Radboud Universiteit Nijmegen

Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica

# Klieken en Onafhankelijke Verzamelingen

een literatuurstudie naar boven- en ondergrenzen van het aantal klieken en onafhankelijke verzamelingen in verschillende families van grafen

Bachelorscriptie Wiskunde

*Begeleider:*
dr. Sep Thijssen

*Auteur:*
Jelle van der Horst

*Tweede lezer:*
dr. Wieb Bosma

5 juli 2021

# Inhoudsopgave

**Dankwoord**

Ik wil graag mijn scriptiebegeleider Sep Thijssen bedanken voor zijn begeleiding het afgelopen halfjaar. Hij heeft mij dit onderwerp aangereikt en heeft me geholpen wanneer ik zelf niet uit bewijzen kwam. Ik kon altijd bij hem binnenlopen, en heb zijn begeleiding als zeer prettig ervaren.

Daarnaast wil ik Stijn Cambie bedanken voor het geven van tips en feedback, en het aanreiken van literatuur.

**Samenvatting**

Deze bachelorscriptie is een literatuuronderzoek naar het aantal klieken en onafhankelijke verzamelingen in bepaalde grafen. We zullen voor vier families van grafen resultaten geven. Definieer $k(G)$ en $i(G)$ als respectievelijk het aantal klieken en onafhankelijke verzamelingen van een graaf $G$. Voor bomen geldt dat onafhankelijke verzamelingen worden geminimaliseerd door de padgraaf $P_n$ en gemaximaliseerd door de stergraaf $S_n$ [4]. Er geldt voor bomen $T_n$ op $n$ punten dat $F_{n+2} = i(P_n) \leq i(T_n) \leq i(S_n) = 2^{n-1} + 1$. Voor grafen met een vast aantal punten geldt dat onafhankelijke verzamelingen worden gemaximaliseerd door de lex-graaf [6][10][11] en klieken door de colex-graaf [16]. Onafhankelijke verzamelingen worden in $d$-reguliere grafen gemaximaliseerd door de volledig bipartiete graaf [9][18] en geminimaliseerd door de volledige graaf [7]. Er geldt voor $d$-reguliere grafen op $n$ punten dat $(d+2)^{n/(d+1)} = i(K_{d+1})^{n/(d+1)} \leq i(G) \leq i(K_{d,d})^{n/2d} = (2^{d+1}-1)^{n/2d}$. Hieruit volgt een vergelijkbaar resultaat voor klieken. Voor grafen met een minimumgraad $\delta$ geldt dat $i(G) \leq i(K_{\delta,n-\delta})$, en dit wordt bewezen door te bewijzen dat voor grafen met een maximumgraad $\Delta$ op $n = \Delta + 1 + b$ punten geldt dat $k(G) \leq k(K_{\Delta+1} \cup K_b)$ [14].

# 1 Inleiding

Deze scriptie is een literatuuronderzoek over een deelgebied binnen de grafentheorie: klieken en onafhankelijke verzamelingen. Dat zijn deelverzamelingen punten die paarsgewijs respectievelijk verbonden of juist niet verbonden zijn door lijnen. In Sectie 2 zullen we met meer detail ingaan op de definities. In het bijzonder gaat het over aantallen klieken of onafhankelijke verzamelingen, soms van een bepaalde grootte, gegeven bepaalde restricties op de graaf. Dit gebied van onderzoek behoort tot de extremale grafentheorie [7][14]. We bekijken dus grafen in bepaalde grafenfamilies. In het bijzonder richt deze scriptie zich op bomen, de lex- en colexgrafen [12], reguliere grafen, (volledig) bipartiete grafen, en grafen met een minimum- of maximumgraad. In sommige gevallen kan voor specifieke grafen het aantal klieken of onafhankelijke verzamelingen berekend worden, in andere gevallen geven we een boven- of ondergrens. In het tweede geval bekijken we ook welke grafen die boven- of ondergrens aannemen.

Klieken en onafhankelijke verzamelingen hebben verschillende toepassingen. Een daarvan is het chromatisch getal van een graaf [13, p. 251]. Merk op dat wanneer je een onafhankelijke verzameling in een graaf hebt (dus punten die onderling allemaal niet verbonden zijn), dat je die punten dus dezelfde kleur kunt geven. Andersom moeten de punten in een kliek (punten die allemaal met elkaar verbonden zijn) allemaal een andere kleur hebben. Dit betekent dus ook dat wanneer je de grootste kliek hebt, dat je dan ook een ondergrens voor je chromatisch getal hebt. Desondanks zullen we het niet specifiek hebben over de grootste kliek (of onafhankelijke verzameling) van een graaf. In plaats daarvan richt deze scriptie zich op het totale aantal klieken en onafhankelijke verzamelingen.

Er zijn door de jaren heen verschillende artikelen over dit onderwerp geschreven; de referenties in deze scriptie zijn slechts een greep uit de artikelen die hierover verschenen zijn. De artikelen die in deze literatuurstudie genoemd worden zijn geschreven van de tweede helft uit de $20^{e}$ eeuw [4] tot vrij recent [3]. In deze scriptie zullen we verschillende lemma's en stellingen bekijken. Daarnaast bekijken we of er nog open problemen zijn. Hierbij zullen we van sommige stellingen bewijzen geven, of deze verder ontleden, en zullen we zo veel mogelijk met behulp van voorbeelden verduidelijken.

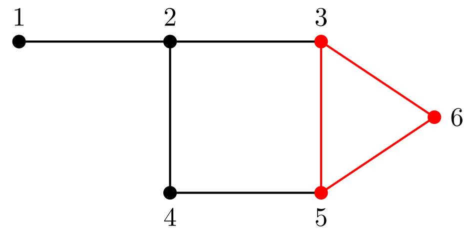
De scriptie is als volgt opgebouwd. In Sectie 2 lichten we de definities en notatie verder toe. Vervolgens behandelen we in Sectie 3.1 wat algemene eigenschappen voor klieken en onafhankelijke verzamelingen, en daarnaast behandelen we twee stellingen die van pas komen in de latere secties. De eerste familie van grafen die we behandelen zijn bomen in Sectie 3.2, en vervolgens kijken we in Sectie 3.3 naar grafen met een vast aantal punten en lijnen. Daarna zijn in Sectie 3.4 $d$-reguliere grafen aan bod, en sluiten we af met grafen met een minimum- of maximumgraad in Sectie 3.5. De scriptie sluit af met een discussie in Sectie 4, waarin we kort het combineren van verschillende grafenfamilies bekijken, en bespreken we nog wat open problemen.

Veel leesplezier toegewenst!

## 2 Definities en notatie

Zoals wel vaker in de grafentheorie beginnen we met legio definities. We zullen deze met behulp van voorbeelden verduidelijken en toelichten. We behandelen alleen *eindige, enkelvoudige, ongerichte grafen.* Dat wil zeggen dat er geen dubbele lijnen tussen twee punten zitten, punten niet met zichzelf verbonden zijn, en paren punten ongeordend zijn (de lijnen hebben geen richting).

**Definitie 2.1.** Zij $G = (V, E)$ een graaf. Een *kliek* is een verzameling punten $U \subseteq V$ zodat elk punt paarsgewijs verbonden door middel van een lijn. Dit betekent dat de geïnduceerde deelgraaf een volledige graaf is.

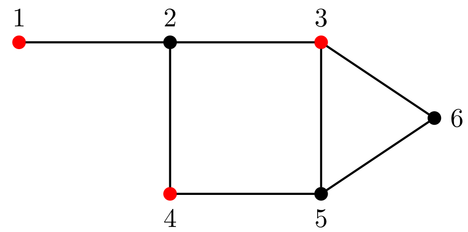



Figuur 1: in rood: een kliek op drie punten

Er kunnen veel verschillende klieken van verschillende groottes in één graaf zitten. Merk op dat één punt op zichzelf ook al een kliek is (ondanks dat de grafen enkelvoudig zijn), en de lege verzameling ook, maar deze zijn op zichzelf natuurlijk niet erg interessant. We zijn dan vaak ook geïnteresseerd in klieken van een bepaalde grootte. Hierbij gebruiken we de volgende notatie:

**Notatie 2.2.** Met $k_t(G)$ geven we het aantal klieken van grootte $t$ aan in een graaf. Dan is $k(G) = \sum_{t=0}^{n} k_t(G)$ het totaal aantal klieken in een graaf $G$ op $n$ punten. Met $k_t(v)$ en $k_t(e)$ geven we het aantal klieken van grootte $t$ aan die respectievelijk punt $v$ en lijn $e$ bevatten. Voor de graaf in Figuur 1 geldt $k(G) = \sum_{t=0}^{6} k_t(G) = 1+6+7+1+0+0+0 = 15$.

**Definitie 2.3.** Zij $G = (V, E)$ een graaf. Een *onafhankelijke verzameling* of *stabiele verzameling* is een verzameling punten $U \subseteq V$ zodat geen van de punten met elkaar verbonden zijn door middel van een lijn.




Figuur 2: in rood: een onafhankelijke verzameling op drie punten

Merk ook hier op dat één punt en de lege verzameling ook altijd onafhankelijke verzamelingen zijn.

**Notatie 2.4.** Met $i_t(G)$ geven we het aantal onafhankelijke verzamelingen van grootte $t$ in een graaf aan. Dan is $i(G) = \sum_{t=0}^{n} i_t(G)$ het totaal aantal onafhankelijke verzamelingen in een graaf $G$ op $n$ punten. Met $i_t(v)$ geven we het aantal onafhankelijke verzamelingen van grootte $t$ aan die punt $v$ bevat. Voor de graaf in Figuur 2 geldt $i(G) = \sum_{t=0}^{6} i_t(G) = 1 + 6 + 8 + 2 + 0 + 0 + 0 = 17$.

**Notatie 2.5.** Zij $G = (V, E)$ een graaf. Met $\overline{G} = (V, \overline{E})$ bedoelen we de complementgraaf van $G$. Hierin is $\overline{G}$ complementair in de lijnenverzameling $E$.

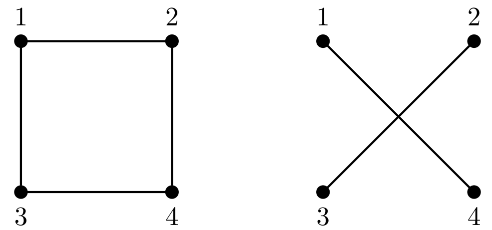
# 3 Klieken en onafhankelijke verzamelingen

Zoals eerder gezegd bekijken we het aantal klieken of onafhankelijke verzamelingen wanneer er bepaalde restricties op de graaf gelegd worden. Hierbij kan je alleen naar bepaalde type grafen kijken, zoals bomen of (volledig) bipartiete grafen, of kun je kijken naar grafen met een minimum- of maximumgraad. De opgave die we hebben zal dus zijn om het aantal klieken of onafhankelijke verzamelingen te minimaliseren of maximaliseren gegeven de restricties. Dit maakt ons onderwerp dus een onderdeel van extremale grafentheorie. Hieronder zal per sectie een aantal interessante lemma's en stellingen aangehaald worden, en later gaan we nog naar open problemen kijken.

## 3.1 Algemene eigenschappen

In deze sectie zullen een aantal algemene eigenschappen gegeven worden over het aantal klieken of onafhankelijke verzamelingen van willekeurige grafen. We beginnen met misschien wel de belangrijkste stelling, die we hierna nog vaak zullen gebruiken.

**Stelling 3.1.** *Zij $G = (V, E)$ een graaf, en $\overline{G} = (V, \overline{E})$ zijn complementgraaf. Voor elke kliek $U \subseteq V$ in $G$ geldt dat $U$ een onafhankelijke verzameling is in $\overline{G}$, en vice versa.*




Figuur 3: een graaf $G$ en zijn complement $\overline{G}$

*Bewijs.* Zij $U \subseteq V$ een kliek in $G$. We nemen aan dat $|U| \geq 2$. We hadden al gezien dat de lege verzameling en ieder punt zowel een kliek als onafhankelijke verzameling vormen, dus hiervoor geldt de stelling al. Omdat ieder punt in $U$ door een lijn met elkaar verbonden is in $G$, geldt dat ieder punt in $U$ dus niet met elkaar verbonden is in $\overline{G}$, en hiermee is $U$ het per definitie een onafhankelijke verzameling in $\overline{G}$. □

**Gevolg 3.2.** *Zij $G = (V, E)$ een graaf, en $\overline{G} = (V, \overline{E})$ zijn complementgraaf. Dan geldt $k_t(G) = i_t(\overline{G})$ voor alle $t$, en dus ook $k(G) = i(\overline{G})$.*

*Bewijs.* Zij $\mathcal{K}(G)$ de verzameling klieken in $G$, en $\mathcal{I}(\overline{G})$ de verzameling onafhankelijke verzamelingen in $\overline{G}$. Uit Stelling 3.1 volgt dat elke kliek $U$ in $G$ een onafhankelijke verzameling is in $\overline{G}$. Dit betekent dat $\mathcal{K}(G) = \mathcal{I}(\overline{G})$, ofwel er is een bijectie tussen klieken in $G$ en onafhankelijke verzamelingen in $\overline{G}$. Het resultaat volgt meteen. □

Bovenstaande stellingen worden normaal niet expliciet als stellingen gegeven in de artikelen die over klieken en onafhankelijke verzamelingen gaan, maar als algemene waarheid beschouwd [7][16]. Hieronder staan wat stellingen die iets zeggen over het aantal klieken of onafhankelijke verzamelingen in een willekeurige graaf. Deze stellingen komen later terug bij het bewijzen van andere stellingen, of het bepalen van het aantal klieken of onafhankelijke verzamelingen van een graaf.

**Stelling 3.3** (Prodinger-Tichy)**.** *Zij $G_1 = (V, E_1)$ en $G_2 = (V, E_2)$ grafen op dezelfde puntenverzameling met $E_1 \subseteq E_2$. Dan geldt $i_t(G_1) \geq i_t(G_2)$ en $k_t(G_1) \leq k_t(G_2)$ voor alle $t$.*

*Bewijs.* Wanneer $E_1 = E_2$ geldt dat $i_t(G_1) = i_t(G_2)$ en $k_t(G_1) = k_t(G_2)$ voor alle $t$. Elke lijn die je toevoegt zorgt ervoor dat het aantal onafhankelijke verzamelingen afneemt (of in ieder geval niet toeneemt), en het aantal klieken toeneemt (of in ieder geval niet afneemt). □

**Gevolg 3.4** (Prodinger-Tichy)**.** *Zij $G = (V, E)$ een graaf op $n$ punten, dan geldt*

$$n + 1 = i(K_n) \leq i(G) \leq i(\overline{K_n}) = 2^n;$$
$$n + 1 = k(\overline{K_n}) \leq k(G) \leq k(K_n) = 2^n.$$

*Bewijs.* Het moge duidelijk zijn dat een graaf zonder lijnen het aantal onafhankelijke verzamelingen maximaliseert, en de volledige graaf het aantal klieken maximaliseert. De ongelijkheden volgen onmiddellijk met Stelling 3.3. De onafhankelijke verzamelingen in $K_n$ zijn de lege verzameling en alle losse punten, en de onafhankelijke verzamelingen in $\overline{K_n}$ zijn alle mogelijke puntendeelverzamelingen. Analoog voor klieken. □

**Stelling 3.5** (Prodinger-Tichy)**.** *Zij $G_1 = (V_1, E_1)$ en $G_2 = (V_2, E_2)$ grafen, dan geldt*

$$i(G_1 \cup G_2) = i(G_1) \cdot (G_2); \tag{1}$$
$$k(G_1 \cup G_2) = k(G_1) + k(G_2) - 1. \tag{2}$$

*Hierbij is $G_1 \cup G_2$ de disjuncte vereniging van de twee grafen $G_1$ en $G_2$, dat wil simpelweg zeggen dat je de twee grafen 'naast elkaar zet' en geen punten tussen de twee grafen verbindt.*

*Bewijs.* Voor elke onafhankelijke verzameling $U_1$ in $G_1$ en $U_2$ in $G_2$ geldt dat $U_1 \cup U_2$ een onafhankelijke verzameling is in $G_1 \cup G_2$. Het resultaat voor onafhankelijke verzamelingen volgt hier meteen uit, omdat je voor $U_1$ precies $i(G_1)$ mogelijkheden hebt, en voor $U_2$ zijn dat er $i(G_2)$. Omdat de punten in $G_1$ en $G_2$ niet met elkaar verbonden zijn, kun je dus niet meer klieken maken met punten uit $G_1$ en $G_2$, en daarom tel je de aantallen op. Omdat je de lege verzameling twee keer telt, moet je die er nog wel een keer afhalen. □

**Stelling 3.6** (Prodinger-Tichy-Wingard)**.** *Zij $G = (V, E)$ een graaf, $v \in V$, en $G_v$ de deelgraaf geïnduceerd door $v$ en haar buren. Dan geldt*

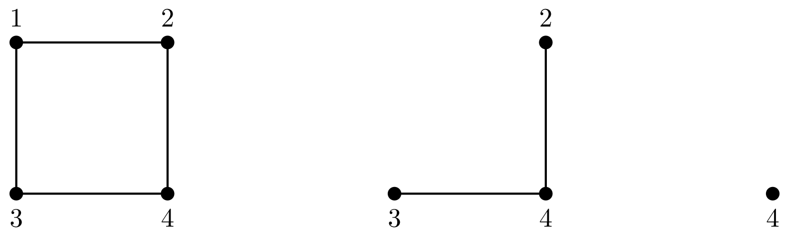
$$i(G) = i(G - v) + i(G - G_v).$$

*Hierbij is $G - v$ de graaf $G$ waar het punt $v$ uit is weggelaten en alle lijnen die $v$ als eindpunt hadden, en $G - G_v$ de graaf waar de deelgraaf $G_v$ is weggelaten, en alle lijnen die een eindpunt hadden in $G_v$.*

Prodinger en Tichy [4] gebruikten deze stelling eerder al, maar dan alleen op een blad van een boom, ofwel een punt met graad één. Wingard [15] breidde deze uit naar een algemenere versie.

**Voorbeeld 3.7.** Zij $G$ de graaf zoals in Figuur 4. Neem voor het punt $v = \{1\}$, en dus is $G_v = \{1, 2, 3\}$. Het is niet moeilijk om na te gaan dat $i(G) = \sum_{t=0}^{4} i_t(G) = 1 + 4 + 2 + 0 + 0 = 7$. Evenzo geldt $k(G - \{1\}) + k(G - G_1) = 5 + 2 = 7$.

*Bewijs van Stelling 3.6.* Als we de onafhankelijke verzamelingen van $G$ willen tellen, dan kunnen we onderscheid maken in de onafhankelijke verzamelingen met of zonder het punt $v$. Als we de onafhankelijke verzamelingen zonder $v$ tellen, dan geeft dat per definitie $i(G - v)$ onafhankelijke verzamelingen. Als $v$ er wel in zit, dan kunnen de punten waar $V$ mee verbonden is niet in de onafhankelijke verzameling zitten. Omdat



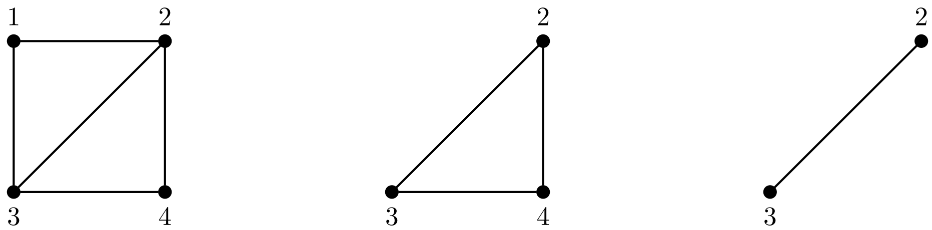

Figuur 4: De grafen $G$, $G - \{1\}$ en $G - G_1$

we $v$ al vast hebben genomen, zijn er dus $i(G - G_v)$ van zulke verzamelingen. Als we dit combineren krijgen we het gewenste resultaat. Merk op dat dit ook overeenkomt met de onafhankelijke verzamelingen in Voorbeeld 3.7, waar je bij de onafhankelijke verzamelingen van $G - G_1$ punt $\{1\}$ erbij moet denken. $\square$

**Stelling 3.8** (Wood)**.** *Zij $G = (V, E)$ een graaf, $v \in V$, en $N(v)$ de deelgraaf geïnduceerd door de buren van $v$ (en dus niet $v$ zelf). Dan geldt*

$$k(G) = k(G - v) + k(N(v)) \leq k(G - v) + 2^{\deg(v)}.$$

**Voorbeeld 3.9.** Zij $G$ de graaf zoals in Figuur 5. Neem voor het punt $v = \{1\}$, en dus is $N(\{1\}) = \{2, 3\}$. Het is niet moeilijk om na te gaan dat $k(G) = \sum_{t=0}^{4} k_t(G) = 1 + 4 + 5 + 2 + 0 = 12$. Evenzo geldt $k(G - \{1\}) + k(N(\{1\})) = 8 + 4 = 12$.




Figuur 5: De grafen $G$, $G - \{1\}$ en $N(\{1\})$

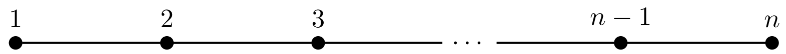
*Bewijs van Stelling 3.8.* Merk op dat $X$ een kliek is van $G$ die $v$ bevat, dan en slechts dan als $X = Y \cup \{v\}$ voor een kliek $Y \subseteq N(v)$. Dat betekent dat het aantal klieken dat $v$ bevat precies $k(N(v))$ is. Elke kliek van $G$ bevat $v$ wel of niet, dus $k(G) = k(G - v) + k(N(v))$, en de ongelijkheid volgt, omdat het aantal klieken dat $v$ wel bevat hoogstens $2^{\deg(v)}$ is. Dit komt ook weer overeen met de klieken in Voorbeeld 3.9. Bij de klieken in $N(\{1\})$ moet je weer punt $\{1\}$ erbij denken. $\square$

## 3.2 Bomen

Het eerste type grafen dat we behandelen zijn bomen. We beginnen met twee lemma's die voor twee specifieke grafen het aantal onafhankelijke verzamelingen berekenen. Vervolgens kijken we naar de boven- en ondergrens voor het aantal onafhankelijke verzamelingen van bomen. Deze resultaten zijn niet bijzonder lastig, en zijn een goede manier om wat meer in het onderwerp te komen. Daarna behandelen we nog twee voorbeelden. Klieken zullen niet behandeld worden in deze sectie. Immers, voor een boom op $n$ punten geldt dat $k(G) = 1 + n + (n - 1) = 2n$; de lege verzameling, alle punten, en alle lijnen vormen samen alle klieken in een boom. Er zijn geen 3-cykels, dus ook geen grotere klieken.

In een artikel uit 1979 van Prodinger en Tichy [4] wordt het aantal onafhankelijke verzamelingen in een graaf het *Fibonacci-getal* van een graaf genoemd. Waarom ze dat doen wordt duidelijk door het volgende lemma.

**Lemma 3.10** (Prodinger-Tichy)**.** *Zij $P_n$ de boom op $n$ punten, zonder vertakkingen. Dan geldt $i(P_n) = F_{n+2}$ waarbij $F_n$ het $n$-de Fibonacci-getal is, met $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, en $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.*

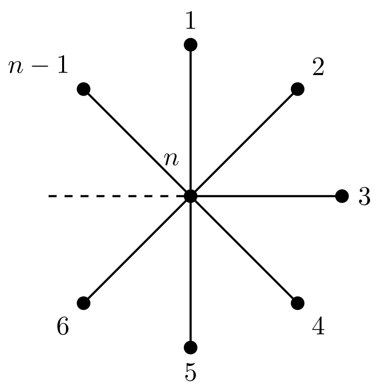



Figuur 6: de graaf $P_n$

*Bewijs.* Dit lemma kan eenvoudig met behulp van Stelling 3.6 en inductie op het aantal punten bewezen worden. Voor $n = 1, 2$ is dit triviaal. Stel dat de gelijkheid geldt voor zulke grafen op hoogstens $n-1$ punten. Nu geldt door Stelling 3.6 dat

$$\begin{aligned} i(P_n) &= i(P_n - \{n\}) + i(P_n - \{n, n-1\}) \\ &= i(P_{n-1}) + i(P_{n-2}) \\ &= F_{n+1} + F_n \\ &= F_{n+2}. \end{aligned}$$ □

**Lemma 3.11** (Prodinger-Tichy)**.** *Zij $S_n$ de stervormige graaf op $n$ punten. Dan geldt $i(S_n) = 1 + 2^{n-1}$.*




Figuur 7: de graaf $S_n$

*Bewijs.* Dit resultaat is niet moeilijk in te zien. We splitsen het aantal op in onafhankelijke verzamelingen die het middelpunt $\{n\}$ óf wel óf niet bevatten. De enige onafhankelijke verzameling die $\{n\}$ bevat is $\{n\}$ zelf. Omdat de overige punten allemaal onderling onafhankelijk zijn, zijn er $2^{n-1}$ onafhankelijke verzamelingen die $\{n\}$ niet bevatten (de lege verzameling meegerekend). Dit samen geeft $i(S_n) = 1 + 2^{n-1}$. Merk op dat dit hetzelfde is als Stelling 3.6 toepassen op punt $\{n\}$. □

**Stelling 3.12** (Prodinger-Tichy)**.** *Zij $T_n$ een boom op $n$ punten, dan geldt*

$$F_{n+2} \leq i(T_n) \leq 2^{n-1} + 1.$$

*Opmerking.* Dit is meteen een strakke boven- en ondergrens, omdat het minimum en maximum respectievelijk worden aangenomen in de bomen $P_n$ en $S_n$.

*Bewijs.* We beginnen met de tweede ongelijkheid door middel van inductie op het aantal punten van de boom. Voor $n = 1, 2$ is dit triviaal. Stel dat de ongelijkheid geldt voor een boom $T_n$. Zij $v$ een blad van $T_{n+1}$, en $w$ het punt dat met $v$ verbonden is. We zullen weer Stelling 3.6 toepassen op $v$. Er geldt $i(T_{n+1}) = i(T_{n+1} - v) + i(T_{n+1} - \{v, w\})$. Er geldt dat $T_{n+1} - v$ een boom is op $n$ punten, dus geldt $i(T_{n+1} - v) \leq 2^{n-1} + 1$ wegens de inductiehypothese. Er geldt dat $T_{n+1} - \{v, w\}$ een graaf (niet noodzakelijk een boom) is op $n - 1$ punten, dus geldt $i(T_{n+1} - \{v, w\}) \leq 2^{n-1}$. Als we dit combineren krijgen we $i(T_{n+1}) \leq 2^{n-1} + (2^{n-1} + 1) = 2^n + 1$.

Om de eerste ongelijkheid te bewijzen, is het nodig om het wat algemener te bekijken, namelijk voor een bos. Merk op dat wanneer deze ongelijkheid geldt voor bossen, dat het dan ook zeker geldt voor bomen. We gebruiken weer inductie op het aantal punten van het bos. Voor $n = 1, 2$ is dit weer triviaal. Stel dat de ongelijkheid geldt voor bossen met hoogstens $n$ punten. Zij $v$ een blad van het bos $T_{n+1}$, en $w$ het punt dat met $v$ verbonden is. Met hetzelfde argument als net geldt dat $i(T_{n+1} - v) \geq F_{n+2}$ en $i(T_{n+1} - \{v, w\}) \geq F_{n+1}$. Als we dit combineren krijgen we $i(T_{n+1}) \geq F_{n+2} + F_{n+1} = F_{n+3}$. We zijn er in dit tweede deel wel vanuit gegaan dat een bos op $n$ punten een blad heeft, maar dat is natuurlijk niet het geval voor het bos $nK_1$ ($n$ losse punten). Merk op dat de eerste ongelijkheid nog steeds geldt voor $nK_1$ (de tweede dan natuurlijk niet, maar daarom hebben we in het bewijs van het eerste deel niet aangenomen dat het om een bos ging).

Dit geeft het gewenste resultaat $F_{n+2} \leq i(T_n) \leq 2^{n-1} + 1$. □

We hebben al gezien dat de bomen $P_n$ en $S_n$ respectievelijk de onder- en bovengrens aannemen voor het aantal onafhankelijke verzamelingen, we zullen nu ook nog bewijzen dat dit de unieke extremale grafen zijn. Onderstaande resultaten komen van Li, Li en Wang [17]. Hun artikel richtte zich op structuurformules van moleculen, en het aantal onafhankelijke verzamelingen werd daar aangegeven als de *$\sigma$-index* van een graaf.

**Gevolg 3.13** (Li-Li-Wang). *Zij $T_n$ een boom op $n$ punten, dan geldt*

$$i(T_n) = 2^{n-1} + 1 \iff T_n = S_n.$$

*Bewijs.* We zullen dit weer bewijzen met inductie op $n$. De stelling is triviaal voor $n = 1, 2$. Stel dat het waar is voor $n \geq 3$. Zij $v$ een blad. Wegens Stelling 3.6 geldt dat $i(T_{n+1}) = i(T_{n+1} - v) + i(T_{n+1} - G_v)$. Merk op dat $T_{n+1} - v$ net als in het bewijs van Stelling 3.12 een boom is op $n$ punten. Wegens Stelling 3.12 geldt ook dat $i(T_{n+1} - v) = i(T_n) \leq 2^{n-1} + 1$. $T_{n+1} - G_v$ is niet noodzakelijk een boom, maar een graaf op (hoogstens) $n-1$ punten en daarom geldt wegens Gevolg 3.4 dat $i(T_{n+1} - G_v) \leq 2^{n-1}$. We krijgen $i(T_{n+1}) = i(T_n) + i(T_{n+1} - G_v) = 2^n + 1 \iff i(T_n) = 2^{n-1} + 1$ en $i(T_{n+1} - G_v) = 2^{n-1}$. Ofwel, de ongelijkheden voor $T_n$ en $T_{n+1} - G_v$ kunnen niet strikt zijn als we aannemen dat $i(T_{n+1}) = 2^n + 1$. Wegens de inductiehypothese geldt dat $T_n = S_n$, en volgt dat $T_{n+1} = S_{n+1}$. □

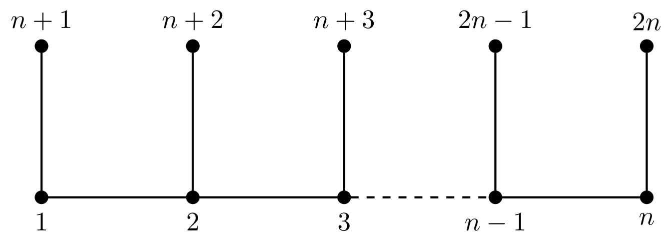
**Gevolg 3.14** (Li-Li-Wang). *Zij $T_n$ een boom op $n$ punten, dan geldt*

$$i(T_n) = F_{n+2} \iff T_n = P_n.$$

*Bewijs.* Het bewijs is analoog aan dat van Gevolg 3.13. Net als bij het bewijs van Stelling 3.12 zullen we de bewering algemener bewijzen, namelijk voor bossen. We zullen dit weer bewijzen met inductie op $n$. De stelling is triviaal voor $n = 1, 2$. Stel dat het waar is voor $n \geq 3$. Zij $v$ een punt met graad hooguit 1 (we nemen dit zonder verlies van algemeenheid aan). Wegens Stelling 3.6 en geldt weer dat $i(T_{n+1}) = i(T_n) + i(T_{n+1} - G_v)$. Ook hier gebruiken we weer Stelling 3.12 zodat $i(T_n) \geq F_{n+2}$ en $i(T_{n+1} - G_v) \geq F_{n+1}$. We krijgen $i(T_{n+1}) = i(T_n) + i(T_{n+1} - G_v) = F_{n+3} \iff i(T_n) = F_{n+2}$ en $i(T_{n+1} - G_v) = F_{n+1}$. Wegens de inductiehypothese geldt dat $T_n = P_n$, en krijgen we $T_{n+1} = P_{n+1}$. $\square$

We zullen de sectie nu afsluiten met het bepalen van het aantal onafhankelijke verzamelingen voor twee specifieke bomen.

**Voorbeeld 3.15** (Prodinger-Tichy)**.** Zij $R_n$ de graaf op $2n$ punten zoals in Figuur 8.




Figuur 8: de graaf $R_n$

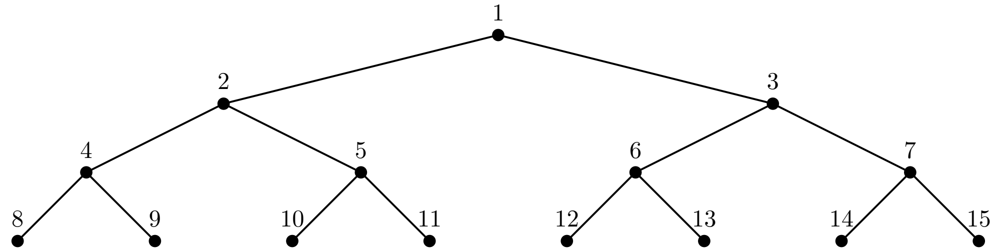
Om het aantal onafhankelijke verzamelingen van $R_n$ te bepalen, gebruiken we Stelling 3.6 twee maal, te beginnen bij het punt $\{2n\}$, en vervolgens op het punt $\{n\}$ van de graaf $R_n - \{2n\}$. Dit geeft:

$$\begin{aligned} i(R_n) &= i(R_n - \{2n\}) + i(R_n - \{2n, n\}) \\ &= i(R_n - \{2n, n\} + i(R_n - \{2n, n, n-1\}) + i(R_{n-1}) \\ &= i(R_{n-1}) + 2i(R_{n-2}) + i(R_{n-1}) \\ &= 2i(R_{n-1}) + 2i(R_{n-2}). \end{aligned}$$

Merk hierbij op dat de graaf $R_n - \{2n, n, n-1\}$ bestaat uit de graaf $R_{n-2}$ en het losse punt $\{2n-1\}$, waardoor we de factor 2 krijgen wegens Vergelijking (1). We hebben nu een tweedegraads lineaire recursie, die we (bijvoorbeeld) op kunnen lossen met behulp van een genererende functie, zoals beschreven in *Combinatorics: A Guided Tour* [13, p. 138]. Prodinger en Tichy [4] geven de oplossing:

$$i(R_n) = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{6}(1 + \sqrt{3})^n + \frac{3 - 2\sqrt{3}}{6}(1 - \sqrt{3})^n.$$

**Voorbeeld 3.16.** Zij $T_{n,h}$ een *perfecte, n-aire boom van hoogte h.* Dat wil zeggen dat elke punt precies *n kinderen* heeft, en alle bladen op dezelfde hoogte $h$ zitten. Dan geldt $i(T_{n,h}) = i(T_{n,h-1})^n + i(T_{n,h-2})^{n^2}$.




Figuur 9: De boom $T_{2,4}$

We gebruiken weer Stelling 3.6. Als we het 1$^e$ punt verwijderen, en vervolgens de punten $\{2\}$ tot en met $\{n+1\}$ (als we de telling van Voorbeeld 9 zouden aanhouden voor het algemene geval), krijgen we het volgende:

$$\begin{aligned} i(T_{n,h}) &= i(T_{n,h} - \{1\}) + i(T_{n,h} - \{1, 2, \ldots, n+1\}) \\ &= i(T_{n,h-1})^n + i(T_{n,h-2})^{n^2}. \end{aligned}$$

Hier gebruiken we dat het algemene geval van Vergelijking (1). Als we de bovenste punt weghalen, zijn er $n$ bomen $T_{n,h-1}$, en $n^2$ bomen $T_{n,h-2}$. Uiteindelijk krijgen we een tweedegraads niet lineaire recursie, maar het is helaas niet gelukt om hier een directe formule voor op te stellen. Wel maakt dit het alsnog makkelijker om het aantal onafhankelijke verzamelingen te bepalen voor zulke bomen. We krijgen bij het voorbeeld in Figuur 9: $i(T_{2,4}) = i(T_{2,3})^2 + i(T_{2,2})^4 = (i(T_{2,2})^2 + i(T_{2,1})^4)^2 + 625 = 1.681 + 625 = 2.306$.

## 3.3 Lex- en colexgraaf

In deze sectie kijken we naar grafen waarvan het aantal punten en het aantal lijnen gegeven is. Hoe de lijnen over de punten verdeeld zijn, bepaalt natuurlijk hoeveel klieken en onafhankelijke verzamelingen er zijn. Er zal blijken dat de lex- en colexgraaf hier een sleutelrol spelen. Wat die precies zijn, en waarom ze het aantal klieken en onafhankelijke verzamelingen maximaliseren, zal snel duidelijk worden.

**Definitie 3.17.** De *lexicografsiche ordening* op paren $A = (a_1, a_2)$ en $B = (b_1, b_2)$ met elementen uit $\mathbb{N}$ is als volgt gedefinieerd: $A <_L B$ als $a_1 < b_1$ of als $a_1 = b_1$ en $a_2 < b_2$. De *colexigrafische ordening* is zo gedefinieerd: $A <_C B$ als $a_2 < b_2$ of als $a_2 = b_2$ en $a_1 < b_1$. Omdat we alleen geïnteresseerd zijn in lijnen van simpele grafen, bestaan paren altijd uit twee verschillende getallen, en zetten we het kleinste getal op de eerste plek.

De eerste paar lijnen in de lex-ordening op $E(K_n)$ zijn dan

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \ldots, \{1, n\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \ldots, \{2, n\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \ldots$$

en de eerste paar lijnen in de colex-ordening op $E(K_n)$ zijn

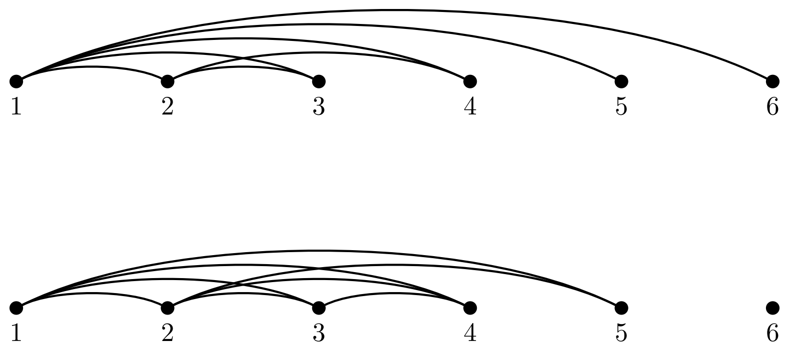
$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}, \ldots$$

**Definitie 3.18.** De *lex-graaf* $L(n, m)$ is de graaf op $n$ punten, met de eerste $m$ lijnen uit de lexicografische ordening op $E(K_n)$. De *colex-graaf* $C(n, m)$ is de graaf op $n$ punten, met de eerste $m$ lijnen uit de colexigrafische ordening op $E(K_n)$ (zie ook [12]).

Als je kijkt naar de lex-graaf, dan zie je dat die met de eerste $n-1$ lijnen de stergraaf maakt, en dat is niet geheel ontoevallig de boom met het meeste aantal onafhankelijke verzamelingen. De verdeling van lijnen is hier dan ook zo, zodat er zoveel mogelijk punten zijn die nog niet met elkaar verbonden zijn. Als je kijkt naar de colex-graaf, dan zie je dat die zoveel mogelijk klieken maakt. Met de eerste drie lijnen wordt een 3-kliek gemaakt, en vervolgens een 4-kliek (die dus bestaat uit vier 3-klieken), enzovoorts. Cutler en Radcliffe [6] merkten op dat onderstaande stelling een gevolg is van het werk van Kruskal [11] en Katona [10]. Echter, in die artikelen gaat het niet zozeer om grafen, maar bekijken ze het wat algemener: Kruskal had het over simplices, en Katona over families van verzamelingen. We zullen deze onderwerpen niet verder toelichten. De volgende stelling kan als gevolg van hun werk gezien worden.

**Stelling 3.19** (Kruskal-Katona)**.** *Zij $G$ een graaf op $n$ punten, met $m$ lijnen, dan geldt*

$$i(G) \leq i(L(n, m)).$$




Figuur 10: De grafen $L(6,7)$ (boven) en $C(6,8)$ (onder)

Wood [16] pakte het iets anders aan, hij keek naar het aantal klieken in grafen met $n$ punten en $m$ lijnen. Niet geheel verrassend, wordt hier het maximum aantal klieken behaald door de colex-graaf. Hij kwam tot het volgende resultaat:

**Stelling 3.20** (Wood)**.** *Zij $n, m \in \mathbb{N}$ zodat $m \leq \binom{n}{2}$. Zij $d, l \in \mathbb{N}$ uniek, zodat $m = \binom{d}{2} + l$ waar $d \geq 1$ en $0 \leq l \leq d-1$. Dan geldt voor een graaf $G$ op $n$ punten met $m$ lijnen*

$$k(G) \leq k(C(n,m)) = 2^d + 2^l + n - d - 1.$$

Echter, in het artikel van Wood [16] wordt het woord colex-graaf niet één keer genoemd, en niet alleen omdat het artikel niet in het Nederlands is. Hoewel Stelling 3.20 equivalent is met Stelling 3.19, wordt ook niet naar de artikelen van Kruskal [11] en Katona [10] verwezen. Waarschijnlijk was Wood niet op de hoogte van de lex- en colexgrafen, en was in dit vakgebied überhaupt nog niet bekend dat Stelling 3.19 een gevolg was van het werk van Kruskal en Katona.

Iets dat belangrijk is om op te merken is dat $L(n,m) \cong \overline{C(n, \binom{n}{2} - m)}$. In Figuur 10 staan twee zulke complementaire grafen: de punten die in $L(6,7)$ niet verbonden zijn, zijn dat in $C(6,8)$ juist wel (mits je de nummering omdraait natuurlijk). Het is ook niet zo heel raar dat zulke grafen complementair zijn. Want waar in de lex-graaf eerst alle andere punten met punt $\{1\}$ worden verbonden, gebeurt dit in de colex-graaf juist niet met punt $\{n\}$. Dit betekent dus dat

$$i(L(n,m)) = k(\overline{L(n,m)}) = k(C(n, \tbinom{n}{2}) - m)$$

en ook dat wanneer we Stelling 3.20 bewezen hebben, dat we dan ook Stelling 3.19 bewezen hebben. Hieronder gaan we verder met het bewijs van Wood [16].

*Bewijs Stelling 3.20.* We zullen eerst aantonen dat $k(C(n,m)) = 2^d + 2^l + n - d - 1$. Als $m = \binom{d}{2} + l$ zoals in de stelling, dan vormen de eerste $d$ punten een kliek, en zijn de eerste $l$ punten verbonden met het punt $\{d+1\}$. Merk op dat dit inderdaad de colex-graaf op $n$ punten met $m$ lijnen geeft. In Figuur 10 geldt dat $m = 8 = \binom{4}{2} + 2$, en vormen de eerste vier punten een volledige deelgraaf, en is punt $\{5\}$ verbonden met punten $\{1\}$ en $\{2\}$. Die eerste $d$ punten geven dus $2^d$ klieken (inclusief de lege verzameling). Omdat de $l$ punten waar punt $\{d+1\}$ verbonden mee is, onderling ook allemaal verbonden zijn, zijn er dus $2^l$ klieken die het punt $\{d+1\}$ bevatten. Tenslotte zijn er nog $n-d-1$ punten over, die evenveel klieken geven. In totaal heeft $C(n,m)$ dus $2^d + 2^l + n - d - 1$ klieken.

Nu moeten we nog bewijzen dat elke graaf $G = (V,E)$ op $n$ punten met $m$ lijnen hoogstens zoveel klieken heeft. We doen dit door middel van inductie op $n + m$. Als

$m = 0$, dan geldt (onafhankelijk van $n$) dat $d = 1$ en $l = 0$, en dus $k(G) = n + 1 = 2^d + 2^l + n - d - 1$. Stel nu dat $m \geq 1$. Laat $v \in V$ een punt zijn van minimumgraad. Dan geldt dus dat $\deg(v) \leq d-1$, want anders geldt $m \geq \frac{dn}{2} \geq \frac{d(d+1)}{2} = \binom{d+1}{2}$, en dat is een tegenspraak met onze aannames. Door Stelling 3.8 geldt $k(G) \leq k(G-v) + 2^{\deg(v)}$. Omdat $G - v$ precies $n - 1$ punten en $m - \deg(v)$ lijnen heeft, kunnen we hier onze inductiehypothese op toepassen. We maken onderscheid tussen twee gevallen.

Stel dat $\deg(v) \leq l$. Er geldt dat $m - \deg(v) = \binom{d}{2} + l - \deg(v)$, en dus krijgen we

$$k(G) \leq k(G-v) + 2^{\deg(v)} \leq 2^d + 2^{l-\deg(v)} + (n-1) - d - 1 + 2^{\deg(v)}.$$

Het resultaat volgt als $2^d + 2^{l-\deg(v)} + (n-1) - d - 1 + 2^{\deg(v)} \leq 2^d + 2^l + n - d - 1$, ofwel $2^{l-\deg(v)} + 2^{\deg(v)} - 1 \leq 2^l$, en dat is waar omdat $\deg(v) \leq l$.

Stel nu dat $l + 1 \leq \deg(v) \leq d - 1$. We gebruiken nu dat $m - \deg(v) = \binom{d-1}{2} + d - 1 + l - \deg(v)$ (merk op dat $\binom{d}{2} = \binom{d-1}{2} + d - 1$), en dus krijen we

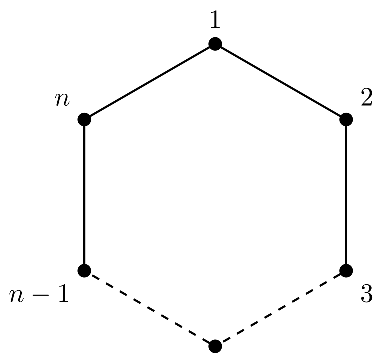
$$k(G) \leq k(G-v) + 2^{\deg(v)} \leq 2^{d-1} + 2^{d-1+l-\deg(v)} + (n-1) - (d-1) - 1 + 2^{\deg(v)}.$$

Het resultaat volgt als $2^{d-1}+2^{d-1+l-\deg(v)}+n-d-1+2^{\deg(v)} \leq 2^d+2^l+n-d-1$, ofwel als $2^{d-1}+2^{d-1+l-\deg(v)}+2^{deg(v)} \leq 2^d+2^l$. Als we $2^l$ naar links halen, en $2^{d-1}+2^{d-1+l-\mathrm{v}}$ naar rechts, krijgen we $2^l(2^{\deg(v)-l}-1) \leq 2^{d-1-\deg(v)+l}(2^{\deg(v)-l}-1)$. En dit geldt weer als $l \leq d - 1 - \deg(v) + l$, en dat klopt, omdat $\deg(v) \leq d - 1$. □

## 3.4 *d*-reguliere en bipartiete grafen

We richten ons in deze sectie op $d$-reguliere grafen. Dat wil zeggen, alle punten in de graaf hebben graad $d$. Er zal blijken dat volledig bipartiete grafen een belangrijke rol spelen bij het aantal onafhankelijke verzamelingen van zulke grafen. Immers, volledig bipartiete grafen hebben twee deelverzamelingen punten die allemaal onafhankelijk van elkaar zijn. Maar wat gebeurt er als er meer dan $n \geq 2d$ punten zijn? Voordat we die vraag kunnen beantwoorden, zullen we eerst een eenvoudige graaf bekijken, en vervolgens zullen wat definities geïntroduceerd worden, voordat we naar de belangrijkste stelling van deze sectie kunnen gaan. Aan het einde van de sectie komen klieken nog kort aan bod komen aan de hand van de stellingen die we hebben bewezen over onafhankelijke verzamelingen.

**Voorbeeld 3.21** (Prodinger-Tichy)**.** Zij $C_n$ de cykelgraaf op $n \geq 3$ punten, dan geldt $i(C_n) = L_n$. Waarbij $L_n$ het $n$-de Lucas-getal is, met $L_1 = 1, L_2 = 3$, en $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$. We maken weer gebruik van Stelling 3.6.



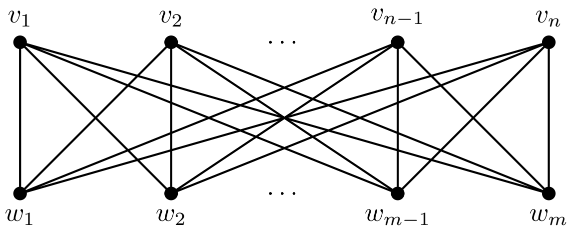

Figuur 11: de graaf $C_n$

$$
\begin{aligned}
i(C_n) &= i(C_n - \{1\}) + i(C_n - \{1,2,n\}) \\
&= i(P_{n-1}) + i(P_{n-3}) \\
&= F_{n+1} + F_{n-1} \\
&= L_n.
\end{aligned}
$$

We gebruiken in de laatste gelijkheid een bekend resultaat over de Lucas-getallen [13, p. 159].

*Opmerking.* Dit betekent dus ook dat elke $(d-3)$-reguliere graaf op $d$ punten precies $L_d$ klieken heeft, omdat zulke grafen het complement zijn van $C_d$.

**Lemma 3.22.** *Zij $K_{n,m}$ een volledig bipartiete graaf op $n+m$ punten, dan geldt $i(K_{n,m}) = 2^n + 2^m - 1$.*




Figuur 12: de graaf $K_{n,m}$

*Bewijs.* Het bewijs hiervoor is redelijk eenvoudig. Omdat elk punt in het 'bovenste' deel verbonden is met ieder punt in het 'onderste' deel, en vice versa, zijn er geen onafhankelijke verzamelingen die punten uit beide delen bevatten. Omdat de delen op zichzelf uit losse punten bestaan, zijn er $2^n$ en $2^m$ onafhankelijke verzamelingen in de beide delen respectievelijk. De lege verzameling wordt twee keer geteld, dus die halen we er dan nog een keer vanaf. Dit geeft het gewenste resultaat. Merk op dat dit hetzelfde is als klieken tellen in de complementgraaf $\overline{K_{n,m}} = K_n \cup K_m$, en vervolgens Vergelijking (2) toe te passen. $\square$

*Opmerking.* Hieruit volgt dat $i(K_{n,n}) = 2^{n+1} - 1$.

Zhao [18] heeft in zijn artikel uit 2009 de bovengrens voor het aantal onafhankelijke verzamelingen in $d$-reguliere grafen op $n$ punten bewezen, namelijk $(2^{d+1}-1)^{n/2d}$. Dit lijkt natuurlijk enorm op het aantal onafhankelijke verzamelingen van $K_{d,d}$. De bovengrens wordt dan ook aangenomen wanneer $n$ deelbaar is door $2d$, en we dus zoveel 'kopieën' hebben van $K_{d,d}$. Het vermoeden is voor het eerst verschenen in een artikel van Alon [1] uit 1989, maar voor het eerst formeel opgesteld door Kahn [9] in 2001. Voor we met de stelling en het bewijs komen, zijn er eerst nog wat definities die hier gebruikt worden.

**Definitie 3.23.** Zij $G = (V, E)$ een graaf, en $\mathcal{I}(G)$ de verzameling van alle onafhankelijke verzamelingen van $G$, dan is het *onafhankelijkheidspolynoom* (*independence polynomial*) van $G$ gedefinieerd als

$$P(\lambda, G) = \sum_{I \in \mathcal{I}(G)} \lambda^{|I|}.$$

$P(\lambda, G)$ is een gewone voortbrengende functie, waarbij de coëfficiënten van $P(\lambda, G)$ bij $\lambda^k$ het aantal onafhankelijke verzamelingen van grootte $k$ zijn. Merk op dat als $\lambda = 1$, dat dan $P(\lambda, G) = i(G)$.

**Voorbeeld 3.24.** We bepalen nu het onafhankelijkheidspolynoom van $K_{n,n}$. $K_{n,n}$ heeft natuurlijk één onafhankelijke verzameling van grootte 0, en omdat alle punten van de bovenste en onderste delen respectievelijk met elkaar verbonden zijn, tellen we alleen de onafhankelijke verzamelingen uit één deel, en vermenigvuldigen dat met twee. Voor een onafhankelijke verzameling van grootte $m \leq n$ geldt dat je $m$ punten uit moet kiezen, dit kan op $\binom{n}{m}$ manieren. Dit geeft:

$$\begin{aligned}
P(\lambda, K_{n,n}) &= 1 + 2\left[\binom{n}{1}\lambda + \binom{n}{2}\lambda^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}\lambda^{n-1} + \binom{n}{n}\lambda^n\right] \\
&= 1 + 2\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\lambda^j \\
&= 2\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\lambda^j - 1 \\
&= 2(\lambda+1)^n - 1.
\end{aligned}$$

*Opmerking.* Als we $\lambda = 1$ nemen, dan krijgen we hetzelfde resultaat als het speciale geval van lemma 3.22.

**Stelling 3.25** (Kahn-Zhao)**.** *Zij $G$ een $d$-reguliere graaf op $n$ punten, en zij $\lambda \geq 0$, dan geldt*

$$P(\lambda, G) \leq P(\lambda, K_{d,d})^{\frac{n}{2d}} = (2(1+\lambda)^d - 1)^{\frac{n}{2d}}.$$

Kahn [9] heeft deze stelling al bewezen voor bipartiete grafen. We zullen in het bewijs van de stelling wel gebruik maken van dit resultaat, maar zullen deze niet meer bewijzen. In zijn artikel maakt Kahn gebruik van entropie-methoden, en deze zijn niet bijzonder relevant voor deze scriptie.

**Gevolg 3.26** (Kahn-Zhao)**.** *Zij $G$ een $d$-reguliere graaf op $n$ punten, dan geldt*

$$i(G) \leq i(K_{d,d})^{\frac{n}{2d}} = (2^{d+1} - 1)^{\frac{n}{2d}}.$$

Om Stelling 3.25 te bewijzen, maken we gebruik van Lemma 3.30. Het bewijs hiervan is vrij technisch, en zal dan ook niet volledig gegeven worden, maar alleen in hoofdlijnen. Maar voordat we daaraan kunnen beginnen, zijn er eerst nog wat definities.

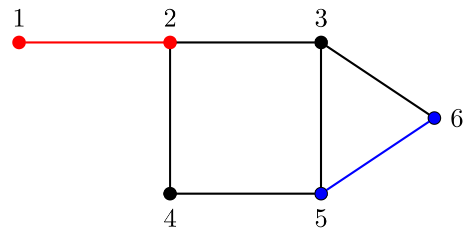
**Definitie 3.27.** Zij $G = (V, E)$ een graaf, en $A, B \subseteq V$. We zeggen dat $A$ *onafhankelijk* is van $B$, als er geen lijnen tussen punten van $A$ en $B$ zijn in $G$.

**Notatie 3.28.** $\mathcal{J}(G)$ is de verzameling paren $(A, B)$ zodat $A$ onafhankelijk is van $B$, en $G[A \cup B]$ bipartiet is. Hierbij is $G[A]$ de door $A$ geïnduceerde deelgraaf in $G$.

**Voorbeeld 3.29.** Omdat dit geen voor de hand liggende definities en notaties zijn, zullen we een voorbeeld geven van een element uit $\mathcal{J}(G)$ voor een graaf $G$. In Figuur 13 zijn $A = \{1, 2\}$ en $B = \{5, 6\}$ aangegeven. Het is duidelijk dat we van $G[A \cup B]$ een bipartiete graaf kunnen maken. Het wordt ook meteen duidelijk dat $G[A \cup B]$ bipartiet is, dan en slechts dan als $G[A]$ en $G[B]$ dat zijn.

**Lemma 3.30** (Zhao)**.** *Voor elke graaf $G = (V, E)$ bestaat er een bijectie tussen $\mathcal{I}(G) \times \mathcal{I}(G)$ en $\mathcal{J}(G)$.*

*Bewijs.* Voor elke $W \subseteq V$ zodat $G[W]$ bipartiet is, neem een bipartitie (een partitie die bipartiet is) $W = W_1 \cup W_2$ zodat $W_1$ en $W_2$ onafhankelijke verzamelingen zijn in




Figuur 13: In rood: A, in blauw: B

$G$ (Neem hiervoor de 'bovenste' en 'onderste' delen van $G[W]$ (in Figuur 13 zou dat $W_1 = \{1, 6\}$ en $W_2 = \{2, 5\}$ kunnen zijn).

Zij $\mathcal{H}(G)$ de verzameling paren $(A, B)$ met $A, B \subseteq V$ zodat $G[A \cup B]$ bipartiet is. Merk op dat $\mathcal{J}(G) \subseteq \mathcal{H}(G)$ en $\mathcal{I}(G) \times \mathcal{I}(G) \subseteq \mathcal{H}(G)$. Die tweede is wat moeilijker in te zien. Als $(A, B) \in \mathcal{I}(G) \times \mathcal{I}(G)$, dan geldt $G[A \cup B] = G[A \cup (B \setminus A)]$. We hebben dan twee onafhankelijke verzamelingen die in $G$ onafhankelijk van elkaar zijn, dus hiermee kun je dan je 'bovenste' en 'onderste' deel maken van je bipartiete graaf (Als $A = \{1, 3, 4\}$ en $B = \{1, 5\}$ zoals in Figuur 13, dan is je 'bovenste' deel dus $\{1, 3, 4\}$, en je 'onderste' deel $\{5\}$).

We construeren nu een involutie (een afbeelding die haar eigen inverse is) op $\mathcal{H}(G)$ als volgt. Voor een willekeurig paar $(A, B) \in \mathcal{H}(G)$, neem $W_1 \cup W_2$ als bipartitie van $W = A \cup B$. Laat de involutie $(A, B)$ dan sturen naar

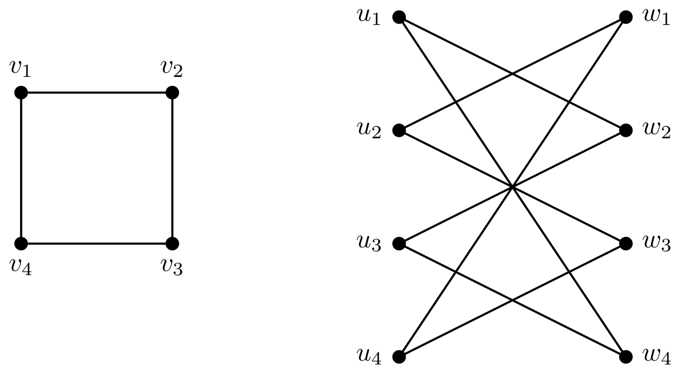
$$((A \cap W_1) \cup (B \cap W_2), (A \cap W_2) \cup (B \cap W_1)).$$

Het is misschien niet meteen duidelijk, maar dit is een grootte-behoudende involutie van $\mathcal{H}(G)$ die $\mathcal{I}(G) \times \mathcal{I}(G)$ naar $\mathcal{J}(G)$ stuurt, en vice-versa. We zullen het verduidelijken met een voorbeeld van Figuur 13. Zij $(A, B) = (\{1, 2\}, \{5, 6\})$. Merk op dat dit geen onafhankelijke verzamelingen zijn, en we dus 'vertrekken' vanuit $\mathcal{J}(G)$. We nemen voor $W_1 = \{1, 5\}$ en $W_2 = \{2, 6\}$. Dan wordt $(A, B)$ gestuurd naar $(\{1, 6\}, \{2, 5\})$. Merk op dat dit weer onafhankelijke verzamelingen zijn, en we dus in $\mathcal{I}(G) \times \mathcal{I}(G)$ terecht zijn gekomen. Als we dit opnieuw doen, komen we weer bij $(A, B)$ uit. $\square$

Nu we dit lemma hebben bewezen, kunnen we doorgaan naar het bewijs van Stelling 3.25. Maar voordat het zover is, komt er nog één definitie.

**Definitie 3.31.** Zij $G = (V, E)$ een graaf met $V = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Dan is $G \times K_2 = (U \cup W, \tilde{E})$ de *bipartiete dubbele overdekking* (*bipartite double cover*) waarbij $U = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $W = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, en $\tilde{E} = \{\{u_i, w_j\} \mid 1 \leq i, j \leq n, \{v_i, v_j\} \in E\}$ (zie ook [18]).

*Bewijs Stelling 3.25.* Zij $G = (V, E)$ een graaf. Laat $G \times K_2$ de bipartiete dubbele overdekking van $G$ zijn. Dan corresponderen de onafhankelijke verzamelingen van $G \times K_2$ met paren $(A, B)$ van deelverzamelingen uit $V$ zodat $A$ onafhankelijk van $B$ is. In deze definitie is een punt onafhankelijk van zichzelf (we werken met simpele grafen), dus in Figuur 14 is $(\{v_1\}, \{v_1\})$ ook zo'n paar (maar $(\{v_1\}, \{v_1, v_2\})$ niet!). Als we dan zo'n paar $(A, B)$ hebben, dan wordt $A$ gestuurd naar zichzelf in de ene helft van de bipartiete dubbele overdekking, en $B$ naar de andere. In Figuur 14 wordt $(v_1, v_3)$ gestuurd naar $\{u_1, w_3\}$. Omdat $A$ onafhankelijk van $B$, krijgen we in $G \times K_2$ altijd weer een onafhankelijke verzameling. Andersom: als we een onafhankelijke verzameling hebben in $G \times K_2$, dan sturen we de elementen in de linkerhelft naar $A$, en die in de rechterhelft naar $B$. Deze twee zijn dan onafhankelijk van elkaar, omdat de elementen




Figuur 14: De grafen $C_4$ en $C_4 \times K_2$

uit $G \times K_2$ onafhankelijk zijn. Merk op dat $i(C_4 \times K_2) = i(C_4)^2 = 49$, in appendix A ziet u alle paren $(A, B)$ zodat $A$ onafhankelijk van $B$ is van de graaf $C_4$.

Dus geldt voor $\lambda \geq 0$,

$$P(\lambda, G \times K_2) = \sum_{I \in \mathcal{I}(G \times K_2)} \lambda^{|I|} = \sum_{\substack{A,B \subseteq V(G) \\ A \text{ onafh. van } B}} \lambda^{|A|+|B|} \geq \sum_{(A,B) \in \mathcal{J}(G)} \lambda^{|A|+|B|} = \sum_{A,B \in \mathcal{I}(G)} \lambda^{|A|+|B|} = P(\lambda, G)^2. \quad (3)$$

Hier gebruiken we in de voorlaatste stap Lemma 3.30. Merk op dat $G \times K_2$ $d$-regulier is, omdat $G$ dat ook is. Ook is $G \times K_2$ bipartiet, en we weten door Kahn [9] dat de stelling hiervoor dus al waar is:

$$P(\lambda, G \times K_2) \leq P(\lambda, K_{d,d})^{\frac{n}{d}}. \quad (4)$$

Als we (3) en (4) combineren, krijgen we

$$P(\lambda, G) \leq P(\lambda, K_{d,d})^{\frac{n}{2d}}$$

waarmee het bewijs rond is. □

Cutler en Radcliffe [7] hebben een ondergrens voor het aantal onafhankelijke verzamelingen van een $d$-reguliere graaf gevonden. Voordat we naar die stelling kunnen, moeten we eerst nog een lemma bewijzen.

**Lemma 3.32** (Cutler-Radcliffe)**.** *Zij $G = (V, E)$ een $d$-reguliere graaf op $n = a(d+1)$ punten, dan geldt voor alle $1 \leq t \leq n$ en $I \in \mathcal{I}_{t-1}(G)$*

$$\#\{J \in \mathcal{I}_t(G) : J \supseteq I\} \geq (a - t + 1)(d + 1).$$

*Bewijs.* Het aantal links is het aantal $t$-klieken om $I$ en is gelijk aan het aantal punten dat niet is verbonden met een van de punten in $I$. Dit zijn dus alle punten van $G$, zonder de punten die wél verbonden zijn met een punt in $I$. Dit geeft

$$|V \setminus \bigcup_{v \in I} G_v| \geq n - (t-1)(d+1) = (a - t + 1)(d + 1).$$

Hier is $G_v$ de deelgraaf geïnduceerd door $v$ en haar buren. De formule volgt, omdat $I$ precies $t - 1$ punten heeft, die daarnaast allemaal $d$ buren hebben (dit hoeven niet noodzakelijk allemaal verschillende punten te zijn, waardoor er een ongelijkheid staat). □

**Stelling 3.33** (Cutler-Radcliffe)**.** *Zij $G = (V, E)$ een $d$-reguliere graaf op $n = a(d + 1)$ punten, dan geldt*

$$i(G) \geq i(aK_{d+1}) = (d + 2)^a.$$

*Hierbij is $aK_{d+1}$ de graaf die bestaat uit $a$ disjuncte kopieën van $K_{d+1}$. Tevens geldt voor alle $0 \leq t \leq n$*

$$i_t(G) \geq i_t(aK_{d+1}) = (d + 1)^t \binom{a}{t}.$$

*Opmerking.* Als we de stelling bewijzen voor alle onafhankelijke verzamelingen van grootte $t$, dan is de stelling bewezen, er geldt dan dat

$$i(G) = \sum_{t=0}^{n} i_t(G) \geq \sum_{t=0}^{n} (d + 1)^t \binom{a}{t} = (d + 2)^a$$

waarbij de ongelijkheid dus nog bewezen moet worden. Dat deze stelling voor elke grootte van onafhankelijke verzamelingen geldt, maakt het een erg sterke stelling. Immers, als een stelling iets zegt over het totaal aantal onafhankelijke verzamelingen, dan zegt dat niet noodzakelijk iets over het aantal onafhankelijke verzamelingen van elke grootte $t$, zoals hieronder zal blijken.

**Voorbeeld 3.34.** Bekijk Gevolg 3.26, deze geldt niet voor alle groottes van onafhankelijke verzamelingen. Als we $G = C_8$ (de cykelgraaf op acht punten) nemen, dan geldt

$$i_2(C_8) = \binom{8}{2} - |E(C_8)| = 20 \not\leq 16 = \left[\binom{4}{2} - |E(K_{2,2})|\right]^2 = i_2(K_{2,2})^2$$

en zo zijn er nog vele voorbeelden te bedenken.

*Bewijs van Stelling 3.33.* We beginnen met het bepalen van het aantal onafhankelijke verzamelingen van $aK_{d+1}$. Het is niet moeilijk in te zien dat $i_t(aK_{d+1}) = (d + 1)^t \binom{a}{t}$. Immers, we kiezen eerst de $t$ (van in totaal $a$) kopieën van $K_{d+1}$ waar we een punt uit nemen, en dan uit elke kopie specifiek welk punt we nemen.

We bewijzen de stelling met inductie op $t$. Voor $t = 0, 1$ is de stelling triviaal, en omdat $|E(G)| = |E(aK_{d+1})|$, en dus ook het aantal 'niet-lijnen' hetzelfde is, is het aantal onafhankelijke verzamelingen ook gelijk, en dus klopt de stelling ook voor $t = 2$. Stel nu dat $t > 2$. Elke onafhankelijke verzameling van $t$ punten bestaat uit een onafhankelijke verzameling van $t-1$ punten, met nog één punt erbij. We sommeren over alle onafhankelijke verzamelingen op $t-1$ punten, maar omdat we nu elke onafhankelijke verzameling $t$ keer tellen, moeten we daar nog door delen:

$$\begin{aligned}
i_t(G) &= \frac{1}{t} \sum_{I \in \mathcal{I}_{t-1}(G)} \#\{J \in \mathcal{I}_t(G) : J \supseteq I\} \\
&\geq \frac{1}{t} i_{t-1}(G)(a - t + 1)(d + 1) \\
&\geq \frac{(a - t + 1)(d + 1)}{t} i_{t-1}(aK_{d+1}) \\
&= \frac{(a - t + 1)(d + 1)}{t} (d + 1)^{t-1} \binom{a}{t-1} \\
&= (d + 1)^t \binom{a}{t}.
\end{aligned}$$

Hier gebruiken we Lemma 3.32 bij de eerste ongelijkheid, en de inductiehypothese bij de tweede. □

**Gevolg 3.35** (Cutler-Radcliffe). *Zij $G$ een $d$-reguliere graaf op $n$ punten, dan geldt*

$$i(G) \geq i(K_{d+1})^{\frac{n}{d+1}} = (d+2)^{\frac{n}{d+1}}.$$

*Bewijs.*

$$i(G)^{d+1} = i((d+1)G) \geq i(nK_{d+1}) = i(K_{d+1})^n = (d+2)^n.$$

Hier gebruiken we Vergelijking (1) in de eerste en voorlaatste stap, en Stelling 3.33 bij de ongelijkheid. Merk op dat $n$ hier niet noodzakelijk een veelvoud van $d+1$ hoeft te zijn. We kunnen de stelling toch toepassen, omdat $(d+1)G$ een graaf is op $n(d+1)$ punten. □

We hebben nu voor elke $d$-reguliere graaf $G$ op $n$ punten een boven- en ondergrens voor het aantal onafhankelijke verzamelingen:

$$(d+2)^{\frac{n}{d+1}} = i(K_{d+1})^{\frac{n}{d+1}} \leq i(G) \leq i(K_{d,d})^{\frac{n}{2d}} = (2^{d+1}-1)^{\frac{n}{2d}}.$$

Hiermee kunnen we natuurlijk ook een boven- en ondergrens maken voor het aantal klieken voor zulke grafen als we gebruik maken van de Stelling 3.1. Voor een $d$-reguliere graaf $G$ op $n$ punten geldt:

$$(n+1-d)^{\frac{n}{n-d}} = i(K_{n-d})^{\frac{n}{n-d}} \leq k(G) \leq i(2K_{n-1-d})^{\frac{n}{2(n-1-d)}} = (2^{n-d}-1)^{\frac{n}{2(n-1-d)}}.$$

Cutler en Radcliffe [7] geven wel aan dat dit geen strakke grenzen zijn wanneer $d$ vast is en $n$ zeer groot is.

## 3.5 Minimum- en maximumgraad

Na $d$-regulariteit is een logische volgende stap om die beperking iets los te laten, en te kijken naar grafen met een minimum- of maximumgraad. Ook hier zullen volledige en volledig bipartiete grafen een belangrijke rol spelen.

Een minimumgraad is vooral interessant voor het aantal onafhankelijke verzamelingen van een graaf, en een maximumgraad voor het aantal klieken. Immers, een maximumgraad beperkt het aantal lijnen dat je kunt hebben, en dus ook het aantal klieken, en door een minimumgraad moet er een minimaal aantal lijnen zijn, waardoor het aantal onafhankelijke verzamelingen beperkt wordt. Merk op dat wanneer we het complement van een graaf nemen, dat een minimumgraad een maximumgraad wordt, en vice versa. Tegelijkertijd worden onafhankelijke verzamelingen klieken, en vice versa.

Er zijn de afgelopen jaren veel artikelen geschreven over dit specifieke onderwerp, te veel om hier allemaal te behandelen. Veel van die artikelen geven een sterkere versie van een bepaalde stelling dan een vorig artikel, of gaan in op vermoedens van andere artikelen, zoals hieronder zal blijken. Daarnaast zijn er artikelen met bewijzen die te lang of te technisch zijn om hier te bewijzen. We zullen daar in de discussie kort op ingaan. Hier gaan we verder met een stelling van Gan, Loh, en Sudakov [14].

**Stelling 3.36** (Gan-Loh-Sudakov). *Zij $\delta \leq \frac{n}{2}$. Voor elke $t \geq 3$, en elke graaf $G$ op $n$ punten met minimumgraad tenminste $\delta$ geldt*

$$i_t(G) \leq i_t(K_{\delta,n-\delta}) = \binom{\delta}{t} + \binom{n-\delta}{t}$$

*en als $t \leq \delta$ dan is $K_{\delta,n-\delta}$ de unieke graaf met zoveel onafhankelijke verzamelingen.*

Zoals eerder gezegd is deze stelling niet in één keer bewezen, maar hebben meerdere wiskundigen hier een steentje aan bijgedragen. Alexander, Cutler en Mink [5] hebben in 2012 de stelling bewezen voor bipartiete grafen met $2\delta \leq n$ en $t \geq 3$. In 2014 hebben Engbers en Galvin [8] de stelling bewezen voor algemene grafen met $\delta \leq 3$ en $t \geq 3$, en daarnaast ook voor $\delta > 3$ en $t \geq 2\delta + 1$. Merk op dat we ook hier weer naar alle groottes van onafhankelijke verzamelingen kijken, zij het vanaf $t \geq 3$. Ook hier zijn weer voldoende voorbeelden te bedenken waarbij de stelling niet geldt voor $t = 0, 1, 2$, net als bij Voorbeeld 3.34 geldt

$$i_2(C_8) = 20 \nleq 16 = i_2(K_{2,6}).$$

Het bewijs van Stelling 3.36 bestaat uit verschillende stappen. In het artikel wordt de stelling eerst veranderd naar een stelling over het aantal klieken in de complementgraaf. Daarna wordt het geval $t = 3$ behandelt, en ten slotte wordt daarmee bewezen dat het dan ook waar is voor alle $t > 3$. Een hele klus dus, die we ook niet volledig zullen bewijzen. Laten we bij het begin beginnen:

**Propositie 3.37** (Gan-Loh-Sudakov)**.** *Zij $1 \leq b \leq \Delta + 1$. Voor alle $t \geq 3$, en elke graaf $G$ op $\Delta + 1 + b$ punten met maximumgraad $\Delta$ geldt*

$$k_t(G) \leq k_t(K_{\Delta+1} \cup K_b) = \binom{\Delta+1}{t} + \binom{b}{t}.$$

*Als $t \leq b$, dan is $K_{\Delta+1} \cup K_b$ de unieke extremale graaf, en als $b < t \leq \Delta + 1$, dan is $K_{\Delta+1} \cup H$ dat, waarbij $H$ een willekeurige graaf op $b$ punten is.*

De eerste stap is inzien dat Stelling 3.36 en Propositie 3.37 equivalent zijn. Wanneer we het complement nemen van $K_{\delta,n-\delta}$ krijgen we twee volledige grafen en wordt de minimumgraad een maximumgraad. Merk op dat hierbij $n = \Delta + 1 + b$ en $\delta = b$. We bewijzen de propositie nu eerst voor $t = 3$.

**Lemma 3.38** (Gan-Loh-Sudakov)**.** *Propositie 3.37 is waar voor $t = 3$.*

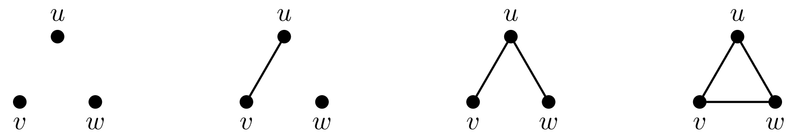
*Bewijs.* We bewijzen dit met inductie op $b$. Als $b = 0$ dan is het triviaal; immers, het aantal klieken wordt gemaximaliseerd in de volledige graaf. Stel nu dat het waar is voor $b - 1$. We zullen twee gevallen behandelen: geval één is dat er (tenminste) één punt $v$ is met $k_3(v) \leq \binom{b-1}{2}$. Geval twee is dat voor alle punten $v$ geldt $k_3(v) > \binom{b-1}{2}$.

We beginnen met het eerste geval, waar we het aantal 3-klieken van $G$ splitsen in 3-klieken die ons punt $v$ niet of wel bevatten, en krijgen

$$k_3(G) = k_3(G - v) + k_3(v) \leq \binom{\Delta+1}{3} + \binom{b-1}{3} + \binom{b-1}{2} = \binom{\Delta+1}{3} + \binom{b}{3}$$

zoals gewenst. Hier passen we de inductiehypothese toe op $G - v$, waardoor we een afschatting kunnen maken. Ook geldt wegens de inductiehypothese dat $G - v = K_{\Delta+1} \cup H'$ waarbij $H'$ een graaf op $b - 1$ punten is. Omdat punten in $G$ (en dus ook $K_{\Delta+1}$) hooguit $\Delta$ buren hebben, kan $v$ alleen maar buren hebben in $H$, en dus $G = K_{\Delta+1} \cup H$. Als $k_3(v) = \binom{b-1}{2}$, dan geldt dat $v$ verbonden is met elk paar punten in $H$, ofwel dat $H = K_b$.

Stel nu dat voor alle punten $v$ geldt $k_3(v) > \binom{b-1}{2}$. Er geldt nu dat $b \leq d(v) \leq \Delta$. We zullen laten zien dat het aantal 3-klieken niet maximaal kan zijn. We bekijken drietupels $(u, v, w)$ van punten in $G$ waarbij $u$ en $v$ wel verbonden zijn, en $v$ en $w$ niet. Hier zijn er $\sum_{v \in V} d(v)(n - 1 - d(v))$ van (elk punt $v$ is met $d(v)$ punten verbonden, dan zoeken we nog een punt waarmee $v$ niet verbonden is, en dat zijn er $n - 1 - d(v)$). Elke verzameling van drie punten voegt ofwel 0 toe aan deze som (het is een 3-kliek of ze zijn allemaal




Figuur 15

niet verbonden), ofwel 2 (er zijn één of twee lijnen tussen de drie punten), zoals te zien in Figuur 15.
Hiermee krijgen we

$$\sum_{v \in V} d(v)(n-1-d(v)) = 2\left[\binom{n}{3} - (k_3(G) + k_3(\overline{G}))\right].$$

Als we dit herschrijven, en gebruiken dat $k_3(\overline{G}) \geq 0$, dan krijgen we

$$k_3(G) \leq \binom{n}{3} - \frac{1}{2}\sum_{v \in V} d(v)(n-1-d(v)).$$

Omdat $b \leq d(v) \leq \Delta$, en $b + \Delta = n-1$ per definitie, geldt dat $d(v)(n-1-d(v)) \geq b\Delta$ (immers, als je $b+\Delta$ invult voor $n-1$, kan je het omschrijven naar $d(v)(b-d(v)) \geq \Delta(b-d(v))$, en dit geldt omdat $d(v) \leq \Delta$ en $b - d(v) \leq 0$). Als we dit weer invullen krijgen we

$$k_3(G) \leq \binom{n}{3} - \frac{nb\Delta}{2} = \binom{\Delta+1}{3} + \binom{b}{3} - \frac{b(\Delta+1-b)}{2} < \binom{\Delta+1}{3} + \binom{b}{3}.$$

Die laatste ongelijkheid volgt omdat $b \leq \Delta$, maar de gelijkheid in het midden zal misschien een beetje uit de lucht komen vallen, maar is in te zien met een combinatorisch bewijs. Als we 3 elementen uit $n = \Delta + 1 + b$ willen kiezen, dan kunnen we ook ofwel 3 elementen uit $\Delta + 1$ kiezen, ofwel 3 elementen uit $b$ kiezen, of een mix. We krijgen dan het volgende:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{3} &= \binom{\Delta+1}{3} + \binom{b}{3} + \binom{\Delta+1}{1}\binom{b}{2} + \binom{\Delta+1}{2}\binom{b}{1} \\
&= \binom{\Delta+1}{3} + \binom{b}{3} + \frac{(\Delta+1)(b)(b-1) + (\Delta+1)(\Delta)(b)}{2} \\
&= \binom{\Delta+1}{3} + \binom{b}{3} + \frac{(b\Delta^2 + b^2\Delta + b) - (\Delta b + b - b^2)}{2} \\
&= \binom{\Delta+1}{3} + \binom{b}{3} + \frac{nb\Delta}{2} - \frac{b(\Delta+1-b)}{2}.
\end{aligned}$$

Hiermee is dat het aantal 3-klieken niet optimaal, waarmee het tweede geval ook bewezen is. □

**Lemma 3.39** (Gan-Loh-Sudakov)**.** *Als Propositie 3.37 waar is voor $t = 3$, dan is het ook waar voor $t > 3$.*

Merk op dat wanneer we dit lemma bewijzen, we dan Propositie 3.37 bewezen hebben, waarmee we ook weer Stelling 3.36 bewezen hebben. Echter, het bewijs van dit lemma is enorm technisch, en zal hier daarom ook niet behandeld worden. In het bewijs wordt weer gebruik gemaakt van inductie op $b$, en worden verschillende gevalsonderscheidingen gemaakt. Daarnaast komen bijna analytische bewijsmethoden van pas, waardoor het te ver gaat om dit hier goed uit te werken.

# 4 Discussie

Hoewel we een groot aantal lemma's en stellingen hebben behandeld, is er natuurlijk een stuk meer dat we niet hebben behandeld, maar zeker niet minder interessant. Zo zijn er nog een aantal open problemen, en zijn er artikelen die verder borduren op de artikelen die we hier hebben behandeld, of worden stellingen verbeterd, door bijvoorbeeld nog scherpere grenzen te stellen aan het aantal klieken of onafhankelijke verzamelingen, of door nog algemenere gevallen te behandelen.

Een van de open problemen die er zijn, is het bewijs voor Stelling 3.25 voor bipartiete gevallen. Zoals eerder gezegd heeft Kahn [9] deze al bewezen met behulp van entropie, maar een 'gewoon' bewijs is er nog altijd niet. Gan, Loh, en Sudakov [14] vroegen zich ook af of Propositie 3.37 waar is voor grafen op $a(\Delta+1)+b$ punten met maximumgraad $\Delta$. Het bewijs van Lemma 3.39 kan veralgemeniseerd worden voor grafen op $a(\Delta+1)+b$ punten, en dus is weer de vraag of het aantal 3-klieken gemaximaliseerd wordt door deze graaf. Dit is bewezen door Chase [2], waarmee dus ook dit algemene geval bewezen is. Eerder is deze stelling ook bewezen door Cutler en Radcliffe [7] in 2013. Echter, het ging hierbij alleen over het totaal aantal klieken, en niet klieken van een gegeven grootte.

Het is natuurlijk ook mogelijk om twee restricties te combineren. Zo hebben Alexander, Cutler en Mink een bovengrens gegeven voor het aantal onafhankelijke verzamelingen in grafen op $n$ punten met minimumgraad $\delta$ en maximumgraad $\Delta$: $i(G) \leq i(K_{\delta,\Delta})^{n/2\delta}$. Daarnaast is er de laatste jaren veel geschreven over grafen met een vast aantal lijnen en een maximumgraad. Zeer recent is een vermoeden hierover bewezen door Chakraborti en Chen [3]. Zij bewezen dat voor alle $3 \leq t \leq \Delta+1$ een graaf $G$ met $m$ lijnen en maximumgraad $\Delta$ geldt dat $k_t(G) \leq k_t(qK_{\Delta+1} \cup C_b)$, voor $m = q\binom{\Delta+1}{2} + b$ en $0 \leq b < \binom{\Delta+1}{2}$. Hierbij is $C_b$ de colex-graaf met $b$ lijnen. Zij vroegen zich ook af wat het maximum aantal $K_t$'s is in een graaf met $m$ kopieën van $K_s$ $(0 < s < t)$ met maximumgraad $\Delta$. Er is dus nog genoeg te schrijven over klieken en onafhankelijke verzamelingen, en we hebben er zeker nog niet het laatste over gelezen.

## Referenties


[1] Alon, N.: *Independent Sets in Regular Graphs and Sum-Free Subsets of Finite Groups*. Israel Journal of Mathematics, 3(73):247–256, augustus 1989.

[2] Chase, Z.: *A proof of the Gan-Loh-Sudakov conjecture*. Advances in Combinatorics, december 2019.

[3] D. Chakraborti, D. Chen: *Many cliques with few edges and bounded maximum degree*. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 151:1–20, maart 2020.

[4] H. Prodinger, R.F. Tichy: *Fibonacci Numbers of Graphs*. The Fibonacci Quarterly, 20(1):16–21, februari 1982. `https://www.fq.math.ca/Scanned/20-1/prodinger.pdf`.

[5] J. Alexander, J. Cutler, T. Mink: *Independent sets in graphs with given minimum degree*. The Electronic Journal of Combinatorics, 19(3), september 2012.

[6] J. Cutler, A. Radcliffe: *Extremal graphs for homomorphisms*. Journal of Graph Theory, 67(4):261–284, 2011.

[7] J. Cutler, A. Radcliffe: *The maximum number of complete graphs in a graph with given maximum degree*. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 104(10), juni 2013.

[8] J. Engbers, D. Galvin: *Counting independent sets of a fixed size in graphs with a given minimum degree*. Journal of Graph Theory, 76(2):149–169, juni 2014.

[9] Kahn, J.: *An Entropy Approach to the Hard-Core Model on Bipartite Graphs*. Combinatorics, Probability and Computing, 3(10):219–237, juni 2001.

[10] Katona, G.: *A theorem of finite sets*. Theory of Graphs (proc. Colloq. Tihany, 1966), Academic Press, New York en Londen, 1968.

[11] Kruskal, J.B.: *The Number of Simplices in a Complex*. Mathematical optimization techniques, University of California Press, Berkeley en Los Angeles, 1963.

[12] L. Keough, A. Radcliffe: *Graphs with the fewest matchings*. Combinatorica, 36(6):703–723, december 2016.

[13] Mazur, D.R.: *Combinatorics: A Guided Tour*. The Mathematical Association of America, Washington, DC, United States of America, 2010, ISBN 9781470453008.

[14] W. Gan, P. Loh, B. Sudakov: *Maximizing the number of independent sets of a fixed size*. Combinatorics, Probability and Computing, 24(3):521–527, oktober 2014.

[15] Wingard, G.: *Properties and Applications of the Fibonacci Polynomial of a Graph*. proefschrift, University of Mississippi, mei 1995.

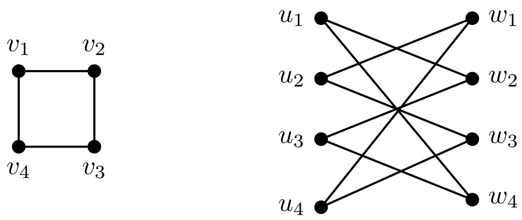
[16] Wood, D.R.: *On the Maximum Number of Cliques in a Graph*. Journal of Graph Theory, 23(3):337–352, juni 2007. `http://dx.doi.org/10.1007/s00373-007-0738-8`.

[17] X. Li, Z. Li, L. Wang: *The inverse problems for some topological indices in combinatorial chemistry*. Journal of Computational biology, 10(1):47–55, 2003.

[18] Zhao, Y.: *The Number of Independent Sets in a Regular Graph*. Combinatorics, Probability and Computing, 19(2):315–320, maart 2009.

# Appendices

## A Uitwerking correspondentie




Figuur 16: De grafen $C_4$ en $C_4 \times K_2$

| $C_4$ | $C_4 \times K_2$ |
|---|---|
| $(\emptyset,\emptyset)$ | $\emptyset$ |
| $(\{v_1\},\emptyset)$ | $\{u_1\}$ |
| $(\{v_2\},\emptyset)$ | $\{u_2\}$ |
| $(\{v_3\},\emptyset)$ | $\{u_3\}$ |
| $(\{v_4\},\emptyset)$ | $\{u_4\}$ |
| $(\emptyset,\{v_1\})$ | $\{w_1\}$ |
| $(\emptyset,\{v_2\})$ | $\{w_2\}$ |
| $(\emptyset,\{v_3\})$ | $\{w_3\}$ |
| $(\emptyset,\{v_4\})$ | $\{w_4\}$ |
| $(\{v_1,v_2\},\emptyset)$ | $\{u_1,u_2\}$ |
| $(\{v_1,v_3\},\emptyset)$ | $\{u_1,u_3\}$ |
| $(\{v_1,v_4\},\emptyset)$ | $\{u_1,u_4\}$ |
| $(\{v_2,v_3\},\emptyset)$ | $\{u_2,u_3\}$ |
| $(\{v_2,v_4\},\emptyset)$ | $\{u_2,u_4\}$ |
| $(\{v_3,v_4\},\emptyset)$ | $\{u_3,u_4\}$ |
| $(\emptyset,\{v_1,v_2\})$ | $\{w_1,w_2\}$ |
| $(\emptyset,\{v_1,v_3\})$ | $\{w_1,w_3\}$ |
| $(\emptyset,\{v_1,v_4\})$ | $\{w_1,w_4\}$ |
| $(\emptyset,\{v_2,v_3\})$ | $\{w_2,w_3\}$ |
| $(\emptyset,\{v_2,v_4\})$ | $\{w_2,w_4\}$ |
| $(\emptyset,\{v_3,v_4\})$ | $\{w_3,w_4\}$ |
| $(\{v_1\},\{v_1\})$ | $\{u_1,w_1\}$ |
| $(\{v_1\},\{v_3\})$ | $\{u_1,w_3\}$ |
| $(\{v_2\},\{v_2\})$ | $\{u_2,w_2\}$ |
| $(\{v_2\},\{v_4\})$ | $\{u_2,w_4\}$ |
| $(\{v_3\},\{v_1\})$ | $\{u_3,w_1\}$ |
| $(\{v_3\},\{v_3\})$ | $\{u_3,w_3\}$ |
| $(\{v_4\},\{v_2\})$ | $\{u_4,w_2\}$ |
| $(\{v_4\},\{v_4\})$ | $\{u_4,w_4\}$ |
| $(\{v_1,v_2,v_3\},\emptyset)$ | $\{u_1,u_2,u_3\}$ |
| $(\{v_1,v_2,v_4\},\emptyset)$ | $\{u_1,u_2,u_4\}$ |
| $(\{v_1,v_3,v_4\},\emptyset)$ | $\{u_1,u_3,u_4\}$ |
| $(\{v_2,v_3,v_4\},\emptyset)$ | $\{u_2,u_3,u_4\}$ |
| $(\emptyset,\{v_1,v_2,v_3\})$ | $\{w_1,w_2,w_3\}$ |
| $(\emptyset,\{v_1,v_2,v_4\})$ | $\{w_1,w_2,w_4\}$ |
| $(\emptyset,\{v_1,v_3,v_4\})$ | $\{w_1,w_3,w_4\}$ |
| $(\emptyset,\{v_2,v_3,v_4\})$ | $\{w_2,w_3,w_4\}$ |
| $(\{v_1,v_3\},\{v_1\})$ | $\{u_1,u_3,w_1\}$ |
| $(\{v_1,v_3\},\{v_3\})$ | $\{u_1,u_3,w_3\}$ |
| $(\{v_2,v_4\},\{v_2\})$ | $\{u_2,u_4,w_2\}$ |
| $(\{v_2,v_4\},\{v_4\})$ | $\{u_2,u_4,w_4\}$ |
| $(\{v_1\},\{v_1,v_3\})$ | $\{u_1,w_1,w_3\}$ |
| $(\{v_3\},\{v_1,v_3\})$ | $\{u_3,w_1,w_3\}$ |
| $(\{v_2\},\{v_2,v_4\})$ | $\{u_2,w_2,w_4\}$ |
| $(\{v_4\},\{v_2,v_4\})$ | $\{u_4,w_2,w_4\}$ |
| $(\{v_1,v_2,v_3,v_4\},\emptyset)$ | $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ |
| $(\emptyset,\{v_1,v_2,v_3,v_4\})$ | $\{w_1,w_2,w_3,w_4\}$ |
| $(\{v_1,v_3\},\{v_1,v_3\})$ | $\{u_1,u_3,w_1,w_3\}$ |
| $(\{v_2,v_4\},\{v_2,v_4\})$ | $\{u_2,u_4,w_2,w_4\}$ |

Tabel 1: Correspondentie tussen paren $(A,B)$ van $C_4$ zodat $A$ onafhankelijk is van $B$ en de onafhankelijke verzamelingen van $C_4 \times K_2$