

RADBOUD UNIVERSITEIT NIJMEGEN



FACULTEIT DER NATUURWETENSCHAPPEN, WISKUNDE EN INFORMATICA

Het tellen van gelabelde bomen en parkeerfuncties: de formules van Cayley

BACHELORSRIPTIE WISKUNDE

Auteur:
Inge VAN GASTEL

Begeleider:
dr. Sep THIJSSSEN

Tweede lezer:
dr. Wieb BOSMA

5 augustus 2023

Inhoudsopgave

1	Notatie en terminologie	3
1.1	Voorkennis	3
1.1.1	Binomium van Newton en de afgeleide van het binomium van Newton	4
1.1.2	Stirling-getallen van de tweede soort	4
1.1.3	Voortbrengende functies	5
1.1.4	F - en G -structuren	5
1.1.5	Lagrange inversion theorem	6
2	Introductie	6
3	De formule van Cayley	7
3.1	Bewijs: Prüfer code	7
3.2	Bewijs: voortbrengende functies	10
3.3	De gegeneraliseerde formule van Cayley	12
3.4	Voortbrengende functies	14
4	Parkeerfuncties	17
5	Symmetrieën en overige resultaten	19
5.1	Symmetrieën tussen bladeren en afdalingen in gewortelde bomen	20
5.2	Symmetrieën tussen bladeren en ongekozen parkeerplekken in parkeerfuncties	23
5.3	Probabilistische eigenschappen parkeerfuncties	27

Samenvatting

De formule van Cayley geeft het aantal verschillende bomen dat gevormd kan worden met n gelabelde punten; dit is n^{n-2} . Deze formule is te generaliseren naar het aantal verschillende bossen die bestaan uit n gelabelde punten, verdeeld onder k gewortelde bomen; dit aantal is kn^{n-k-1} . Opvallend is de link tussen gelabelde bomen en bossen en andere wiskundige structuren, zoals, in het bijzonder, parkeerfuncties. Zo kunnen we een bijectie maken tussen parkeerfuncties en gelabelde bomen. Het aantal parkeerfuncties $[n] \rightarrow [n]$ wordt gegeven door $(n+1)^{n-1}$ en het aantal gegeneraliseerde parkeerfuncties $[k] \rightarrow [n]$ wordt gegeven door $(n-k+1)(n+1)^{k-1}$. Verder kunnen we een bepaalde symmetrie vinden binnen gelabelde bomen en parkeerfuncties, en kunnen deze aan elkaar relateren.

In deze scriptie gaan we kijken naar een aantal verschillende manieren om de formule van Cayley te bewijzen en bekijken we gerelateerde onderwerpen, zoals de link met parkeerfuncties, voortbrengende functies en de eerder genoemde symmetrie.

1 Notatie en terminologie

In dit hoofdstuk geven we enkele definities en notaties die zullen terugkomen in dit werk, evenals de voorkennis die nodig is om bepaalde resultaten in dit werk te bewijzen.

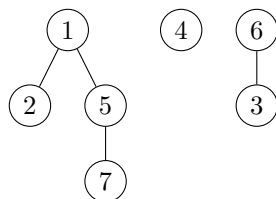
In dit werk zullen we k en n steeds als natuurlijke getallen beschouwen, tot welke 0 behoort. Verder noteren we $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ als de verzameling natuurlijke getallen van 1 tot en met n , met de conventie dat $[0] = \emptyset$.

Definitie 1.1. Enkele definities in de grafentheorie:

- (i) Een *boom* is een verbonden graaf zonder cykels.
- (ii) Een *gewortelde boom* is een boom waarbij één punt als wortel wordt aangewezen.
- (iii) Een *bos* is een graaf zonder cykels. Een *bos* kan in het bijzonder worden beschouwd als een verzameling bomen.
- (iv) Een *geworteld bos* is een bos dat bestaat uit gewortelde bomen.
- (v) De *graad* van een punt v in een boom of bos is het aantal punten waarmee v een directe verbinding heeft.
- (vi) Een *blad* in een (gewortelde) boom is een niet-wortel van graad 1, of een wortel van graad 0.

Opmerking 1.2. In dit werk kijken we naar *gelabelde* bomen en bossen, wat inhoudt dat de punten in de bomen en bossen unieke labels krijgen. Gebruikelijk zijn dit de punten uit $[n]$. Verder, als we gewortelde bomen tekenen, wordt de wortel standaard gegeven door het bovenste punt, welke uniek is.

Voorbeeld 1.3. We geven een voorbeeld van een geworteld bos in Figuur 1.



Figuur 1: Geworteld bos met 3 bomen en 7 punten. De wortels in dit bos zijn de punten 1, 4 en 6. De bladeren in dit bos zijn de punten 2, 3, 4 en 7. De punten 1 en 5 hebben graad 2. De punten 2, 3, 6 en 7 hebben graad 1. Het punt 4 heeft graad 0.

1.1 Voorkennis

In deze sectie geven we enkele stellingen en begrippen in de wiskunde die we in dit werk gebruiken om andere resultaten te bewijzen.

1.1.1 Binomium van Newton en de afgeleide van het binomium van Newton

Het binomium van Newton wordt gegeven door:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k,$$

waarbij n een natuurlijk getal is.

Door de afgeleide te nemen naar y krijgen we de volgende gelijkheid:

$$n(x + y)^{n-1} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k-1}.$$

Merk op dat de sommatie ook bij $k = 0$ mag beginnen, omdat deze 0 geeft, zodat de gelijkheid nog steeds geldig is.

1.1.2 Stirling-getallen van de tweede soort

Het Stirling-getal van de tweede soort, $S(n, k)$, telt het aantal manieren om de elementen, uit een verzameling met n elementen, te verdelen over k niet-lege deelverzamelingen, waarbij dus $0 \leq k \leq n$. Merk op dat $S(0, 0) = 1$ en $S(n, 0) = 0$ voor $n \geq 1$. We kunnen een recursie afleiden voor $1 \leq k \leq n$.

We tellen het aantal manieren om de elementen uit $[n]$ te verdelen over k niet-lege deelverzamelingen. Aan de ene kant wordt dit gegeven door $S(n, k)$. Aan de andere kant kunnen we twee gevallen onderscheiden:

- *Geval 1:* n is het enige element in zo'n deelverzameling. In dat geval worden de elementen uit $[n-1]$ verdeeld over $k-1$ niet-lege deelverzamelingen, dus tellen we $S(n-1, k-1)$.
- *Geval 2:* n is niet het enige element in zo'n deelverzameling. In dat geval kunnen we n uit deze deelverzameling halen, want dan is deze nog steeds niet-leeg, en houden we $n-1$ elementen over die over k deelverzamelingen zijn verdeeld. We kunnen n dan weer terug stoppen in een van de k deelverzamelingen, dus tellen we $kS(n-1, k)$.

We krijgen de volgende recursie:

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k),$$

waarbij de randwaarden worden gegeven door:

$$\begin{aligned} S(n, n) &= 1, \\ S(n, 1) &= 1. \end{aligned}$$

We kunnen namelijk op slechts één manier n elementen over n niet-lege deelverzamelingen verdelen, en op slechts één manier n elementen over 1 niet-lege deelverzameling verdelen, namelijk de verzameling zelf.

1.1.3 Voortbrengende functies

We gaan het enkele keren hebben over voortbrengende functies, waarbij we onderscheid kunnen maken tussen zogenaamde OGFs en EGFs, welke we gaan definiëren.

Definitie 1.4. De *OGF* (Ordinary Generating Function) van een rijtje $(a_n)_{n \geq 0}$ wordt gegeven door:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

De coëfficiënt voor x^n in de functie $F(x)$ is dus a_n .

Definitie 1.5. De *EGF* (Exponential Generating Function) van een rijtje $(b_n)_{n \geq 0}$ wordt gegeven door:

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{x^n}{n!}.$$

De coëfficiënt voor $\frac{x^n}{n!}$ in de functie $G(x)$ is dus b_n .

Een voortbrengende functie kan een rijtje in compacte vorm vastleggen of helpen bij het oplossen van combinatorische vraagstukken.

1.1.4 \mathcal{F} - en \mathcal{G} -structuren

De theorie in deze sectie is gebaseerd op [3].

Een *structuur*, vaak genoemd naar een letter, bijvoorbeeld een \mathcal{F} -structuur, op een eindige verzameling U kan worden gezien als een 'regel' op de verzameling U . Een \mathcal{F} -structuur op een verzameling U noteren we als $\mathcal{F}[U]$. Deze structuur kan bijvoorbeeld die van een (gewortelde) boom zijn.

Stelling 1.6. *Zij \mathcal{F} en \mathcal{G} twee soorten structuren zodat $\mathcal{G}[\emptyset] = \emptyset$. Zij $F(x)$ de EGF van een \mathcal{F} -structuur en $G(x)$ de EGF van een \mathcal{G} -structuur. De samenstelling $(F \circ G)(x)$ is dan de EGF die tot de volgende structuren behoort: partities van punten in blokken waarbij de blokken een \mathcal{F} -structuur hebben, en de punten binnen elk blok een \mathcal{G} -structuur hebben. Bovendien voldoet de samenstelling $F \circ G$ aan:*

$$(F \circ G)(x) = F(G(x)).$$

We geven een voorbeeld van zulke samenstelling gerelateerd aan bomen/bossen.

Voorbeeld 1.7. Zij de \mathcal{F} -structuur simpelweg een 'verzameling' (geen verdere structuur). De EGF van deze \mathcal{F} -structuur wordt dan gegeven door

$$F(x) = e^x.$$

Zij de \mathcal{G} -structuur 'gewortelde bomen'. Merk op dat voor deze \mathcal{G} -structuur inderdaad geldt dat $\mathcal{G}[\emptyset] = \emptyset$, omdat er geen gewortelde bomen bestaan zonder punten. De EGF van deze \mathcal{G} -structuur wordt dan gegeven door

$$G(x) = \sum_{n \geq 1} g_n \frac{x^n}{n!},$$

waarbij g_n het aantal gewortelde bomen op n punten. De samenstelling van de EGFs, $F \circ G$, wordt dan gegeven door

$$(F \circ G)(x) = e^{G(x)}.$$

Dit is dan de EGF van de samenstelling van deze twee structuren: gewortelde bossen.

1.1.5 Lagrange inversion theorem

We geven een formulatie van de formule die bekend staat onder de naam 'Lagrange inversion theorem'.

Stelling 1.8. *Zij z gegeven als functie van w :*

$$z = f(w),$$

waarbij f analytisch is in het punt a (lokaal oneindig differentiëerbaar) en $f'(a) = 0$. Dan kunnen we w uitdrukken als functie van z : $w = g(z)$. Deze functie g wordt gegeven door de machtreeks

$$g(z) = a + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \frac{(z - f(a))^n}{n!}, \quad (1)$$

waarbij

$$g_n = \lim_{w \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dw^{n-1}} \left[\left(\frac{w - a}{f(w) - f(a)} \right)^n \right].$$

Er bestaan vele alternatieve formulaties en diverse bewijzen van deze stelling. Enkele hiervan zijn gegeven in [9].

2 Introductie

In 1889 geeft Cayley [5] de formule die het aantal gelabelde bomen met n punten telt:

$$|T(n)| = n^{n-2}, \quad (2)$$

waarbij $T(n)$ de verzameling van gelabelde bomen op n punten is. Cayley laat zien dat dit resultaat geldig is voor $n = 4$ en $n = 6$, maar geeft geen bewijs van de formule voor algemene n . De formule werd voor het eerst geven door Borchardt [4] in 1860, welke hij bewijst met behulp van een determinant. Toch is de formule bekend geworden onder de naam Cayley en niet Borchardt. Vermoedelijk is dit te danken aan zijn verlengde notities omtrent de formule, al refereert Cayley wel naar het artikel van Borchardt. Pas in 1918 wordt het resultaat weer bewezen: Prüfer [13] maakte een bijjectie tussen gelabelde bomen op n punten en rijen van lengte $n - 2$ met elementen uit $[n]$. Deze bijjectie wordt besproken in Sectie 3.1.

Ondertussen zijn er vele elegante bewijzen bekend voor de formule van Cayley, zowel van andere bijjecties, maar ook bewijzen die gebruik maken van lineaire algebra (bijzonder geval van Kirchhoff's theorem [6]), volledige inductie, recursies en dubbeltelling (Pitman 1999 [12]). Een aantal hiervan zijn verzameld in het hoofdstuk over Cayley's formule in Proofs from THE BOOK [1]: een boek dat de meest elegante bewijzen van wiskundige stellingen bevat.

Opvallend is de link tussen gelabelde bomen en bossen en andere wiskundige structuren, zoals, in het bijzonder, parkeerfuncties, en andere combinatorische resultaten omtrent gelabelde bomen en bossen. Zo wordt de eerste bijjectie tussen parkeerfuncties en gelabelde bomen geleverd door Schützenberger [15] in 1968 en, op moment van schrijven, zijn de nieuwste resultaten zo recent als 2023 (Kenyon en Yin [11]). Meer over het laatste wordt beschreven in Sectie 5.3.

In deze scriptie bekijken we eerst enkele bewijzen voor de formule van Cayley (2). We kijken naar een bijjectie met Prüfer codes in Sectie 3.1, een bewijs met behulp van voortbrengende functies in Sectie 3.2, en een bewijs van de gegeneraliseerde formule van Cayley in Sectie 3.3, welke het aantal bossen met n punten en k gewortelde bomen telt. Deze bewijzen we middels een recursie. Hierna bekijken we de voortbrengende functie voor zulke bossen in Sectie 3.4. Hoofdstuk 4 gaat over parkeerfuncties. Hier zien we dat de formule die het aantal parkeerfuncties telt te relateren is aan de (gegeneraliseerde) formule van Cayley, en maken we een bijjectie tussen parkeerfuncties en bomen. In Hoofdstuk 5 bekijken we een symmetrie in gewortelde bomen tussen afdalingen en bladeren (Sectie 5.1), en een symmetrie in parkeerfuncties tussen afdalingen en ongekozen parkeerplekken (Sectie 5.2). Deze kunnen we middels een bijjectie aan elkaar linken. Verder kijken we nog kort naar een recent onderzoek over probabilistische eigenschappen van parkeerfuncties. Dit doen we in Sectie 5.3.

3 De formule van Cayley

In dit hoofdstuk bekijken we verschillende bewijzen en resultaten omtrent de formule van Cayley (2).

3.1 Bewijs: Prüfer code

In 1918 gaf Prüfer [13] een zogenaamde *Prüfer code* die een gelabelde boom met n punten uniek vastlegt in een rijtje van lengte $n - 2$.

Definitie 3.1. Neem een boom met n punten uit $[n]$. De *Prüfer code* $(a_1, a_2, \dots, a_{n-2})$ van deze boom wordt als volgt verkregen: verwijder het kleinste blad en noteer a_1 als het punt waar die aan vast zat. Herhaal om a_2, \dots, a_{n-2} te verkrijgen, totdat er twee punten in de boom overblijven.

Stelling 3.2. *Er bestaat een bijjectie tussen gelabelde bomen met n punten en Prüfer codes van lengte $n - 2$.*

Voor deze bijjectie gebruiken we algoritmes om een Prüfer code te maken uit een gelabelde boom en vice versa. Het algoritme om een Prüfer code te maken uit een gelabelde boom wordt in Definitie 3.1 al kort beschreven, maar wordt nu in een algemeen algoritme vastgelegd.

Gelabelde boom naar Prüfer code. Zij T een gelabelde boom met puntenverzameling $[n]$, waarbij $n \geq 2$. We gebruiken het volgende algoritme, waar we beginnen met een lege rij als Prüfer code:

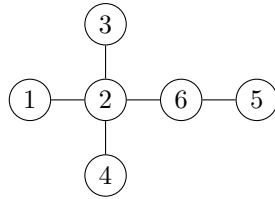
1. Als $|T| \leq 2$, stop.

2. Zij $v = \min\{v : v \text{ is een blad}\}$.
3. Zij v' het punt die verbonden is met v . Voeg v' toe achteraan de Prüfer code.
4. Verwijder v uit de boom. Begin bij stap 1. met de, nu kleinere, boom T .

Prüfer code naar gelabelde boom. Zij $n \geq 2$ en $P = (a_1, a_2, \dots, a_{n-2})$ een Prüfer code, ook wel de code genoemd. We gebruiken het volgende algoritme om een gelabelde boom met n punten te construeren:

1. Teken de punten $1, 2, \dots, n$. Dit zal de boom worden.
2. Zij $L = (1, 2, \dots, n)$ de lijst.
3. Als $|L| = 2$, verbind de punten in de lijst en stop.
4. Zij a het kleinste getal in de lijst die niet in de code zit, dus $a = \min(L \setminus P)$. Zij b het kleinste getal in de code, $b = \min P$. Verbind a en b .
5. Verwijder a uit de lijst L , en b uit de code P . Begin weer bij 3.

Voorbeeld 3.3. We maken de Prüfer code van een boom $T \in T(6)$ volgens het algoritme zoals hierboven gegeven.

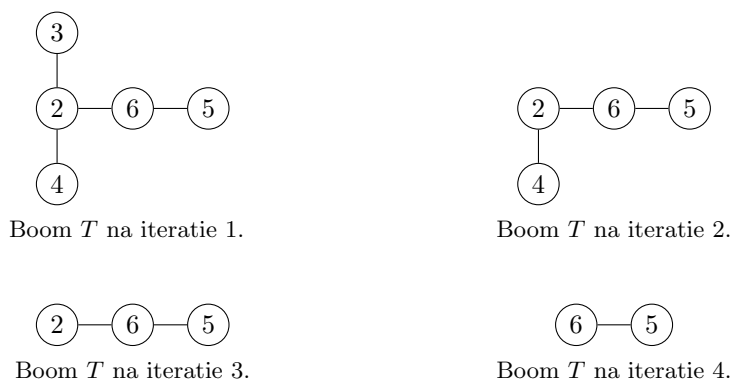


Figuur 2: Boom $T \in T(6)$ uit Voorbeeld 3.3.

De Prüfer code van boom T in Figuur 2 noteren we als P . Hieronder geven we het verloop van het algoritme per iteratie. Het afbreken van de boom T wordt weergegeven in Figuur 3.

1. $v = 1$, $P = (2)$.
2. $v = 3$, $P = (2, 2)$.
3. $v = 4$, $P = (2, 2, 2)$.
4. $v = 2$, $P = (2, 2, 2, 6)$.
5. $|T| = 2$, dus stop.

De Prüfer code van boom T in Figuur 2 wordt dus gegeven door $(2, 2, 2, 6)$.



Figuur 3: Het afbreken van boom T in Figuur 2 volgens het algoritme om van een boom naar zijn Prüfer code te gaan.

Op basis van deze algoritmes kunnen we Stelling 3.2 bewijzen.

Bewijs van Stelling 3.2. Voor $n \geq 2$, zij \mathcal{T} de verzamling gelabelde bomen met puntenverzamling $[n]$ en zij \mathcal{P} de verzameling Prüfer codes van lengte $n - 2$. Zij $\phi: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{P}$ de afbeelding die een gelabelde boom op zijn Prüfer code volgens het algoritme dat hierboven is beschreven. Het volstaat dan om na te gaan dat deze afbeelding goed gedefiniëerd is, zijn inverse $\phi^{-1}: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{T}$ het algoritme van Prüfer code naar gelabelde boom zoals hierboven beschreven is, en dat deze ook goed gedefiniëerd is. We noteren de afbeelding die Prüfer codes op gelabelde bomen afbeeldt gegeven door het algoritme hierboven vooralsnog als $\Phi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{T}$.

Het algoritme van gelabelde boom naar Prüfer code zal na $n - 2$ iteraties eindigen, omdat stap 4 telkens een punt uit de boom verwijdert. Het algoritme is dus eindig. Verder is elke stap goed gedefiniëerd:

1. Er zijn altijd meer of minder dan 2 punten in de boom.
2. In een boom met minstens 2 punten zijn er altijd minstens 2 punten van graad 1 (stelling in de grafentheorie). Omdat elk punt een uniek label heeft, is vervolgens altijd een kleinste label te vinden.
3. Omdat v een punt is van graad 1, is hij met één ander punt v' verbonden.
4. Het verwijderen van v geeft weer een boom terug. Namelijk, v' was een punt met graad groter dan 1, omdat uit stap 1 volgde dat de boom meer dan 2 punten had.

De afbeelding $\phi: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{P}$ is dus goed gedefiniëerd.

Het algoritme van Prüfer code naar gelabelde boom zal na $n - 2$ iteraties eindigen, omdat stap 5 telkens een element uit de lijst verwijdert en het algoritme bij stap 3 stopt zodra er nog 2 elementen in de lijst zitten. Het algoritme is dus eindig. Verder is elke stap goed gedefiniëerd:

1. Triviaal.

2. Triviaal.
3. Voor $n = 2$ triviaal. Voor $n > 2$ bevat de lijst minstens 3 elementen. Het doorlopen van stap 5 verlaagt het aantal elementen van de lijst met 1, waardoor de lijst uiteindelijk 2 elementen zal hebben.
4. De lijst heeft meer elementen dan de Prüfer code. Het ladenprincipe (Pigeonhole Principle) stelt dan dat er minstens één getal in de lijst is die niet in de Prüfer code bevat is.
5. Triviaal.

De afbeelding $\Phi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{T}$ is dus goed gedefiniëerd.

Voor $n = 2$ is het duidelijk dat deze afbeeldingen elkaars inverses zijn, omdat de Prüfer code leeg is. Zij $n > 2$ en $T \in \mathcal{T}$. In het algoritme van de afbeelding $\phi: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{P}$ voegen we een element b toe aan de code P als deze verbonden is met het kleinste blad a en verwijderen vervolgens deze verbinding. In het algoritme van afbeelding $\Phi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{T}$ verwijderen we een element b uit P als dit het kleinste element van P is en verbinden we deze met het element a , wat het kleinste element uit L is dat niet in P bevat is. Het is dan duidelijk dat deze a tijdens deze iteratie in het algoritme het kleinste blad is in de boom. Hieruit volgt dat ϕ en Φ elkaars inverses zijn en dat de afbeelding $\phi: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{P}$ dus bijectief is. \square

Het bestaan van een bijectie in Stelling 3.2 geeft dan aanleiding tot de formule van Cayley (2).

Bewijs formule van Cayley (2). Er bestaat slechts één boom voor $n = 1, 2$. Neem $n \geq 3$ en zij T een boom met n punten uit $[n]$. Hieruit kunnen we een Prüfer code (a_1, \dots, a_{n-2}) van lengte $n - 2$ maken. Voor elke $i \in [n - 2]$ zijn er n mogelijkheden voor a_i . Er zijn dus n^{n-2} Prüfer codes van lengte $n - 2$. Omdat er een bijectie tussen aantal gelabelde bomen met n punten en Prüfer codes van lengte $n - 2$ bestaat (Stelling 3.2), moet dit aantal gelijk aan elkaar zijn. Het aantal gelabelde bomen met n punten is gelijk aan n^{n-2} . \square

3.2 Bewijs: voortbrengende functies

Willis [19] geeft in 2022 een korte inleiding in de combinatoriek door verschillende bewijzen van de formule van Cayley door te nemen. We gaan één van deze bewijzen, die gebruikt maakt van voortbrengende functies en Langrange inversion theorem, bespreken.

Het volgende bewijs voor de formule van Cayley (2) is gebaseerd op [19].

Bewijs formule van Cayley (2). Zij $T(n)$ de verzameling gelabelde bomen op n punten, $T'(n)$ de verzameling gelabelde én gewortelde bomen met n punten, en $F(n)$ de verzameling gelabelde én gewortelde bossen met n punten. We willen laten zien dat $|T(n)| = n^{n-2}$. Hiertoe leiden we relaties af tussen $|T(n)|$, $|T'(n)|$ en $|F(n)|$, en hun EGFs.

We kunnen van een boom $T \in T(n)$ een gewortelde boom $T' \in T'(n)$ maken door één van zijn n wortels te kiezen. We krijgen dan

$$|T'(n)| = n|T(n)|.$$

Vergelijkbaar kunnen we van een bos $F \in F(n)$ een boom $T \in T(n+1)$ maken door een extra punt toe te voegen en deze te verbinden met alle wortels in F . We krijgen dan

$$|F(n)| = |T(n+1)|.$$

Zij $Y(x) = \sum_{n \geq 1} |T'(n)| \frac{x^n}{n!}$ en $Z(x) = \sum_{n \geq 0} |F(n)| \frac{x^n}{n!}$ de EGFs voor $|T'(n)|$ en $|F(n)|$ respectievelijk. Merk op dat de sommatie bij de EGF van $|T'(n)|$ bij $n = 1$ kan beginnen, omdat $|T'(0)| = 0$. Er zijn namelijk geen gewortelde bomen zonder punten.

Omdat we een geworteld bos kunnen beschouwen als een verzameling van gewortelde bomen, kunnen we schrijven:

$$Z(x) = e^{Y(x)}.$$

Hierbij maken we gebruik van Stelling 1.6, waarbij de \mathcal{F} -structuur de 'verzameling' is, en de \mathcal{G} -structuur de gewortelde bomen (zie Voorbeeld 1.7).

Met behulp van de hierboven beschreven relaties krijgen we:

$$\begin{aligned} Z(x) &= \sum_{n \geq 0} |F(n)| \frac{x^n}{n!} \\ &= \frac{1}{x} \sum_{n \geq 0} |T'(n+1)| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= \frac{1}{x} \sum_{n \geq 1} |T'(n)| \frac{x^n}{n!} \\ &= \frac{1}{x} Y(x). \end{aligned}$$

In totaal krijgen we dan $x = Y(x)e^{-Y(x)}$. Om een uitdrukking voor $Y(x)$ te krijgen gebruiken we Lagrange inversion theorem (Formule (1)). Hiervoor gaan we na dat de functie $f(y) = ye^{-y}$ analytisch is in $y = 0$ en $f'(0) \neq 0$. Het is duidelijk dat de functie f overal analytisch is, dus ook in $y = 0$. Verder hebben we dan $f'(y) = (1-y)e^{-y}$, zodat $f'(0) = 1 \neq 0$. We kunnen de EGF dan uitdrukken als:

$$Y(x) = \sum_{n \geq 1} g_n \frac{x^n}{n!},$$

waarbij

$$\begin{aligned} g_n &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}} \left(\frac{y}{ye^{-y}} \right)^n \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}} e^{ny} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} n^{n-1} e^{ny} \\ &= n^{n-1}. \end{aligned}$$

We hebben dan $|T'(n)| = g_n = n^{n-1} = n|T(n)|$. Het aantal gelabelde bomen met n punten is dan n^{n-2} . \square

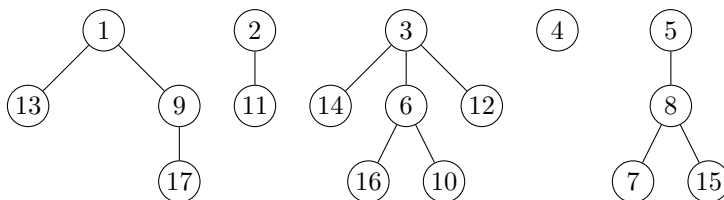
3.3 De gegeneraliseerde formule van Cayley

In deze sectie bekijken we gewortelde bossen met n punten en k bomen en geven een generalisatie van de formule van Cayley. Deze is te reduceren tot de formule van Cayley, waar we een bos hebben met één boom.

Definitie 3.4. We definiëren $T(n, k)$, met $0 \leq k \leq n$, als de verzameling van gelabelde, gewortelde bossen met n punten uit $[n]$ en wortels uit $[k]$. Verder schrijven we $T(n, n) = T(n)$ als de verzameling gelabelde bomen met n punten (met wortel 1).

Opmerking 3.5. We merken op dat het voor bomen uit $T(n)$ in Definitie 3.4 niet uitmaakt of deze een wortel heeft, omdat deze wortel altijd het punt 1 zou zijn.

Voorbeeld 3.6. Een voorbeeld van een bos $T \in T(17, 5)$ wordt gegeven in Figuur 4.



Figuur 4: Een voorbeeld van een bos $T \in T(17, 5)$.

Het volgende resultaat staat bekend als *de gegeneraliseerde formule van Cayley*:

Stelling 3.7. Zij $T(n, k)$ als in Definitie 3.4 en $1 \leq k \leq n$. Dan geldt:

$$|T(n, k)| = kn^{n-k-1}. \quad (3)$$

Het bewijs dat we geven is gebaseerd op [17].

Bewijs. We leiden een recursie voor $T(n, k)$ af. Zij $1 \leq k \leq n$ en bekijk bossen uit $T(n, k)$. Punt 1 is dan een wortel en kan verbonden zijn met punten uit $\{k+1, k+2, \dots, n\}$, dus punt 1 heeft graad $i \in \{0, 1, \dots, n-k\}$. Dit geeft $\binom{n-k}{i}$ mogelijkheden voor de punten die verbonden zijn met punt 1. We verwijderen punt 1 uit het bos, zodat de i punten waarmee punt 1 verbonden was nu wortels worden in het bos. Dit geeft een bos met $n-1$ punten en $k-1+i$ wortels. Dit aantal is dan gelijk aan $|T(n-1, k-1+i)|$. Door te sommeren over alle mogelijke i krijgen we de volgende recursie:

$$|T(n, k)| = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} |T(n-1, k-1+i)|, \quad (4)$$

waarbij $1 \leq k \leq n$. Hierbij geldt $|T(n, 0)| = 0$ voor $n \geq 1$ en $|T(0, 0)| = 1$. We bewijzen met inductie naar n dat $T(n, k) = kn^{n-k-1}$.

Basisstap: Neem $n = 1$. Dan $k = 1$, en hebben we

$$|T(1, 1)| = 1 \cdot 1^{1-1-1} = 1.$$

Dit klopt, omdat er slechts één manier is om een bos te maken met één punt.
Inductiestap: Neem aan dat de formule klopt voor een zekere $n \geq 1$, zodat $|T(n, k)| = kn^{n-k-1}$. We willen laten zien dat de formule dan ook waar is voor $n + 1$, dus $|T(n + 1, k)| = k(n + 1)^{n-k}$, waarbij we recursie (4) gaan gebruiken.

$$\begin{aligned} |T(n + 1, k)| &= \sum_{i=0}^{n+1-k} \binom{n+1-k}{i} |T(n, k-1+i)| \\ &= \sum_{i=0}^{n+1-k} \binom{n+1-k}{i} (k-1+i)n^{n-k-i} \end{aligned}$$

Laat $j = n + 1 - k - i$ en sommeer over j :

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=0}^{n+1-k} \binom{n+1-k}{n+1-k-j} (n-j)n^{j-1} \\ &= \sum_{j=0}^{n+1-k} \binom{n+1-k}{j} (n-j)n^{j-1} \\ &= \sum_{j=0}^{n+1-k} \binom{n+1-k}{j} n^j - \sum_{j=0}^{n+1-k} j \binom{n+1-k}{j} n^{j-1} \end{aligned}$$

Gebruik het binomium van Newton (zie Sectie 1.1.1):

$$\begin{aligned} &= (n+1)^{n+1-k} - (n+1-k)(n+1)^{n-k} \\ &= (n+1)^{n+1-k} - (n+1)^{n+1-k} + k(n+1)^{n-k} \\ &= k(n+1)^{n-k} \quad \square \end{aligned}$$

We kunnen ook een alternatief bewijs met een andere recursie geven.

Definitie 3.8. We definiëren $F(n, k)$, met $0 \leq k \leq n$, als de verzameling van gelabelde bossen met n punten en k gewortelde bomen.

Het verschil met Definitie 3.4 is dat de wortels niet worden toegekend, maar er keuze is uit alle n punten.

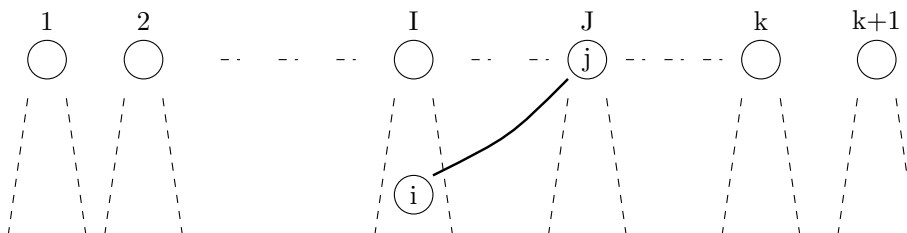
Stelling 3.9. Zij $1 \leq k \leq n$ en zij $F(n, k)$ als in Definitie 3.8. Dan geldt:

$$|F(n, k)| = \binom{n}{k} kn^{n-k-1}.$$

Het is direct in te zien dat dit equivalent is met Stelling 3.7, omdat we op $\binom{n}{k}$ manieren de k wortels kunnen kiezen. Het bewijs dat nu volgt is gebaseerd op [2].

Bewijs van Stelling 3.9. We nemen $1 \leq k \leq n - 1$ en leiden een recursie af door op twee manieren een gelabeld bos te maken met n punten en k gewortelde bomen, waarbij één punt dat geen wortel is gemarkeerd is. Aan de ene kant kunnen we dit doen door een bos uit $F(n, k)$ te nemen en één van de $n - k$

niet-wortels kiezen. Dit geeft $(n - k)|F(n, k)|$ mogelijkheden. Aan de andere kant kunnen we beginnen met een bos uit $F(n, k + 1)$. We kiezen één van de n punten willekeurig, genoemd punt i . Noem de boom waar het punt i deel van uitmaakt de boom I en kies één van de k andere bomen, genoemd boom J . Zij de wortel van boom J het punt j . We verbinden punt j met punt i , zodat punt j nu een niet-wortel is binnen de boom van i , en we nu nog k bomen overhouden. Een schematische weergave van deze constructie wordt weergegeven in Figuur 5.



Figuur 5: Schematische weergave om van een bos met n punten en $k + 1$ wortels een bos met n punten, k wortels, en één gemarkeerde niet-wortel te krijgen. De gemarkeerde niet-wortel is in dit geval het punt j .

Dit geeft $nk|F(n, k + 1)|$ mogelijkheden. De recursie, voor $1 \leq k \leq n - 1$, leest:

$$(n - k)|F(n, k)| = nk|F(n, k + 1)|.$$

Itereer $n - k$ keer over deze recursie:

$$\begin{aligned} |F(n, k)| &= \frac{nk}{n - k}|F(n, k + 1)| \\ &= \frac{nk}{n - k} \frac{n(k + 1)}{n - k + 1}|F(n, k + 2)| \\ &= \frac{nk}{n - k} \frac{n(k + 1)}{n - k + 1} \dots \frac{n(n - 1)}{n - n + 1}|F(n, n)| \\ &= \frac{(n - 1)!}{(k - 1)!(n - k)!} n^{n-k}|F(n, n)| \\ &= \binom{n}{k} kn^{n-k-1}. \end{aligned}$$

Hier gebruiken we dat $|F(n, n)| = 1$, want we kunnen op één manier n punten over n wortels verdelen. Het is dan ook duidelijk dat dit geldt voor alle $1 \leq k \leq n$. \square

3.4 Voortbrengende functies

In deze sectie onderzoeken we of we een combinatorische interpretatie kunnen vinden van

$$n^a - an^{a-1},$$

met $0 \leq a \leq n - 1$, omdat we deze uitdrukking kunnen verbinden met de gegeneraliseerde formule van Cayley (3). Hiertoe bekijken we de bijbehorende EGFs (zie Definitie 1.5).

Zij $a = n - k$. Als we bossen met n punten en k wortels uit $[k] = [n - a]$ bekijken, is a het aantal punten dat géén wortel is. De gegeneraliseerde formule van Cayley (3) wordt gegeven door:

$$kn^{n-k-1} = n^a - an^{a-1},$$

waarbij nu $0 \leq a \leq n - 1$.

Stelling 3.10. Zij $0 \leq a \leq n - 1$. De EGF van $(n^a)_{n \geq 0}$ wordt dan gegeven door:

$$F_a(x) = e^x \sum_{k=0}^a S(a, k) x^k, \quad (5)$$

waarbij $S(a, k)$ het Stirling-getal van de tweede soort (zie Sectie 1.1.2) is.

Bewijs. Zij $0 \leq a \leq n - 1$. We noteren de EGF van $(n^a)_{n \geq 0}$ als F_a en leiden een recursie af tussen F_a en F_{a+1} :

$$F_a(x) = \sum_{n \geq 0} n^a \frac{x^n}{n!}.$$

Neem de afgeleide naar x :

$$\begin{aligned} F'_a(x) &= \sum_{n \geq 1} n^a n \frac{x^{n-1}}{n!} \\ &= \frac{1}{x} \sum_{n \geq 0} n^{a+1} \frac{x^n}{n!} \\ &= \frac{1}{x} F_{a+1}(x). \end{aligned}$$

We verkrijgen de volgende recursie:

$$F_{a+1}(x) = x F'_a(x). \quad (6)$$

We beweren dat $F_a(x) = e^x \sum_{k=0}^a S(a, k) x^k$ voor $0 \leq a \leq n - 1$, waar $S(a, k)$ het Stirling-getal van de tweede soort is. We bewijzen dit met volledige inductie naar a .

Basisstap: neem $a = 0$. Dan wordt de EGF gegeven door:

$$F_0(x) = \sum_{n \geq 0} n^0 \frac{x^n}{n!} = e^x = e^x S(0, 0) x^0 = e^x \sum_{k=0}^0 S(0, k) x^k.$$

Inductiestap: neem aan dat de formule klopt voor a met $0 \leq a \leq n - 2$, dus $F_a(x) = e^x \sum_{k \geq 1} S(a, k) x^k$. We laten zien dat de formule dan ook klopt voor

$a + 1$, waarbij we recursie (6) gebruiken.

$$\begin{aligned}
F_{a+1}(x) &= xF'_a(x) \\
&= xe^x \left(\sum_{k=0}^a S(a, k)x^k + k \sum_{k=1}^a S(a, k)x^{k-1} \right) \\
&= e^x \left(\sum_{k=0}^a S(a, k)x^{k+1} + \sum_{k=1}^a kS(a, k)x^k \right) \\
&= e^x \left(\sum_{k=1}^a S(a, k-1)x^k + \sum_{k=1}^a kS(a, k)x^k + S(a, a)x^{a+1} \right) \\
&= e^x \left(\sum_{k=1}^a (S(a, k-1) + kS(a, k))x^k + x^{a+1} \right)
\end{aligned}$$

Gebruik de recursie van de Stirling getallen (zie Sectie 1.1.2):

$$\begin{aligned}
&= e^x \left(\sum_{k=1}^a S(a+1, k)x^k + x^{a+1} \right) \\
&= e^x \sum_{k=1}^a S(a+1, k)x^k \\
&= e^x \sum_{k=0}^a S(a+1, k)x^k.
\end{aligned}$$

In de laatste stap gebruiken we $S(n, 0) = 0$ voor $n \geq 1$. Dan geldt er dus $S(a+1, 0) = 0$, zodat we deze nulterm kunnen meenemen in de som. \square

We merken op dat de EGF (5) te linken is aan de Touchard Polynomen [18], welke gegeven worden door

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n S(n, k)x^k, \quad (7)$$

waarbij $S(n, k)$ een Stirling-getal van de tweede soort is. We kunnen de EGF (5) dan ook schrijven als

$$F_a(x) = e^x T_a(x), \quad (8)$$

waarbij $T_a(x)$ het Touchard Polynoom (7) is. We kunnen nu ook een redelijk compacte uitdrukking vinden voor de EGF van $(n^a - an^{a-1})_{n \geq 0}$, welke we uitdrukken in de Touchard Polynomen.

Stelling 3.11. *Zij $0 \leq a \leq n - 1$. De EGF van $(n^a - an^{a-1})_{n \geq 0}$ wordt dan gegeven door:*

$$G_a(x) = e^x \left(x + x \frac{d}{dx} - a \right) T_{a-1}(x),$$

waarbij $T_{a-1}(x)$ het Touchard Polynoom (7) is.

Bewijs. De EGF van $(n^a - an^{a-1})_{n \geq 0}$ wordt gegeven door

$$G_a(x) = \sum_{n \geq 0} (n^a - an^{a-1}) \frac{x^n}{n!}$$

We drukken deze EGF uit in de EGF van $(n^a)_{n \geq 0}$, welke we noteren met $F_a(x)$:

$$= F_a(x) - aF_{a-1}(x)$$

Gebruik recursie (6):

$$= x \frac{d}{dx} F_{a-1}(x) - aF_{a-1}(x)$$

Gebruik de uitdrukking van $F_a(x)$ in het Touchard Polynoom (8):

$$\begin{aligned} &= x \frac{d}{dx} (e^x T_{a-1}(x)) - ae^x T_{a-1}(x) \\ &= e^x \left(x + x \frac{d}{dx} - a \right) T_{a-1}(x). \quad \square \end{aligned}$$

Behalve bovengenoemd verband is het niet gelukt om verdere combinatorische verbanden te leggen.

4 Parkeerfuncties

In dit hoofdstuk bekijken we parkeerfuncties en hun link met gewortelde bomen en bossen. We zien dat het aantal parkeerfuncties $p: [k] \rightarrow [n]$ gelijk is aan het aantal gelabelde bossen met $n+1$ punten en $n+1-k$ wortels uit $[n+1-k]$. Eveneens geven we een bijectie tussen parkeerfuncties $p: [n] \rightarrow [n]$ en gewortelde bomen met $n+1$ punten middels Prüfer codes.

Definitie 4.1. Zij $1 \leq k \leq n$. We definiëren een *parkeerfunctie* $p: [k] \rightarrow [n]$ als volgt. Er zijn k auto's uit $[k]$. Iedere auto $i \in [k]$ rijdt in een doodlopende straat met n parkeerplaatsen. De auto rijdt naar zijn favoriete parkeerplaats, gegeven door $p(i) \in [n]$. Als deze vrij is parkeert hij hier. Als deze bezet is, rijdt hij door en parkeert hij in de eerstvolgende beschikbare parkeerplaats. Als dit niet mogelijk is, dan rijdt hij weer weg en parkeert hij niet. Als alle k auto's kunnen parkeren volgens deze methode, dan heet de p een *parkeerfunctie*.

Opmerking 4.2. De functie $p: [k] \rightarrow [n]$ wordt ook wel gezien als een *voorkeursfunctie*. Een parkeerfunctie $p: [k] \rightarrow [n]$ wordt ook wel als rij (p_1, p_2, \dots, p_k) genoteerd, waarbij $p_i = p(i)$. De verzameling van alle parkeerfuncties $p: [k] \rightarrow [n]$ noteren we met $P(k, n)$, en $P(n, n) = P(n)$. Deze $P(k, n)$ en $P(n)$ zullen in volgende hoofdstukken dezelfde betekenis behouden.

Voorbeeld 4.3. De voorkeursfunctie $p: [5] \rightarrow [7]$ gegeven door $p = (2, 6, 1, 4, 2)$ is een parkeerfunctie, omdat alle auto's kunnen parkeren. De voorkeursfunctie $q: [5] \rightarrow [7]$ gegeven door $q = (7, 6, 6, 3, 2)$ is géén parkeerfunctie, omdat auto 3 niet kan parkeren. Deze rijdt namelijk naar parkeerplek 6, maar deze en alle volgende parkeerplekken zijn bezet.

Stelling 4.4. *Zij $1 \leq k \leq n$ en $P(k, n)$ de verzameling van parkeerfuncties van $[k]$ naar $[n]$. Dan geldt*

$$|P(k, n)| = (n - k + 1)(n + 1)^{k-1}.$$

Het volgende bewijs is gebaseerd op het bewijs als in [11].

Bewijs. We voegen een extra parkeerplaats $n + 1$ toe en herordenen alle parkeerplaatsen tot een cirkel, zodat nu alle auto's kunnen parkeren. Zij $p: [k] \rightarrow [n + 1]$ een voorkeursfunctie die auto i een favoriete parkeerplaats $p(i)$ toewijst. Dan is p een parkeerfunctie dan en slechts dan als parkeerplaats $n + 1$ leegblijft. Wegens symmetrie is, gegeven een willekeurige voorkeursfunctie p , de kans dat een parkeerplaats $i \in [n + 1]$ leegblijft net zo groot als de kans dat een andere parkeerplaats $j \in [n + 1]$ leegblijft. Omdat er k auto's parkeren en $n + 1$ parkeerplaatsen zijn, zijn er na het parkeren $n + 1 - k$ lege parkeerplaatsen. De kans dat plaats $n + 1$ leeg is, is dus $\frac{n+1-k}{n+1}$. Duidelijk is dat er $(n + 1)^k$ voorkeursfuncties zijn, dus

$$|P(k, n)| = \frac{n + 1 - k}{n + 1} (n + 1)^k = (n - k + 1)(n + 1)^{k-1}. \quad \square$$

Uit Stelling 3.7 en Stelling 4.4 volgt dat $|P(k, n)| = |T(n + 1, n + 1 - k)|$, waarbij $T(n, k)$ als in Definitie 3.7. Het aantal parkeerfuncties met k auto's en n parkeerplekken is dus gelijk aan het aantal gelabelde bossen met $n + 1$ punten uit $[n + 1]$ en k niet-wortels, waarbij de wortels worden gegeven door de punten uit $[n + 1 - k]$.

Stelling 4.5. *Er bestaat een bijectie tussen parkeerfuncties uit $P(n)$ en Prüfer codes met lengte $n - 1$. We noteren de parkeerfunctie $p: [n] \rightarrow [n]$ als volgt: $(1, 2, \dots, n) \mapsto (p_1, p_2, \dots, p_n)$. De Prüfer code $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ wordt dan gegeven door:*

$$a_i = p_{i+1} - p_i \pmod{n + 1},$$

voor $i \in \{1, \dots, n - 1\}$.

Deze bijectie is gegeven door Riordan in [14].

Bewijs. We voegen een extra parkeerplaats $n + 1$ toe en herordenen de parkeerplaatsen tot een cirkel, zodat nu alle auto's kunnen parkeren. Een voorkeursfunctie $p: (1, 2, \dots, n) \mapsto (p_1, p_2, \dots, p_n)$ is dan een parkeerfunctie dan en slechts dan als plekje $n + 1$ leegblijft.

Zij (p_1, \dots, p_n) een parkeerfunctie. Duidelijk is dat (a_1, \dots, a_{n-1}) gegeven door $a_i = p_{i+1} - p_i \pmod{n + 1}$ een Prüfer code van lengte $n - 1$ is, want a_i neemt waarden in $[n + 1]$ aan als we bij het modulo rekenen de restklassen 1 tot en met $n + 1$ nemen. Zij $(q_1, \dots, q_n) \neq (p_1, \dots, p_n)$ een voorkeursfunctie die dezelfde Prüfer code (a_1, \dots, a_{n-1}) geeft. Dus $p_{i+1} - p_i = q_{i+1} - q_i \pmod{n + 1} \forall i \in [n - 1]$. Neem, zonder verlies van algemeenheid, aan dat $p_1 \neq q_1$. Dan moet gelden $p_2 \neq q_2$, want anders zou gelden dat $p_1 = q_1 \pmod{n + 1}$, wat zou betekenen

dat $p_1 = q_1$, omdat $p_1, q_1 \in [n]$. Door dit argument herhaaldelijk toe te passen krijgen we dat $p_i \neq q_i \forall i \in [n]$. Bovendien geldt er dat

$$\begin{aligned} p_2 - p_1 &= q_2 - q_1 \pmod{n+1} \text{ en } p_3 - p_2 = q_3 - q_2 \pmod{n+1}, \\ p_3 - (p_1 + q_2 - q_1) &= q_3 - q_2 \pmod{n+1}, \\ p_3 - p_1 &= q_3 - q_1 \pmod{n+1}. \end{aligned}$$

Uit inductie volgt dan dat $p_i - p_1 = q_i - q_1 \pmod{n+1} \forall i \in [n]$. Zij $k = p_1 - q_1 \pmod{n+1}$, zodat $p_i = q_i + k \pmod{n+1} \forall i \in [n]$ met $k \in [n]$, want $p_1 - q_1 \neq 0$. Dan hebben we $(q_1, \dots, q_n) = (p_1 - k, \dots, p_n - k) \pmod{n+1}$, dus is q simpelweg een translatie van p van $k \neq 0 \pmod{n+1}$. Omdat we de $n+1$ parkeerplaatsen in een cirkel hadden geïntendeerd, parkeren alle auto's k plekjes terug, maar dan parkeert er een auto in plekje $n+1$, want deze parkeerplaats bleef bij p leeg. Dan is q dus geen parkeerfunctie. De Prüfer code kan dus slechts uit één parkeerfunctie worden verkregen.

Zij (a_1, \dots, a_{n-1}) een Prüfer code. We maken een voorkeursfunctie p door $p_1 \in [n+1]$ te kiezen en de recursie

$$p_{i+1} = a_i + p_i \pmod{n+1}$$

toe te passen. Er zijn dan $n+1$ van zulke voorkeursfuncties. Bij elke blijft één van de $n+1$ plekjes leeg. Wegens symmetrie is er dan één voorkeursfunctie waar plekje $n+1$ leegblijft, en dus een parkeerfunctie is. \square

Stelling 4.6. *Er bestaat een bijectie tussen gelabelde bomen met n punten en parkeerfuncties uit $P(n)$.*

Bewijs. Dit volgt direct uit Stelling 3.2 en Stelling 4.5. \square

Tot slot merken we op dat er ook bijecties bestaan tussen parkeerfuncties $p: [k] \rightarrow [n]$ en gewortelde bossen met $n+1$ punten en $n+1-k$ wortels uit $[n+1-k]$ voor algemene $1 \leq k \leq n$. Deze bijecties kunnen vrij complex zijn en worden hier niet gegeven. Voorbeelden van zulke bijecties zijn de vinden in [16] en [11].

5 Symmetrieën en overige resultaten

In dit hoofdstuk beschouwen we symmetrieën in gewortelde bomen en parkeerfuncties zoals voorgelegd door Kalikow [10]. In Sectie 5.1 bekijken we de symmetrie in gewortelde bomen tussen afdalingen en bladeren. In Sectie 5.2 bekijken we de symmetrie in parkeerfuncties tussen afdalingen en ongekozen parkeerplekken en bewijzen we deze symmetrie middels een bijectie met de gewortelde bomen uit de eerste sectie. Dit is een bijectie tussen gewortelde bomen met a afdalingen en $b+1$ bladeren, en parkeerfuncties met a afdalingen en b ongekozen parkeerplekken.

In Sectie 5.3 bekijken kort een probabilistische eigenschap in parkeerfuncties gegeven door [11].

5.1 Symmetrieën tussen bladeren en afdalingen in gewortelde bomen

In deze sectie bekijken we steeds gewortelde bomen.

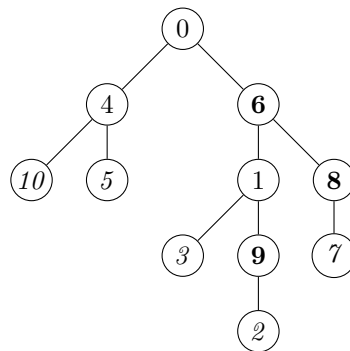
Definitie 5.1. (i) De *ouder* van een punt v (v is zelf geen wortel) is het eerste punt w die op het unieke pad richting de wortel ligt. We zeggen dat v een *kind* is van w als w de ouder is van v .

(ii) Een *blad* is een punt dat geen kinderen heeft.

(iii) Een punt is een *afdaling* als het een label heeft dat groter is dan minstens één van zijn kinderen.

Verder noteren we $\mathcal{T}_{i,[n]}$ als de verzameling van gewortelde bomen van $n + 1$ punten met wortel $i \notin [n]$ en alle andere punten uit $[n]$. Ook merken we op dat de definitie van een blad in Definitie 5.1 equivalent is met die in Definitie 1.1.

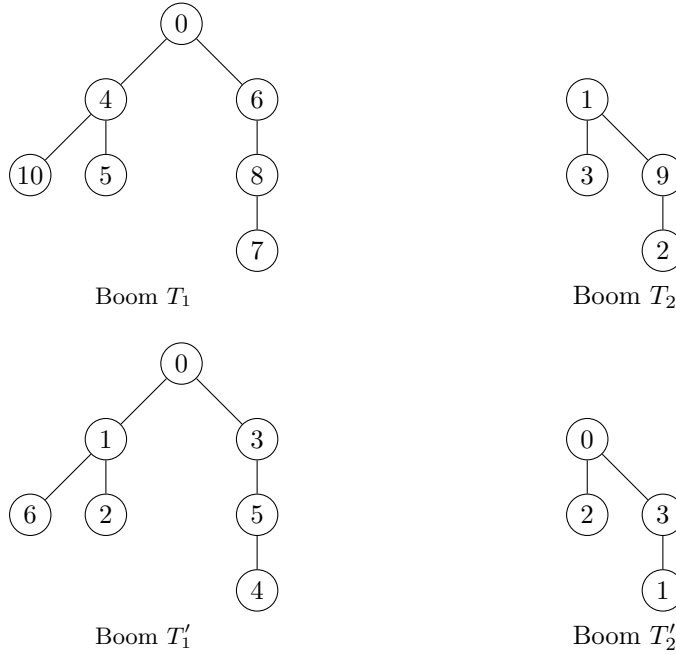
Voorbeeld 5.2. Zij $T \in \mathcal{T}_{0,[10]}$ de boom in Figuur 6. De afdalingen in deze boom zijn dan de punten 6, 8 en 9. De bladeren in deze boom zijn de punten 2, 3, 5, 7 en 10.



Figuur 6: Boom $T \in \mathcal{T}_{0,[10]}$. Ter verduidelijking zijn de afdalingen dikgedrukt en zijn de bladeren schuingedrukt.

Stelling 5.3. *Het aantal bomen uit $\mathcal{T}_{0,[n]}$ met a afdalingen en $b + 1$ bladeren is gelijk aan het aantal bomen uit $\mathcal{T}_{0,[n]}$ met b afdalingen en $a + 1$ bladeren.*

Dit resultaat werd als eerste ontdekt door Gessel [8]. Het bewijs gegeven door Kalikow [10] laat een symmetrie zien in de voortbrengende functie voor bomen met a afdalingen en $b + 1$ bladeren door het opsplitsen van bomen.



Figuur 7: Decompositie van de boom $T \in \mathcal{T}_{0,[10]}$ uit Figuur 6. De ouder van punt 1 is $v = 6$. We hebben boom T_1 met wortel 0 en puntenverzameling $\{0\} \cup A$, $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 10\}$, en boom T_2 met wortel 1 en puntenverzameling $[10]/A = \{1, 2, 3, 9\}$. Verder krijgen we gereduceerde bomen $T_1' \in \mathcal{T}_{0,[6]}$ en $T_2' \in \mathcal{T}_{0,[3]}$. Het is duidelijk dat we boom T weer kunnen opbouwen met de vier-tuper (T_1', T_2', A, v) .

Bewijs van Stelling 5.3. Definieer $u_n(\alpha, \beta)$ als de voortbrengende functie waar de coëfficiënt van $\alpha^a \beta^b$ het aantal bomen in $\mathcal{T}_{0,[n]}$ is met a afdalingen en $b + 1$ bladeren. Het volstaat om te laten zien dat u_n symmetrisch is in α en β . Hiertoe maken we een recursie voor u_n waar we een boom $T \in \mathcal{T}_{0,[n]}$ terug kunnen opbouwen uit twee kleinere bomen T_1' en T_2' .

Zij $n \geq 1$ en $T \in \mathcal{T}_{0,[n]}$. Verwijder de tak tussen punt 1 en zijn ouder v . Hiertoe krijgen we boom T_1 met puntenverzameling $A \sqcup \{0\}$, $A \subset \{2, 3, \dots, n\}$, en wortel 0, en een boom T_2 met wortel 1. Hieruit kunnen we de gereduceerde bomen T_1' en T_2' maken, waar we de labels zo klein mogelijk maken, maar zodat de juiste volgorde behouden blijft (op deze manier blijven het aantal afdalingen gelijk). Een voorbeeld van zulke decompositie wordt gegeven in Figuur 7.

De puntenverzameling van T_1' is dan $\{0, 1, \dots, i\}$ en de puntenverzameling van T_2' is dan $\{0, 1, \dots, n - i - 1\}$, voor $i = |A|$. We hebben dus $T_1' \in \mathcal{T}_{0,[i]}$ en $T_2' \in \mathcal{T}_{0,[n-i-1]}$. De oorspronkelijke boom T is dan uniek bepaald door de viertupel (T_1', T_2', A, v) .

Zij $n \geq 1$ en $i \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$. Neem $T_1' \in \mathcal{T}_{0,[i]}$ en $T_2' \in \mathcal{T}_{0,[n-i-1]}$. We kunnen $A \subset \{2, 3, \dots, n\}$ met $|A| = i$ op $\binom{n-1}{i}$ manieren kiezen. We noemen a_j het aantal afdalingen in T_1' en b_j het aantal bladeren in T_2' , waarbij $j \in \{1, 2\}$.

Het aantal afdalingen in T noemen we a , en het aantal bladeren in T noemen we b . We onderscheiden vier gevallen:

- *Geval 1:* $i = 0$. Dan bestaat T_1 alleen uit het punt 0, dus was 1 het enige kind van 0 in T . We verkrijgen T door het punt 0 toe te voegen aan T_2 , zodat dit de wortel wordt. Het punt 0 is dan geen afdaling en geen blad, dus $a = a_2$ en $b = b_2$. Dit geeft dus de bijdrage u_{n-1} .
- *Geval 2:* $i > 0$ en we verbinden de wortel van T_2 aan een afdaling of aan de wortel van T_1 . De wortel van T_2 is punt 1. Als we deze verbinden met een afdaling in T_1 , blijft dit nog steeds een afdaling. Het verbinden met de wortel van T_1 (dit is altijd punt 0) geeft ook geen nieuwe afdaling, want 0 kan nooit een afdaling zijn. Er geldt dus $a = a_1 + a_2$ en $b = b_1 + b_2$. Verder kunnen we de wortel van T_2 aan $a_1 + 1$ punten uit T_1 verbinden. Dit geeft de factor $\frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha u_i$. We krijgen een factor β omdat het coëfficiënt voor β^b het aantal bomen met $b + 1$ bladeren telt. Verder konden we A op $\binom{n-1}{i}$ manieren kiezen. De totale bijdrage is dan:

$$\binom{n-1}{i} u_{n-1-i} \beta \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha u_i \right).$$

- *Geval 3:* $i > 0$ en we verbinden de wortel van T_2 aan een blad van T_1 . Het blad waar we de wortel van T_2 (punt 1) aan vast maken is een punt groter dan 1 dat voorheen géén afdaling was. Het verbinden de bomen geeft dan een extra afdaling, en één blad minder. We krijgen dan $a = a_1 + a_2 + 1$, wat een extra factor α oplevert, en $b = b_1 + b_2 - 1$. Omdat we u zo hadden gedefinieerd dat de factor voor β^b het aantal bomen met $b + 1$ bladeren telt hoeven we hier dus niks mee te doen. Omdat we uit b_1 bladeren kunnen kiezen krijgen we de factor $\frac{\partial}{\partial \beta} \beta u_i$. De totale bijdrage is dan:

$$\binom{n-1}{i} u_{n-1-i} \alpha \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \beta u_i \right).$$

- *Geval 4:* $i > 0$ en we verbinden de wortel van T_2 aan een punt van T_1 dat geen blad, afdaling of wortel is. Het punt waaraan we de wortel van T_2 verbinden, wat dus voorheen geen afdaling was, wordt dan automatisch een afdaling. Het aantal bladeren verandert niet. We krijgen $a = a_1 + a_2 + 1$, wat een extra factor α geeft, en $b = b_1 + b_2$, wat een extra factor β geeft. Initieel kunnen we het punt op $i + 1$ manieren kiezen, maar moeten we het aantal manieren waarop we een wortel, afdaling of blad kunnen kiezen ervan af trekken (zie geval 2 en geval 3). De totale bijdrage is dan:

$$\binom{n-1}{i} \alpha \beta u_{n-1-i} \left((i+1)u_i - \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha u_i - \frac{\partial}{\partial \beta} \beta u_i \right).$$

Sommeren over alle i geeft:

$$u_n = u_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} u_{n-1-i} \left(\beta \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha u_i + \alpha \frac{\partial}{\partial \beta} \beta u_i + \alpha \beta \left((i+1)u_i - \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha u_i - \frac{\partial}{\partial \beta} \beta u_i \right) \right). \quad (9)$$

Uit de basisgevallen $u_0(\alpha, \beta) = u_1(\alpha, \beta) = 1$ en deze recursie is duidelijk dat u_n symmetrisch is in α en β . \square

5.2 Symmetrieën tussen bladeren en ongekozen parkeerplekken in parkeersfuncties

We gaan nu de symmetrie in parkeersfuncties bekijken, waarbij we naar parkeersfuncties $p: [n] \rightarrow [n]$ uit $P(n)$ bekijken.

Definitie 5.4. (i) De *output permutatie* van een parkeersfunctie p is de permutatie van de geparkeerde auto's die volgens parkeersfunctie p hebben geparkeerd. Deze noteren we als $\pi(p) = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$. Hierbij is π_i dus de auto die op parkeerplek i parkeert.

(ii) Een *afdaling* van een parkeersfunctie p is een afdaling van zijn output permutatie π . Deze verzameling wordt gegeven door $\text{afd}(\pi) := \{\pi_i \in \pi : i \in [n-1] \text{ en } \pi_i > \pi_{i+1}\}$.

(iii) Een *ongekozen parkeerplek* is een parkeerplek waar geen auto's graag willen parkeren. Dit zijn de plekken uit $[n] \setminus p([n])$, waar $p([n])$ het bereik van parkeersfunctie p is.

Voorbeeld 5.5. Zij $p \in P(n)$ de parkeersfunctie $p = (2, 5, 2, 1, 3)$. De output permutatie van p wordt dan gegeven door $\pi = (4, 1, 3, 5, 2)$. Verder heeft p de afdalingen 4 en 5, en één ongekozen parkeerplek, 4.

Stelling 5.6. *Het aantal parkeersfuncties in $P(n)$ met a afdalingen en b ongekozen parkeerplekken is gelijk aan het aantal parkeersfuncties in $P(n)$ met b afdalingen en a ongekozen parkeerplekken.*

Kalikow [10] geeft een bijectie tussen bomen uit $\mathcal{T}_{0,[n]}$ met a afdalingen en $b+1$ bladeren, en parkeersfuncties uit $P(n)$ met a afdalingen en b ongekozen parkeerplekken. Stelling 5.6 volgt dan direct uit Stelling 5.3.

Bewijs van Stelling 5.6. Merk op dat $p \in P(n)$ een parkeersfunctie is dan en slechts dan als $|p^{-1}([i])| \geq i$, voor alle $i \in [n]$. Dit volgt uit het ladenprincipe (pigeonhole principle).

We maken een bijectie $f: P(n) \rightarrow \mathcal{T}_{0,[n]}$ tussen bomen en parkeersfuncties die parkeersfuncties. Ter illustratie geven we een voorbeeld van het toepassing van deze bijectie in Voorbeeld 5.7. De afbeelding $f: P(n) \rightarrow \mathcal{T}_{0,[n]}$, die een parkeersfunctie p naar een boom T stuurt, wordt gegeven volgens de volgende procedure:

1. Teken de punten $0, 1, 2, \dots, n$. Dit wordt de boom, waarbij we het punt 0 als wortel aanwijzen.
2. De elementen van $p^{-1}(1)$, ofwel de auto's die parkeerplek 1 als favoriet hebben, zijn de kinderen van het punt 0 in de boom. Verbind deze punten met 0.
3. Zij $i = 1$.
4. Stop als $i = n$.
5. Zij $v = \pi(i)$ (dit is de auto geparkeerd op parkeerplek i). De kinderen van v zijn de elementen uit $p^{-1}(i+1)$, ofwel auto's die $i+1$ als favoriete parkeerplaats hebben. Als deze verzameling niet leeg is, verbind de punten uit deze verzameling met v .

6. Verhoog i met 1, dus $i \rightarrow i + 1$, en ga naar 4.

We laten zien dat deze procedure goed gedefinieerd is en een boom geeft in $\mathcal{T}_{0,[n]}$. We gaan na dat elke stap in de procedure goed gedefinieerd is:

1. Triviaal.
2. Omdat p een parkeerfunctie is, hebben we dat $|p^{-1}(1)| \geq 1$, dus is de verzameling $p^{-1}(1)$ niet-leeg.
3. Triviaal.
4. Triviaal.
5. Omdat p een parkeerfunctie is uit $P(n)$ hebben we dat elke auto parkeert en elke parkeerplek een geparkeerde auto heeft. Verder hebben we dat $1 \leq i \leq n - 1$, zodat $v = \pi(i)$ bestaat voor alle $i \in [n - 1]$ en bovendien uniek is.
6. Triviaal

Verder is de procedure eindig is, omdat de procedure stopt na $n - 1$ iteraties.

Om in te zien dat deze procedure inderdaad een boom uit $\mathcal{T}_{0,[n]}$ geeft, hebben we nodig dat we een boom op $n + 1$ punten krijgen, ofwel een samenhangende graaf met $n + 1$ punten en n verbindingen. Het is duidelijk dat de boom $n + 1$ punten heeft. Verder hebben we dat $\sum_{i=1}^n |p^{-1}(i)| = n$, omdat we n auto's hebben die allemaal precies één favoriete parkeerplek hebben. Hieruit volgt dat we n verbindingen hebben. Verder hebben we dat elk punt een kind is van een ander punt. Namelijk, elke auto heeft een favoriete parkeerplek, zeg $i \in [n]$, dus is dit het kind van de wortel 0 (als $i = 1$) of van het punt $i - 1$ (als $i \geq 2$). Hieruit volgt dat we een samenhangende graaf krijgen.

We maken een afbeelding $g: \mathcal{T}_{0,[n]} \rightarrow P(n)$ die een boom $T \in \mathcal{T}_{0,[n]}$ naar een parkeerfunctie $p \in P(n)$ stuurt. Deze afbeelding gaat volgens het volgende algoritme:

1. Set $i := 0$ and $S = \{0\}$
2. While $i \leq n$:
 - $v(i) = \min S$
 - $p^{-1}(i + 1) = \{\text{kinderen van } v(i) \text{ in } T\}$
 - $S = (S \setminus v(i)) \cup p^{-1}(i + 1)$
 - $i = i + 1$

De parkeerfunctie is dan gemakkelijk te construeren uit de inverses $p^{-1}(i)$.

Om te controleren dat deze procedure goed gedefinieerd is, moet gelden dat we een functie p krijgen zodat $|\bigcup_{j=1}^i p^{-1}(j)| \geq i$ voor alle $i \in [n]$. Uit bovenstaande opmerking zien we dan meteen in dat p een parkeerfunctie is. Zou dit niet gelden, dan zou S leeg zijn voordat de procedure is afgerond, zodat we geen $v(i)$ meer kunnen krijgen. Als er een $i \in [n]$ is zodat $|\bigcup_{j=1}^i p^{-1}(j)| < i$, dan zijn de punten in $\bigcup_{j=1}^i p^{-1}(j)$ alleen verbonden met punten binnen deze verzameling. Dit kan niet, want T is een boom en daarmee verbonden.

Wanneer auto's parkeren volgens een parkeerfunctie, is het duidelijk dat de auto die in een bepaalde parkeerplek i parkeert een voorkeur had voor een parkeerplek kleiner of gelijk aan i , anders zou deze auto parkeerplek i voorbij zijn gereden. Verder parkeren auto's op volgorde van hun labels $1, 2, \dots, n$. We bekijken een situatie waar de eerste $i-1$ parkeerplekken bezet zijn en parkeerplek i vrij is. De auto die hier gaat parkeren is dan de kleinste auto die als favoriete parkeerplek één van de eerste i parkeerplekken heeft, maar niet in de eerste $i-1$ parkeerplekken parkeert. Volgens het algoritme van afbeelding g is dit precies $v(i)$. De output permutatie van de parkeerfunctie wordt dusgegeven door $\pi(p) = (v(1), v(2), \dots, v(n))$. Het is dan duidelijk dat de afbeelding f en g elkaars inverses zijn, dus dat $f: P(n) \rightarrow \mathcal{T}_{0,[n]}$ een bijectie is.

We willen laten zien dat de bijectie een parkeerfunctie $p \in P(n)$ met a afdalingen een boom $T \in \mathcal{T}_{0,[n]}$ met a afdelingen geeft. Zij $\pi(p) = (v(1), v(2), \dots, v(n))$ de output permutatie van p verkregen door boom T en de afbeelding $g: \mathcal{T}_{0,[n]} \rightarrow P(n)$. Zij $v(i)$ een afdaling van p , dus $v(i) > v(i+1)$. Dit kan dan en slechts dan als $v(i)$ een ouder is van $v(i+1)$ in T , omdat $v(i)$ het kleinste element is uit S in stap i van de procedure. Dan is $v(i)$ ook een afdaling in T .

Het is gemakkelijk in te zien dat de bijectie $f: P(n) \rightarrow \mathcal{T}_{0,[n]}$ parkeerfuncties met b ongekozen parkeerplekken naar een boom met $b+1$ bladeren stuurt. Namelijk, parkeerplek i is een ongekozen parkeerplek dan en slechts dan als $\pi(i-1)$ een blad is, en $\pi(n)$ altijd een blad is.

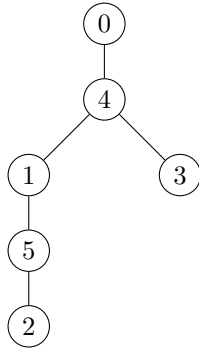
Het resultaat volgt nu uit Stelling 5.3. □

Voorbeeld 5.7. We geven een voorbeeld van de bijectie $f: P(n) \rightarrow \mathcal{T}_{0,[n]}$ uit het bewijs van Stelling 5.6. Hiertoe bekijken we de parkeerfunctie $p = (2, 5, 2, 1, 3)$. De output permutatie van deze parkeerfunctie is $\pi = (4, 1, 3, 5, 2)$. We krijgen de boom $T = f(p)$ door het algoritme van de afbeelding f toe te passen, waarbij $\pi(i)$ wordt verbonden met de punten $p^{-1}(i+1)$. Een punt uit $p^{-1}(i+1)$ is in dat geval een kind van $\pi(i)$. Hierbij zeggen we dat $\pi(0) = 0$.

- $p^{-1}(1) = \{4\}$. Verbind 0 met 4.
- $p^{-1}(2) = \{1, 3\}$. Verbind $\pi(1) = 4$ met 1 en 3.
- $p^{-1}(3) = \{5\}$. Verbind $\pi(2) = 1$ met 5.
- $p^{-1}(4) = \emptyset$. Het punt $\pi(3) = 3$ is dus een blad.
- $p^{-1}(5) = \{2\}$. Verbind $\pi(4) = 5$ met 2.

We krijgen dan de boom $T = f(p)$ die is weergegeven in Figuur 8. We kunnen vervolgens de inverse $g = f^{-1}: \mathcal{T}_{0,[5]} \rightarrow P(5)$ toepassen op de boom in Figuur 8. Hiertoe gaan we iteratief het algoritme af:

- $i = 0$ en $S = \{0\}$.
 $v(0) = 0$
 $p^{-1}(1) = \{4\}$
 $S \setminus 0 \cup \{4\} = \{4\}$



Figuur 8: Boom $T \in \mathcal{T}_{0,[5]}$ verkregen door de bijjectie $f: P(n) \rightarrow \mathcal{T}_{0,[5]}$ en parkeerfunctie $p = (2, 5, 2, 1, 3)$.

- $i = 1$ en $S = \{4\}$.
 $v(1) = 4$
 $p^{-1}(2) = \{1, 3\}$
 $S \setminus 4 \cup \{1, 3\} = \{1, 3\}$
- $i = 2$ en $S = \{1, 3\}$.
 $v(2) = 1$
 $p^{-1}(3) = \{5\}$
 $S \setminus 1 \cup \{5\} = \{3, 5\}$
- $i = 3$ en $S = \{3, 5\}$.
 $v(3) = 3$
 $p^{-1}(4) = \emptyset$
 $S \setminus 3 \cup \emptyset = \{5\}$
- $i = 4$ en $S = \{5\}$.
 $v(4) = 5$
 $p^{-1}(5) = \{2\}$
 $S \setminus 5 \cup \{2\} = \{2\}$
- $i = 5$ en $S = \{2\}$.
 $v(5) = 2$
 $p^{-1}(6) = \emptyset$
 $S \setminus 2 \cup \emptyset = \emptyset$

Uit de inverses $p^{-1}(i)$ kunnen we gemakkelijk de parkeerfunctie construeren: $p = (2, 5, 2, 1, 3)$. Het is ook gemakkelijk in te zien dat de output permutatie van deze parkeerfunctie wordt gegeven door $(v(1), \dots, v(5)) = (4, 1, 3, 5, 2)$.

Tot slot merken we op dat Stelling 5.6 ook te bewijzen is door een recursie af te leiden voor de voortbrengende functie van parkeerfuncties die afdalingen en ongekozen parkeerplekken telt, vergelijkbaar met wat we in het bewijs voor Stelling 5.3 hebben gedaan. Deze recursie gaan we hier niet bespreken, maar is terug te vinden in het werk van Kalikow [10].

5.3 Probabilistische eigenschappen parkeerfuncties

Bomen, bossen en parkeerfuncties zijn nog steeds onderwerpen van recent onderzoek. Ter illustratie geven we een voorbeeld van zulk onderzoek, welke focust op eigenschappen van parkeerfuncties. Kenyon en Yin [11] geven in 2023 verschillende probabilistische eigenschappen van parkeerfuncties, evenals een bijtietie tussen parkeerfuncties en gewortelde bossen. We gaan globaal kijken naar dit onderzoek, maar geven niet alle resultaten en behandelen geen bewijzen.

Definitie 5.8. De *verplaatsing* van een parkeerfunctie is het totaal aantal parkeerplekken die auto's voorbij hun favoriete parkeerplek moeten rijden om te parkeren. De verplaatsing van een parkeerfunctie p wordt genoteerd als $\text{verp}(p)$.

Voorbeeld 5.9. Zij $p \in P(5)$ de parkeerfunctie gegeven door $p = (1, 3, 5, 1, 3)$. Er wordt dan als volgt geparkeerd: $\mathcal{O}(p) = (1, 3, 5, 2, 4)$, waarbij \mathcal{O}_i de parkeerplek waar auto i parkeert is. De verplaatsing is dan $\text{verp}(p) = \sum_{i=1}^5 (\mathcal{O}_i - p_i) = 2$.

Kenyon en Yin geven een schatting voor de verwachtingswaarde en variantie voor de verplaatsing van een willekeurig gekozen parkeerfunctie uit $P(k, n)$ voor grote k en n . Dit resultaat werd origineel gegeven door Flajolet in 1998 [7].

Stelling 5.10. Zij k en n groot, $k < n$, en $0 < c < 1$ zodat $k = cn$. Voor een parkeerfunctie p uniform gekozen uit $P(k, n)$ geldt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\text{verp}(p)) &\sim \frac{c^2}{2(1-c)}n + \frac{c(c^2 - c - 1)}{2(1-c)^3}, \\ \text{Var}(\text{verp}(p)) &\sim \frac{c^2(6 - 6c + 4c^2 - c^3)}{12(1-c)^4}n.\end{aligned}$$

Voor het geval $k = n$, ofwel als we n groot nemen en een parkeerfunctie p uniform kiezen uit $P(n)$, geldt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\text{verp}(p)) &\sim \frac{\sqrt{2\pi}}{4}n^{3/2} - \frac{7}{6}n + \frac{19\sqrt{2\pi}}{48}n^{1/2}, \\ \text{Var}(\text{verp}(p)) &\sim \frac{10 - 3\pi}{24}n^3 + \frac{184 - 57\pi}{144}n^2.\end{aligned}$$

Zoals eerder genoemd geven we geen bewijs voor deze stelling. Het bewijs voor dit resultaat, evenals andere interessante resultaten worden gegeven in [11].

Referenties

- [1] Martin Aigner, Günter M Ziegler, Martin Aigner, and Günter M Ziegler. Cayley's formula for the number of trees. *Proofs from The Book*, pages 141–146, 1998.
- [2] Arnon Avron and Nachum Dershowitz. Cayley's formula: A page from the book. *The American Mathematical Monthly*, 123(7):699–700, 2016.
- [3] François Bergeron, Gilbert Labelle, and Pierre Leroux. *Combinatorial species and tree-like structures*. Number 67. Cambridge University Press, 1998.
- [4] Carl W Borchardt. Über eine interpolationsformel für eine art symmetrischer functionen under über deren anwendung. *Math. Abh. der Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, pages 1–20, 1860.
- [5] Arthur Cayley. A theorem on trees. *Quart. J. Pure Appl. Math*, 23:376–378, 1889.
- [6] Seth Chaiken and Daniel J Kleitman. Matrix tree theorems. *Journal of combinatorial theory, Series A*, 24(3):377–381, 1978.
- [7] Philippe Flajolet, Patricio Poblete, and Alfredo Viola. On the analysis of linear probing hashing. *Algorithmica*, 22(4):490–515, 1998.
- [8] Ira M Gessel. Counting forests by descents and leaves. *The Electronic Journal of Combinatorics*, pages R8–R8, 1996.
- [9] Ira M Gessel. Lagrange inversion. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 144:212–249, 2016.
- [10] Louis H Kalikow. Symmetries in trees and parking functions. *Discrete mathematics*, 256(3):719–741, 2002.
- [11] Richard Kenyon and Mei Yin. Parking functions: From combinatorics to probability. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 25(1):32, 2023.
- [12] Jim Pitman. Coalescent random forests. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 85(2):165–193, 1999.
- [13] Heinz Prüfer. Neuer beweis eines satzes über permutationen. *Arch. Math. Phys*, 27(1918):742–744, 1918.
- [14] John Riordan. Ballots and trees. *Journal of Combinatorial Theory*, 6(4):408–411, 1969.
- [15] Marcel-Paul Schützenberger. On an enumeration problem. *J. Combinatorial Theory*, 4:219–221, 1968.
- [16] Heesung Shin. A new bijection between forests and parking functions. *arXiv preprint arXiv:0810.0427*, 2008.
- [17] Lajos Takács. On cayley's formula for counting forests. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 53(2):321–323, 1990.

- [18] Jacques Touchard. Sur les cycles des substitutions. 1939.
- [19] Jaylee Willis. *An Introduction to Combinatorics via Cayley's Theorem*. PhD thesis, Utah State University, 2022.