst b enen en dan $h-b$ nullen. Het corresponderende patroon is dan ook altijd het basispatroon $H = (b)$ met b ballen.

Opmerking 6.7 Zij $T = t_0t_1\dots t_{h-1}$ een toestand met een pijl die daar zichzelf wijst. Dan moet gelden:

$$t_0t_1\dots t_{k-1}0t_{k+1}\dots t_{h-1} = t_1t_2\dots t_{k-1}1t_{k+1}\dots t_{h-1}0$$

Dus $t_0 = t_1 = \dots = t_{k-1} = 1$ en $t_{k+1} = t_{k+2} = \dots = t_{h-1} = 0$. Dit bewijst dat er inderdaad altijd maar één grondtoestand bestaat en dat die van de vorm is zoals hierboven beschreven.

Definitie 6.8 Patronen waarvan het pad langs de grondtoestand komt, noemen we *grondpatronen*. Patronen die daar niet langs komen noemen we *aangeslagen patronen*.

Merk op dat we dus ook patronen die niet starten in de grondtoestand, maar daar wel langs komen, ook grondpatronen noemen. Dit doen we omdat er voor die patronen wel altijd een cyclische shift bestaat die wél in de grondtoestand start.

Voorbeeld 6.9 Bekijk weer de graaf $G_{2,4}$. Een voorbeeld van een grondpatroon is 4130, maar bijvoorbeeld ook 0413. Die tweede start in de aangeslagen toestand 0110, maar de cyclische shift 4130 start in de grondtoestand 1100. Een voorbeeld van een aangeslagen patroon is 04, die start en eindigt in de toestand 0101. In $G_{2,4}$ is dit ook direct het enige aangeslagen patroon.

Lemma 6.10 *We kunnen een jongleerpatroon H_1 zonder te stoppen over laten gaan in een ander jongleerpatroon H_2 met evenveel ballen dan en slechts dan als beide patronen langs dezelfde toestand komen in de bijbehorende toestandsgraaf.*

Bewijs: Dit kunnen we doen door op de gemeenschappelijke toestand te wisselen naar het nieuwe patroon. Zij h_1 en h_2 respectievelijk de maximale hoogtes van H_1 en H_2 , en zij $h = \max\{h_1, h_2\}$. Dan is de bijbehorende toestandsgraaf $G_{b,h}$. \square

Uit lemma 6.10 volgt direct dat een patroon een grondpatroon is dan en slechts dan als het kan overgaan in het basispatroon $H = (b)$.

6.3 Paden tussen toestanden

Een van de problemen waar jongleurs tegenaan lopen is het vinden van overgangen tussen verschillende jongleerpatronen. In praktijk is de oplossing vaak om gewoon op goed geluk iets uit te proberen, maar met de bijbehorende toestandsgraaf wordt het natuurlijk al een stuk makkelijker: je zoekt dan gewoon naar een pad tussen twee toestanden uit de patronen die je wilt verbinden. Zonder de bijbehorende graaf te hebben getekend is het lastiger om snel een overgang te vinden. Bovendien: bestaat er wel altijd een pad tussen twee willekeurige toestanden? In deze paragraaf zullen we bewijzen dat toestandsgrafen altijd samenhangend zijn - er bestaat dus altijd een pad tussen twee toestanden met hetzelfde aantal ballen. Het bewijs hiervan geven we m.b.v. een algoritme waarmee we ook direct zo'n pad vinden.

Lemma 6.11 *Vanuit iedere toestand bestaat er een pad naar de grondtoestand.*

Bewijs: Het idee is dat we steeds de kleinst mogelijke worp gooien, totdat we uitkomen bij de grondtoestand. In de graaf volgen we dus steeds de pijl met het kleinste getal. Als het eerste getal van de toestand een 0 is, dan is er maar één optie: gooi 0-worpen totdat het eerste getal van de toestand een 1 is. Daarna gooien we steeds de kleinst mogelijke worp: als in de toestand $T = t_0 t_1 \dots t_{h-1}$ op plaats t_r de eerste nul staat, gooien we dus een bal van hoogte r . Dit blijven we doen totdat $r = b$ en daarmee zijn uitgekomen bij de grondtoestand. \square

Voorbeeld 6.12 We bekijken als voorbeeld de toestand $T = 001001101$ en maken m.b.v. het algoritme uit lemma 6.11 een pad naar de grondtoestand:

$$\begin{aligned} 001001101 &\xrightarrow{0} 010011010 \xrightarrow{0} 100110100 \xrightarrow{1} 101101000 \\ &\xrightarrow{1} 111010000 \xrightarrow{3} 111100000 \end{aligned}$$

Lemma 6.13 *Vanuit de grondtoestand bestaat er een pad naar iedere andere toestand.*

Bewijs: Zij T de toestand in de graaf $G_{b,h}$ waar we vanuit de grondtoestand naar toe willen lopen. We kijken naar het aantal enen aan het begin van T . Zeg dit zijn er a_0 . Dan is het idee dat we de eerste $b - a_0$ ballen van de grondtoestand zó kunnen gooien dat we in T uitkomen.

Voorbeeld: Bekijk $T = \mathbf{110}1001$. De bijbehorende grondtoestand is dan $11\mathbf{11000}$. We gooien dus de eerste twee enen van de grondtoestand zó dat we uitkomen in T :

$$11\mathbf{11000} \xrightarrow{5} 1\mathbf{110}100 \xrightarrow{7} \mathbf{110}1001 = T$$

Laten we - nu het idee duidelijk is - nog even wat preciezer opschrijven wat we nu eigenlijk doen. Zij a_0 het aantal enen aan het begin van T , z_1 het aantal nullen daarna, a_1 het aantal enen daarna, en zo verder:

$$T = \underbrace{11\dots1}_{a_0} \underbrace{00\dots0}_{z_1} \underbrace{11\dots1}_{a_1} \underbrace{00\dots0}_{z_2} \underbrace{11\dots1}_{a_2} \underbrace{00\dots0}_{\dots} 1\dots$$

We maken een pad $(p_1, p_2, \dots, p_{b-a_0})$ van lengte $b - a_0$ als volgt:

$$p_i = \begin{cases} b + z_1 & \text{als } i \leq a_1 \\ b + \sum_{k=1}^N z_k & \text{als } \sum_{k=1}^{N-1} a_k < i \leq \sum_{k=1}^N a_k \end{cases}$$

Dit algoritme stopt na eindige tijd, omdat het pad dat we maken altijd eindige lengte heeft (lengte $b - a_0$). \square

Voorbeeld 6.14 We bekijken weer als voorbeeld de toestand $T = 001001101$ en maken m.b.v. het algoritme uit lemma 6.13 een pad vanuit de grondtoestand naar T . Dit geeft de getallen a_i en z_i :

$$a_0 = 0, \quad z_1 = 2, \quad a_1 = 1, \quad z_2 = 2, \quad a_2 = 2, \quad z_3 = 1, \quad a_3 = 1$$

We vinden het volgende pad vanuit de grondtoestand naar T :

$$\begin{array}{ccccc} 111100000 & \xrightarrow{p_1 = b + z_1 = 6} & 111001000 & \xrightarrow{p_2 = b + z_1 + z_2 = 8} & 110010010 \\ & \xrightarrow{p_3 = b + z_1 + z_2 = 8} & 100100110 & \xrightarrow{p_4 = b + z_1 + z_2 + z_3 = 9} & 001001101 \end{array}$$

Stelling 6.15 *Iedere toestandsgraaf is samenhangend.*

Bewijs: Een samenhangende graaf is een graaf waarin er tussen ieder tweetal punten een pad bestaat. Dat dit bij toestandsgrafen het geval is volgt direct uit lemma 6.11 en 6.13. \square

Laten we nu het idee van een maximale hoogte even los laten. Het vinden van een overgang tussen twee toestanden wordt dan namelijk een stuk gemakkelijker. Met behulp van een methode beschreven in [9] die lijkt op patroonvergelijking (pattern matching) kunnen we vrij eenvoudig vinden wat de minimale lengte van een pad tussen twee toestanden is.

Neem als voorbeeld de toestanden $T_1 = 1001101$ en $T_2 = 1010101$. We zoeken de minimale lengte van een pad van T_1 naar T_2 . Deze toestanden hebben hetzelfde aantal ballen, dus uit stelling 6.15 volgt dat er een pad bestaat. We zetten T_1 en T_2 als volgt onder elkaar:

$$\begin{array}{ccccccc} T_1 : & 1 & 0 & 0 & 1 & \boxed{1} & 0 & \boxed{1} \\ T_2 : & & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} & 1 & \boxed{0} & 1 \end{array}$$

Hieruit is direct te zien dat we niet met één worp van T_1 naar T_2 kunnen komen, want sommige bits van T_2 staan op 0 terwijl de corresponderende bits van T_1 op 1 staan. We schuiven T_2 een plekje op en zien op dezelfde manier dat er ook geen pad van lengte twee kan bestaan:

$$\begin{array}{ccccccc} T_1 : & 1 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \\ T_2 : & & & 1 & \boxed{0} & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Het blijkt dat we na 4 keer schuiven de rijen voor het eerst zó onder elkaar hebben staan dat er geen enen boven nullen staan:

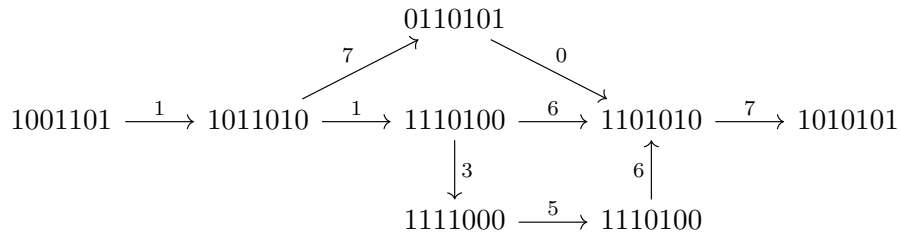
$$\begin{array}{cccccccc} T_1 : & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ T_2 : & & & & & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Een pad van T_1 naar T_2 heeft dus minimaal lengte 4. Omdat we de maximale hoogte hebben losgelaten is het nu ook niet moeilijk om een pad van lengte vier te vinden. We gooien de twee ballen die we hebben gewoon meteen op de goede plaatsen om T_2 te maken:

$$1001101 \xrightarrow{8} 00110101 \xrightarrow{0} 01101010 \xrightarrow{0} 11010100 \xrightarrow{7} 1010101$$

Dit geeft ons dus het pad 8007. Als we nu een overgang willen vinden waarbij de worpen minder hoog zijn, dan kunnen we dat doen door de landingstijdstippen om te ruilen (net als bij site swaps). Let wel op dat een overgangsrij niet cyclisch is. Het laatste en eerste getal volgen elkaar dus niet op. In dit voorbeeld vinden we op die manier de rijen 8007, 1707 en 1167.

Met onze algoritmes uit lemma 6.11 en 6.13 zouden we het pad 113567 hebben gevonden, wat een stuk langer is. Hieronder is te zien hoe het pad 113567 in de toestandsgraaf $G_{4,7}$ een omweg neemt ten opzichte van de paden 1167 en 1707.



6.4 Kralenkettingen

We zullen ons nu wat meer gaan verdiepen in de structuur van toestandsgrafen. In zijn boek [13] definieert Polster zogenaamde 'necklaces' of 'kralenkettingen'. In deze paragraaf definiëren we deze kettingen en gebruiken we ze om meer inzicht te krijgen in toestandsgrafen.

Zij $G_{b,h}$ een toestandsgraaf. Bekijk de deelgraaf $K_{b,h}$ van $G_{b,h}$ bestaande uit alle toestanden, en alle pijlen met label 0 of h . We weten:

- Uit iedere toestand met $t_0 = 1$ vertrekt een pijl met label h .
- Uit iedere toestand met $t_0 = 0$ vertrekt een pijl met label 0.
- In iedere toestand met $t_{h-1} = 1$ komt een pijl aan met label h .
- In iedere toestand met $t_{h-1} = 0$ komt een pijl aan met label 0.

In $K_{b,h}$ komt er in iedere toestand dus exact één pijl aan, en vertrekt er ook exact één pijl. Dit maakt dat $K_{b,h}$ bestaat uit een verzameling disjuncte cycli.

Definitie 6.16 Een *kralenketting* of kortweg *ketting* is een cykel in de deelgraaf $K_{b,h}$ van $G_{b,h}$.

Omdat we steeds alleen worpen van hoogte 0 of h toelaten, bestaat een kralenketting precies uit alle cyclische shifts van een toestand. Dit impliceert ook direct dat een ketting maximaal lengte h kan hebben.

Voorbeeld 6.17 De deelgraaf $K_{2,4}$ bestaat uit 2 cykels. Eén van lengte 4 en één van lengte 2:

$$\begin{array}{ccc}
 1100 & \xrightarrow{4} & 1001 & & 1010 \\
 \uparrow 0 & & \downarrow 4 & & 4 \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \right) 0 \\
 0110 & \xleftarrow{0} & 0011 & & 0101
 \end{array}$$

We kunnen een ordening maken op deze kralenkettingen. We ordenen de toestanden lexicografisch. Hierbij is de grondtoestand de grootste toestand, en de toestand met $t_1, \dots, t_{h-b} = 0$ de kleinste. Per kralenketting bekijken we nu wat de grootste toestand is en die benoemen we dan als representant van de ketting. Door de representanten op volgorde te zetten van klein naar groot vinden we vervolgens ook een totale ordening op de kettingen.

We weten al dat iedere toestandsgraaf samenhangend is (zie paragraaf 6.3), dus dat betekent ook dat er altijd een pad bestaat van de ene naar de andere ketting. We kunnen in onze ordening dus altijd verplaatsen naar een grotere of kleinere ketting. Het volgende lemma geeft aan hoe je naar een grotere ketting kunt komen.

Lemma 6.18 *Door vanuit de representant van een kralenketting de kleinst mogelijke worp te gooien komen we terecht in een grotere ketting, tenzij we al in de grootste ketting begonnen.*

Bewijs: Als $b < 2$ of $b > h - 2$, dan bestaat er maar één kralenketting. We bekijken dus alleen grafen $K_{b,h}$ met $2 \leq b \leq h - 2$. Voor de kettingen in deze grafen is het eerste getal van de representant altijd een 1, en is de kleinst mogelijke worp nooit gelijk aan h . We komen dus uit in een grotere ketting als we de kleinst mogelijke worp gooien, omdat de resulterende toestand groter is dan de representant van de ketting waar we begonnen. Als je al in de grootste ketting begint, dan blijf je daar ook. \square

Een logische vervolgvraag is nu of er ook een bewerking bestaat om naar een kleinere ketting te komen, en zo ja hoe. Het volgende vermoeden gaat hier op in:

Vermoeden 6.19 *Zij T de kleinste toestand van een kralenketting die begint met een 1. Door vanuit T een worp van hoogte 1 te gooien komen we terecht in een kleinere ketting (tenzij we al in de kleinste ketting begonnen).*

Het is niet gelukt om deze uitspraak volledig te bewijzen, vandaar dat het een vermoeden blijft. Wel wijst alles er op dat het klopt, al is de bewerking minder elegant dan bij lemma 6.18. Als je hier namelijk in de kleinste ketting begint, dan blijf je daar niet, maar kom je juist in een grotere ketting terecht.

Net als bij lemma 6.18 kunnen we aannemen dat $2 \leq b \leq h - 2$. Deze kettingen bevatten altijd minstens twee nullen. Dat betekent dat de kleinste toestand van een kralenketting die begint met een 1 altijd een 0 op de tweede plaats heeft staan. Het is dus inderdaad altijd mogelijk om van daaruit een worp van hoogte 1 te gooien. Zij T de representant van een ketting:

$$T = \underbrace{11\dots1}_{a_0} \underbrace{00\dots0}_{z_1} \underbrace{11\dots1}_{a_1} \underbrace{00\dots0}_{z_2} \underbrace{11\dots1}_{a_2} 0\dots1 \underbrace{00\dots0}_{z_i}$$

Zij M het maximum van alle z_i , en m het kleinste getal waarvoor $z_m = M$. We ruilen de eerste van de z_m nullen om met de 1 daarvoor:

$$\dots \underbrace{11\dots1}_{a_{m-1}} \underbrace{100\dots0}_{z_m} \dots \longrightarrow \dots \underbrace{11\dots1}_{a_{m-1}-1} \underbrace{0100\dots0}_{z_m-1} \dots$$

Als er in de ketting van T minstens twee opeenvolgende nullen voorkomen, dan komt bovenstaande bewerking op hetzelfde neer als een 1 gooien vanuit de kleinste toestand die met een 1 begint.

Opmerking 1: Vanwege de lexicografische ordening is de toestand waar we na deze bewerking in uit komen altijd een kleinere toestand dan waar we begonnen.

Opmerking 2: De kleinste ketting is de ketting waarbij de enen en nullen zo homogeen mogelijk zijn verdeeld.

We bekijken eerst het geval dat T minstens twee opeenvolgende enen heeft, én minstens twee opeenvolgende nullen. Op die manier weten we zeker dat T niet tot de kleinste ketting behoort. We kunnen T dan als volgt schrijven, met $T_1 = 11(\dots)1$ en $T_2 = 1(\dots)0$:

$$T = T_1 \underbrace{0\dots0}_{z_m \geq 2} T_2$$

Er zijn nu twee mogelijkheden. Ofwel de rij T_1 komt niet nog eens voor in T_2 , ofwel T is periodiek (herhaalt zichzelf). In het periodieke geval geeft onze bewerking duidelijk een kleinere ketting. Als T_1 niet nog eens voorkomt in T_2 , dan is ieder deel van T_2 lexicografisch kleiner dan T_1 . Het omwisselen van de laatste 1 van T_1 maakt T_1 kleiner, en dus komen we uit in een kleinere ketting.

Nu blijven de gevallen over dat T alleen maar 'alleenstaande' enen en/of nullen heeft. Bij deze gevallen is het moeilijk te onderscheiden wanneer je precies in de kleinste ketting bent. Deze gevallen zijn daardoor helaas nog niet gelukt om te bewijzen.

Voorbeeld 6.20 Dit zijn alle representanten van de kettingen van de toestandsgraaf $G_{4,8}$, geordend van groot naar klein:

- | | |
|-------------|--------------|
| 1. 11110000 | 6. 11010100 |
| 2. 11101000 | 7. 11010010 |
| 3. 11100100 | 8. 11001100 |
| 4. 11100010 | 9. 11001010 |
| 5. 11011000 | 10. 10101010 |

- Bekijk nu de representant van ketting 4: $T = 11100010$. We willen verplaatsen naar een kleinere ketting. Volgens ons algoritme wisselen we dus de derde 1 om met de eerste 0:

$$11100010 \longrightarrow 11010010$$

En zo komen we terecht bij de representant van ketting 7.

- Ketting 8 is periodiek. We wisselen de tweede 1 om met de eerste 0:

$$11001100 \longrightarrow 10101100$$

En 10101100 hoort bij ketting 9, met representant 11001010.

- Ketting 10 is de kleinste ketting. In deze ketting zijn de enen en nullen het meest homogeen verdeeld. Als we hierop onze bewerking uitvoeren vinden we:

$$10101010 \longrightarrow 01101010$$

En 01101010 hoort bij ketting 6, met representant 11010100. Dus als je in de kleinste ketting begint kan het zijn dat je in een grotere ketting uitkomt.

6.5 De complementaire graaf van een toestandsgraaf

Laten we eens de kleinst mogelijke toestandsgrafen bekijken. Dit zijn de grafen $G_{0,h}$ en $G_{h,h}$. Beiden bevatten ze precies één toestand en één pijl:

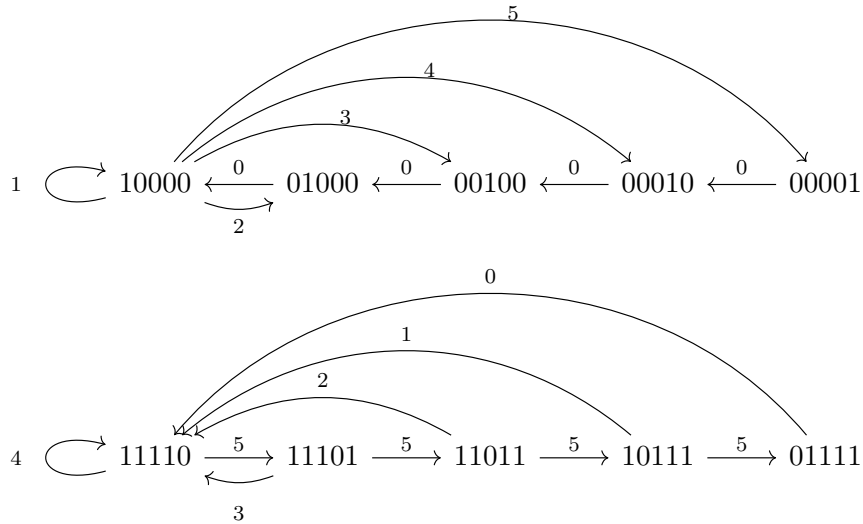
$$\underbrace{\underbrace{00 \dots 0}_h}_{\downarrow^0} \qquad \underbrace{\underbrace{11 \dots 1}_h}_{\downarrow^h}$$

Je zou kunnen zeggen dat deze twee grafen als het ware het complement zijn van elkaar. De enen in de toestand zijn vervangen door nullen, en het label bij de pijl gaat van de minimale naar maximale waarde. Laten we eens kijken of we dit idee kunnen uitbreiden naar grotere grafen. We bekijken de grafen $G_{1,h}$ en $G_{h-1,h}$. Deze grafen hebben hetzelfde aantal toestanden en pijlen, want volgens lemma 6.5 geldt voor alle $h \in \mathbb{Z}_{>0}$:

$$\text{Aantal toestanden: } \binom{h}{1} = \binom{h}{h-1} = h$$

$$\text{Aantal pijlen: } \binom{h-1}{0} + 2 \binom{h-1}{1} = \binom{h-1}{h-2} + h \binom{h-1}{h-1} = 2h - 1$$

Ook qua uiterlijk lijken deze grafen op elkaar. Om precies te zijn: de onderliggende ongelabelde en ongerichte grafen zijn gelijk. Hieronder zijn de grafen $G_{1,h}$ en $G_{h-1,h}$ getekend voor $h = 4$:



We komen nu tot de volgende definitie, zoals die in [13] wordt gegeven:

Definitie 6.21 De *complementaire graaf* $\overline{G_{b,h}}$ van een toestandsgraaf $G_{b,h}$ is de graaf die we krijgen na de volgende bewerkingen:

- Draai de richting van alle pijlen om.
- Ieder label a wordt vervangen door het label $h - a$.
- Iedere toestand $T = t_0 t_1 \dots t_{h-1}$ wordt vervangen door de toestand $\overline{T} = \bar{t}_{h-1} \bar{t}_{h-2} \dots \bar{t}_0$ met $\bar{t}_i = 1 - t_i$ voor alle i . Met andere woorden: draai de volgorde van de toestand om, en vervang iedere 1 door een 0 en iedere 0 door een 1. Zo wordt bijvoorbeeld de toestand 1001110 wordt vervangen door 1000110. We noemen \overline{T} het *complement* van de toestand T .

Volgens deze definitie zijn de grafen $G_{0,h}$ en $G_{h,h}$ inderdaad elkaars complementaire graaf. Hetzelfde geldt voor de grafen $G_{1,h}$ en $G_{h-1,h}$. Algemeen geldt dat $G_{h-b,h}$ de complementaire graaf is van $G_{b,h}$.

Stelling 6.22 Voor alle $0 \leq b \leq h$ geldt: $\overline{G_{b,h}} = G_{h-b,h}$.

Bewijs: Uit definitie 6.21 volgt direct dat de toestanden van $\overline{G_{b,h}}$ gelijk zijn aan de toestanden van $G_{h-b,h}$. Om te bewijzen dat de grafen helemaal gelijk aan elkaar zijn moeten we dus alleen nog laten zien dat de pijlen ook overeenkomen. Dit doen we door te controleren dat het volgende diagram klopt, waarbij T_1 en T_2 toestanden zijn uit de graaf $G_{b,h}$:

$$\begin{array}{ccc}
 G_{b,h} : & T_1 & \xrightarrow{r} T_2 \\
 & \vdots & \vdots \\
 & \downarrow & \downarrow \\
 G_{h-b,h} : & \overline{T}_1 & \xleftarrow{h-r} \overline{T}_2
 \end{array}$$

Laten we eerst eens alle toestanden $T = t_0 t_1 \dots t_{h-1}$ in $G_{b,h}$ bekijken die beginnen met een 0 (dus waarbij $t_0 = 0$). Voor al deze toestanden geldt dat er maar één pijl uit vertrekt, namelijk de pijl met label 0.

$$G_{b,h} : \quad 0 t_1 t_2 \dots t_{h-1} \quad \xrightarrow{0} \quad t_1 t_2 \dots t_{h-1} 0$$

De corresponderende toestanden en gelabelde pijl in het complement zien er dan als volgt uit:

$$\overline{G_{b,h}} : \quad \bar{t}_{h-1} \bar{t}_{h-2} \dots \bar{t}_1 1 \quad \xleftarrow{h} \quad 1 \bar{t}_{h-1} \dots \bar{t}_2 \bar{t}_1$$

Omdat $\bar{t}_i = 1 - t_i$ voor alle i , is het duidelijk dat dit een pijl is uit de toestandsgraaf $G_{h-b,h}$.

Nu bekijken we alle toestanden $T = t_0 t_1 \dots t_{h-1}$ in $G_{b,h}$ die beginnen met een 1 (dus waarbij $t_0 = 1$). Voor deze toestanden geldt dat er een pijl met label r vertrekt dan en slechts dan als $t_r = 0$.

$$G_{b,h} : 1 t_1 \dots t_{r-1} 0 t_{r+1} \dots t_{h-1} \xrightarrow{r} t_1 \dots t_{r-1} 1 t_{r+1} \dots t_{h-1} 0$$

De corresponderende pijlen in de complementaire graaf zien er dan als volgt uit:

$$\overline{G_{b,h}} : \bar{t}_{h-1} \dots \bar{t}_{r+1} 1 \bar{t}_{r-1} \dots \bar{t}_1 0 \xleftarrow{h-r} 1 \bar{t}_{h-1} \dots \bar{t}_{r+1} 0 \bar{t}_{r-1} \dots \bar{t}_1$$

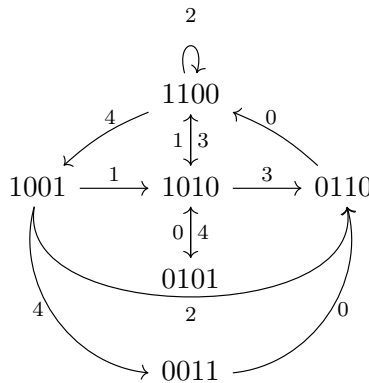
Ook dit zijn duidelijk pijlen uit de graaf $G_{h-b,h}$. We hebben nu dus laten zien dat iedere pijl in $\overline{G_{b,h}}$ een pijl is uit $G_{h-b,h}$. Omdat $\overline{G_{b,h}}$ en $G_{h-b,h}$ per definitie precies evenveel pijlen hebben volgt hieruit dat $\overline{G_{b,h}} = G_{h-b,h}$. \square

Gevolg 6.23 Voor alle $0 \leq b \leq h$ geldt:

$$\overline{\overline{G_{b,h}}} = G_{b,h} \quad \text{en} \quad \overline{G_{b,2b}} = G_{b,2b}$$

Bewijs: Dit volgt direct uit stelling 6.22. \square

Omdat toestandsgrafon $G_{b,h}$ met $h = 2b$ dus complementair zijn voor zichzelf, zijn deze grafen op een mooie symmetrische manier te tekenen. Alle toestanden die hun eigen complement zijn zetten we daarbij in het midden, en alle andere toestanden zetten we 'tegenover' hun complement. De toestandsgraaf $G_{2,4}$ is hier een mooi voorbeeld van. We zagen deze graaf al eerder in paragraaf 6.1, maar nu tekenen we hem op een symmetrische manier:



In hoofdstuk 2.8.5 uit [13] zijn er nog een aantal andere voorbeelden te vinden.

Gevolg 6.24 *Zij $H = (h_0, h_1, \dots, h_{n-1})$ een jongleerpatroon met b ballen en maximale hoogte h . Dan is het complementaire patroon $\overline{H} = (h - h_{n-1}, h - h_{n-2}, \dots, h - h_1, h - h_0)$ ook een jongleerpatroon, met $h - b$ ballen en maximale hoogte $\leq h$.*

Bewijs: Dit volgt direct uit definitie 6.21 en stelling 6.22. H wordt gerepresenteerd door een gesloten pad in $G_{b,h}$. Door de pijlen om te keren en de labels aan te passen volgens definitie 6.21, vinden we het gesloten pad horend bij het patroon \overline{H} . Dit gesloten pad bevindt zich in de graaf $\overline{G_{b,h}} = G_{h-b,h}$, dus \overline{H} is een jongleerpatroon met $h - b$ ballen en maximale hoogte $\leq h$. \square

De complementaire graaf van een toestandsgraaf geeft ons dus een makkelijke manier om vanuit een gegeven jongleerpatroon weer een nieuw patroon te vinden.

Voorbeeld 6.25 Stel je hebt het patroon 5023551, met 3 ballen en maximum hoogte 5. Het bijbehorende complementaire patroon is dan 4002350, wat een patroon is met 2 ballen en maximum hoogte 5.

In praktijk zou het voor jongleurs natuurlijk handig en leuk zijn als het complementaire patroon hetzelfde aantal ballen heeft als het oorspronkelijke patroon. Voor patronen met b ballen en maximum hoogte $h \leq 2b$ kunnen we dit regelen. Zij H een patroon dat hieraan voldoet. We kunnen H dan zien als een patroon uit de toestandsgraaf $G_{b,2b}$, ook al wordt die maximale hoogte van $2b$ misschien niet bereikt. Het complementaire patroon is dan ook weer een patroon met $2b - b = b$ ballen.

Merk op dat dit op hetzelfde neerkomt als in het complementaire patroon \overline{H} bij ieder getal $2b - h$ op te tellen.

Voorbeeld 6.26 We bekijken weer het patroon 5023551, met 3 ballen en maximum hoogte 5. Dit patroon is terug te vinden in de toestandsgraaf $G_{3,6}$, want $5 < 6$. Het bijbehorende complementaire patroon is dan 5113461, wat ook weer een patroon is met 3 ballen, maar nu met maximum hoogte 6.

7 Discussie

We hebben in deze scriptie gezien dat jongleren goed met een wiskundige taal beschreven kan worden. De eerste aanzet daartoe dateert uit het eind van de 20e eeuw. Het geeft veel inzicht in hoe patronen in elkaar zitten, wat vooral voor jongleurs erg handig is. Zonder notatie is het lastig om een nieuw patroon te leren. Je moet dan iemand om uitleg vragen, of (een video van) het patroon heel goed bekijken, net zo lang tot je begrijpt wat er gebeurt en het na kan doen. Met de wiskundige notatie zoals we die hebben beschreven - inmiddels gebruikelijk in de jongleerwereld - kunnen mensen een patroon leren door gewoonweg naar de cijfers te kijken. Natuurlijk zijn er nog altijd veel aspecten van jongleren die (nog) niet in een notatie te vatten zijn. Zoals bijvoorbeeld hóe je een bal precies moet gooien, los van de hoogte, of wát je moet gooien. Maar misschien is het ook niet nodig om álles te kunnen noteren. Net als dat er bij een muziekstuk - ondanks de noten op papier - grote verschillen kunnen zijn in de uitvoering, is dat bij jongleren niet anders. Een notatie maakt de communicatie een stuk makkelijker, maar kan nooit alles beschrijven.

Aan het begin van deze scriptie hebben we een heel aantal aannames gedaan. Een aantal daarvan waren noodzakelijk, maar de meesten waren vooral bedoeld om het model eenvoudig te houden. Zo zouden we bijvoorbeeld de aanname dat we maar één bal tegelijkertijd kunnen gooien best los kunnen laten. In praktijk bestaan er veel patronen waarbij er meerdere ballen tegelijk worden gegooid. Niet alleen door meer handen (of jongleurs) te gebruiken, maar ook door meerdere ballen met één hand te gooien. Er is hierover al redelijk wat geschreven, zie bijvoorbeeld [13] en [7], maar voor deze scriptie werd dit te veel om te behandelen.

Er zijn veel verschillende aspecten aan bod gekomen, zoals het aantal ballen van een patroon, de kleurperiode, toestandgrafien, en meer. Daarmee zijn er ook een aantal 'losse eindjes' ontstaan waar nog een verdere analyse op zou kunnen volgen. We noemen er een paar:

- Met de stelling van Hall (paragraaf 3.3) hebben we gezien dat er altijd een jongleerbare permutatie bestaat van een kandidaatrij. Het is echter onduidelijk *hoeveel* van die permutaties er precies zijn. Voor kleine waarden van n hebben we het aantal gevonden, maar een algemene formule ontbreekt. Dit is iets waar ook in de literatuur nog geen goed antwoord op gevonden is.

- In paragraaf 5.2 hebben we het aantal patronen bepaald met minimale kleurperiode k en b ballen. We telden daar echter nog wel alle cyclische shifts mee. Het zou leuk zijn als er een manier te vinden is om deze dubbel getelde patronen er nog uit te halen (dit lijkt niet eenvoudig met een Möbius inversie te doen). Daar zou dan ook uit volgen wat het aantal patronen is waarbij de periode gelijk is aan de kleurperiode.
- In paragraaf 6.19 hebben we een vermoeden geformuleerd waarmee we van een ketting naar een kleinere ketting kunnen verplaatsen. Het bewijs hiervan is daar voor een deel beschreven, maar is nog niet af. Wel denken we vrij zeker te weten dat het vermoeden klopt, dus dit is een punt om eventueel nog op door te gaan.

Zoals muziek meer is dan de noten op papier, is ook jongleren meer dan het model dat we in deze scriptie hebben gegeven. Het wiskundig denken over jongleren geeft echter wel veel nieuwe inzichten in wat er mogelijk is, en veel resultaten blijken - ondanks de vele aannames die we doen - ook in praktijk goed bruikbaar.

Referenties

- [1] Joe Buhler, David Eisenbud, Ron Graham, and Colin Wright. Juggling drops and descents. *The American Mathematical Monthly*, 101(6):507–519, 1994.
- [2] Joe Buhler and Ron Graham. Juggling patterns, passing, and posets. *Mathematical Adventures for Students and Amateurs*, pages 99–116, 2004.
- [3] Steve Butler. Juggling Counts, Mathematics of Juggling Course. <https://www.jugglingcounts.org/course>, 2021. Solutions to homework 2.
- [4] Steve Butler. Maths of Juggling: Hall’s Juggling Theorem 1 – how it works. <https://www.youtube.com/watch?v=7ybtJb-xttY>, April 2021.
- [5] Steve Butler. Maths of Juggling: Hall’s Juggling Theorem 2 – why it works. <https://www.youtube.com/watch?v=zwWKYyeHwB4>, April 2021.
- [6] Steve Butler. Juggling Counts, a collection of resources for the mathematics of juggling. <https://www.jugglingcounts.org>, 2022.
- [7] Steve Butler, Jeongyoon Choi, Kimyung Kim, and Kyuhyeok Seo. Enumerating multiplex juggling patterns. *Journal of Integer Sequences*, 22(19.1.7), 2019.
- [8] Steve Butler, Fan Chung, Jay Cummings, and Ron Graham. Juggling card sequences. *Journal of Combinatorics*, 8(3):507–539.
- [9] Jean Cardinal, Steve Kremer, and Stefan Langerman. Juggling with pattern matching. *Theory of Computing Systems*, 39(3):425–437, 2006.
- [10] OEIS Foundation. Entry A003111 in The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. <http://oeis.org/A003111>, 2022.
- [11] Marshall Hall. A combinatorial problem on abelian groups. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 3(4):584–587, 1952.
- [12] Mees Jager. How to juggle the proof for every theorem. B.S. thesis, 2020.
- [13] Burkard Polster. *The mathematics of juggling*. Springer, 2003.