

Radboud Universiteit Nijmegen

Faculteit der natuurwetenschappen, wiskunde en informatica

juli 2017



Matchingtheorie op grafen

Jorrit Bastings
S4462556

Begeleider: Wieb Bosma

Inhoudsopgave

1	Het huwelijksprobleem van Hall	3
2	Notatie en definities	4
3	Fundament van de matchingtheorie	8
3.1	Stelling van Berge	8
3.2	Tutte-Berge formule	9
3.3	Stelling van Tutte	11
3.4	Stelling van Hall	12
3.5	Stelling van König	14
3.6	Nog openstaande vermoedens in de matchingtheorie	15
4	Het matching polynoom	17
4.1	Relatie tussen matching polynoom en acyclisch polynoom	17
4.2	Toepassingen van het matching polynoom	18
4.3	Voorbeeld matching en acyclisch polynoom	18
4.4	Fundamentele theorie van acyclische polynomen	19
4.5	Acyclische polynomen op standaard grafen	22
4.5.1	Acyclisch polynoom van de lege graaf	22
4.5.2	Acyclisch polynoom van een pad	22
4.5.3	Acyclisch polynoom van een cykel	23
4.5.4	Acyclisch polynoom van een volledige graaf	23
4.5.5	Acyclisch polynoom van een volledig bipartiete graaf	24
5	Acyclisch polynoom van een bos	26
5.1	Definities en basiseigenschappen lineaire algebra	26
5.2	Het karakteristiek polynoom van een graaf	27
5.3	Lemma van Harary	28
5.4	Stelling van Godsil en Gutman	30
5.5	Nulpunten van het acyclisch polynoom	31
6	De matrixbenadering van acyclische polynomen	33
6.1	De d -functie van een graaf	33
6.2	Acyclisch polynoom van een graaf met behulp van de matching matrix	36
6.3	Co-matching grafen met behulp van de matching matrix	37

Samenvatting

Deze scriptie zal gaan over matchingtheorie op grafen. In het eerste deel van deze scriptie zullen een aantal belangrijke stellingen aan bod komen om het huwelijksprobleem van Hall op te lossen. In het tweede deel zal het acyclisch polynoom van grafen centraal staan, dit polynoom speelt een belangrijke rol in de matchingtheorie op grafen. Het belangrijkste doel is om het principe van matchingtheorie beter te begrijpen en een aantal interessante stellingen uit de matchingtheorie te bewijzen.

1 Het huwelijksprobleem van Hall

Mijn motivatie voor het schrijven van deze scriptie komt van het huwelijksprobleem van Hall. Het eerste deel van deze scriptie heeft als doel het oplossen van het huwelijksprobleem van Hall en een inleiding te geven op de matchingtheorie. Om het huwelijksprobleem uit te leggen wil ik jullie graag meenemen naar een klein fictief middeleeuws dorpje. In dit dorp was het eeuwen lang een traditie om ieder jaar een groot huwelijksfeest te organiseren. Tijdens dit huwelijksfeest werden de ongehuwde jonge vrouwen uitgehuwelijkt aan de vrijgezelle mannen van het dorp. Omdat de dorpingen graag gelukkige inwoners wilden hebben werd aan alle jonge vrouwen gevraagd om een lijstje te maken bestaande uit vrijgezelle mannen waarmee ze wel in het huwelijksbootje zouden willen stappen. De mannen waren vaak in de meerderheid en daarom was elke vrijgezelle man al lang blij als er een jonge vrouw was die op deze dag uitgehuwelijkt zou worden aan hem. Enige tijd voor de grote dag van het huwelijksfeest kreeg de organisatie de huwelijkswensen van de vrouwen die uitgehuwelijkt gingen worden. Dit huwelijksfeest was elk jaar een grote klus voor de organisatie. De organisatie had de taak om te beraden of het mogelijk was om elke ongehuwde vrouw te 'matchen' met een vrijgezelle man van haar keuze. Dit probleem staat bekend als "het huwelijksprobleem van Hall".

		mannen					
		1	2	3	4	5	6
vrouwen	a		♥	♥			
	b	♥	♥		♥	♥	
	c		♥				♥
	d		♥				♥
	e			♥	♥	♥	
	f			♥			♥

Figuur 1: huwelijkswensen
Bron: Pythagoras, januari 2009

In één van de jaren waren er slechts zes mannen en vrouwen die zouden deelnemen aan het huwelijksfeest. In Figuur 11 staat een overzicht van de huwelijkswensen van de jonge vrouwen. Aan het einde van het eerste deel van deze scriptie zullen we met behulp van matchingtheorie op grafen en de huwelijksstelling van Hall laten zien of het mogelijk is om in deze situatie zes huwelijken te construeren, zodat elke vrouw uitgehuwelijkt zal worden aan een man van haar keuze.

2 Notatie en definities

Definitie 2.1. Een **graaf** $G = (V, E)$ is een verzameling knopen V en een verzameling lijnen E . Waarbij een lijn $e = \{u, v\}$ loopt tussen de twee knopen u en v uit V .

Definitie 2.2. We zeggen dat twee knopen $u, v \in V$ verbonden zijn met elkaar als er een lijn is tussen de punten u en v en dus als $\{u, v\} \in E$.

Definitie 2.3. Een knoop $v \in V$ heet **verzadigd** als v in minstens één van de lijnen $e \in E$ voorkomt (anders heet de knoop onverzadigd).

Definitie 2.4. Een lijn (v, v) heet een *lus*. We zeggen dat een graaf *simpel* is als de graaf geen lussen bevat.

Definitie 2.5. Een graaf G heet een **multigraaf** als er meer dan één lijn kan lopen tussen twee knopen.

In het vervolg van deze scriptie gaan we ervan uit dat alle grafen simpel zijn. Tenzij anders vermeld gaan we er ook vanuit dat de grafen geen multigrafen zijn. Er mag dus maximaal één lijn lopen tussen twee knopen.

Definitie 2.6. We noemen het aantal knopen van een graaf G ook wel de *orde* van G . We zullen voor de orde van een graaf voortaan de notatie $\text{ord}(G)$ gebruiken.

Definitie 2.7. In een graaf G zeggen we dat een knoop v **graad** n heeft als de knoop verbonden is met precies n andere knopen. We gebruiken hiervoor de notatie $\text{deg}_G(v) = n$ (engels voor *degree*). Als duidelijk is over welke graaf we het hebben schrijven we gemakshalve $\text{deg}(v) = n$.

Definitie 2.8. Een graaf $G = (V, E)$ heet **volledig** als elk paar knopen $\{u, v\} \in V$ verbonden is door een lijn $e \in E$. We geven een volledige graaf met n punten aan met K_n .

Definitie 2.9. De **complementgraaf** van een graaf $G = (V, E)$ is de graaf $\overline{G} = (V, F)$, waarbij F alle paren $\{u, v\} \in V$ bevat die niet in E zitten.

We merken op dat voor elke graaf G geldt dat: $\overline{\overline{G}} = G$. Verder volgt onmiddellijk uit de definities dat $\text{ord}(G) = \text{ord}(\overline{G})$ en dat de graad van elke knoop $v \in \overline{G}$ gelijk is aan $\text{ord}(G) - \text{deg}(v) \in G$. Er geldt namelijk dat twee knopen ofwel verbonden zijn in G ofwel in \overline{G} .

Definitie 2.10. Een graaf $G' = (V', E')$ heet een **deelgraaf** van $G = (V, E)$ als $V' \subseteq V$.

Definitie 2.11. Een deelgraaf $M = (V, E')$ heet een **matching** als de lijnen E' paarsgewijs disjunct zijn. Met andere woorden, de deelgraaf $M = (V, E')$ is een *matching* als voor elke knoop $v \in V$ geldt $\text{deg}_M(v) = 0$ of $\text{deg}_M(v) = 1$

Definitie 2.12. Met de **grootte** van een *matching* M bedoelen we het aantal lijnen van M . We zullen in deze scriptie $|M|$ schrijven voor het aantal lijnen van een *matching* M .

Definitie 2.13. Een *matching* $M = (V, E')$ heet een **k -matching** als $|E'|$ gelijk is aan k . We noemen $m_k(G)$ het aantal verschillende k -matchings van de graaf G .

Voor een graaf G is er precies één 0-matching, namelijk de lege graaf. Er geldt dus per definitie dat $m_0(G) = 1$ voor elke graaf G . Kijken we naar het aantal 1-matchings op een graaf dan vragen we ons af hoeveel deelgrafen M van G er zijn die slechts één lijn hebben. Dit is natuurlijk het aantal lijnen van de graaf $G = |E|$. We zien dus dat $m_1(G) = |E|$.

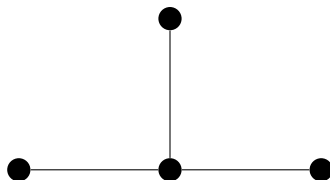
Definitie 2.14. Een matching M heet **maximaal** als de matching M niet bevat is in een grotere matching M' , ofwel als geldt $M \not\subset M'$ voor elke matching M' van G .

Definitie 2.15. Een matching M heet een **grootste matching** als voor elke matching M' van G geldt $|M| \geq |M'|$. We noteren de kardinaliteit van de grootste matching als $\nu(G)$.

Omdat elke knoop in een matching maximaal graad 1 heeft geldt voor een graaf van orde n dat er nooit een matching kan zijn die meer dan $\frac{n}{2}$ lijnen bevat. Voor oneven n zal er dus geen matching M zijn met meer dan $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ lijnen. Hieruit volgt dat $\nu(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

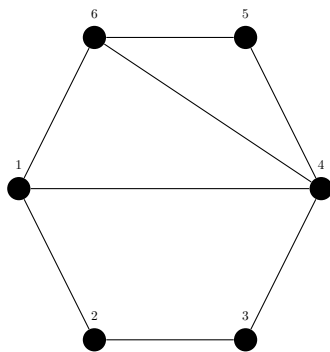
Definitie 2.16. Een matching $M = (V, E')$ heet **volledig** als elke knoop verzadigd is in M . We noemen een graaf **perfect** als er een volledige matching bestaat.

Voor een graaf met een oneven aantal knopen zal er nooit een volledige matching zijn en dus heeft elke perfecte graaf een even orde. De omkering hoeft niet waar te zijn; niet elke graaf met een even orde is perfect. in figuur 2 zien we bijvoorbeeld een niet perfecte graaf met even orde. We merken verder op dat een graaf perfect is dan en slechts dan als $\nu(G) = \frac{\text{ord}(G)}{2}$.



Figuur 2: Een niet perfecte graaf met even orde

Om de definities te verduidelijken zullen we aan de hand van de volgende graaf een aantal van de bovenstaande definities langs gaan zodat er geen verwarring ontstaat over de definities en notatie. We bekijken hiervoor de graaf G in figuur 3.



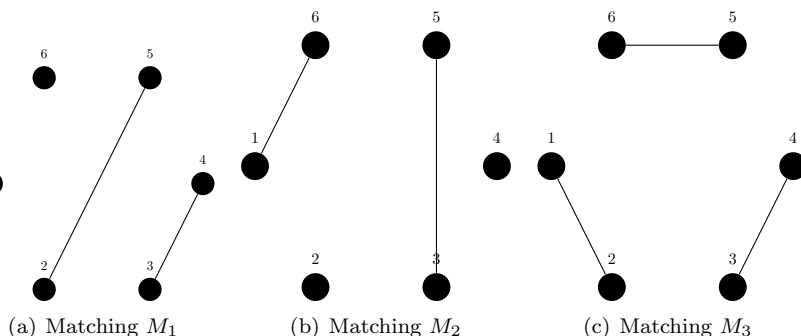
Figuur 3: Graaf G

Graad van de knopen

We kijken nu naar de graad van de knopen 1 tot en met 6. Deze is gelijk aan het aantal burens van de knoop en dus krijgen we: $\deg_G(1) = \deg_G(6) = 3$, want de knopen 1 en 6 hebben beide drie burens. Met eenzelfde argument krijgen we: $\deg_G(2) = \deg_G(3) = \deg_G(5) = 2$ en $\deg_G(4) = 4$.

Matchingen

Voor de matchingen van de graaf G moeten we kijken naar de deelgrafen van G die telkens uit disjuncte lijnen bestaan. Zo hebben we bijvoorbeeld de matchingen: M_1, M_2 en M_3 in figuur 4 op de graaf G .



Figuur 4: Verschillende matchingen van de graaf G

We zien meteen dat de grafen M_1 en M_2 deelgrafen zijn met slechts 2 lijnen, terwijl de deelgraaf M_3 een lijn meer bevat. We zien dus dat M_1 en M_2 beide 2-matchingen zijn van G en dat M_3 een 3-matching van de graaf G is. De matchingen M_1, M_2 en M_3 zijn echter lang niet alle matchingen van de graaf G . Een belangrijke vraag in deze scriptie is: wat kunnen we zeggen over het aantal k -matchingen op een graaf G voor verschillende k . Ter verduidelijking van dit probleem zullen we in het hiervoor genoemd voorbeeld handmatig nagaan hoeveel matchingen er zijn. Omdat de graaf G zes knopen heeft weten we dat $\nu(G) \leq 3$. Het is dus voldoende om te kijken naar de k -matchingen voor $k = 0, 1, 2$ of 3 .

- Per definitie geldt dat het aantal 0-matchingen van een graaf gelijk is aan 1, dus $m_0(G) = 1$.
- Er geldt dat $m_1(G) = 8$, omdat het aantal 1-matchingen van een graaf gelijk is aan het aantal lijnen van G .
- Het aantal 2-matchingen van de graaf G tellen we als volgt: We tellen voor elke lijn het aantal 2-matchingen door te kijken hoeveel lijnen er zijn die geen gemeenschappelijke knoop hebben met deze lijn. Als we dit voor elke lijn gedaan hebben tellen we het aantal 2-matchingen bij elkaar op en omdat we nu elke 2-matching twee keer tegen zijn gekomen, delen we dit antwoord door 2. Voor elk van de 8 lijnen vinden we het volgende aantal 2-matchingen:
 - Aantal 2-matchingen met de lijn $(1, 2) = 4$
 - Aantal 2-matchingen met de lijn $(1, 4) = 2$
 - Aantal 2-matchingen met de lijn $(1, 6) = 3$
 - Aantal 2-matchingen met de lijn $(2, 3) = 5$
 - Aantal 2-matchingen met de lijn $(3, 4) = 3$
 - Aantal 2-matchingen met de lijn $(4, 5) = 3$
 - Aantal 2-matchingen met de lijn $(4, 6) = 2$
 - Aantal 2-matchingen met de lijn $(5, 6) = 4$
 Er zijn dus in het totaal: $\frac{4+2+3+5+3+3+2+4}{2} = 13$ verschillende 2-matchingen, dus $m_2(G) = 13$.
- Als laatste willen we weten hoeveel 3-matchingen er zijn voor de graaf G . We merken als eerste op dat er geen 3-matching bestaat die de lijn $(3, 5)$ bevat. We zien dat er precies één 3-matching is die de lijn $(3, 6)$ bevat, namelijk $(1, 2), (3, 6), (4, 5)$. Als we de lijnen $(3, 5)$ en $(3, 6)$ weghalen zijn er nog twee mogelijke 3-matchingen namelijk: $(1, 2), (3, 4), (5, 6)$ en $(6, 1), (2, 3), (4, 5)$. We hebben nu alle mogelijke 3-matchingen gevonden. We krijgen nu dus: $m_3(G) = 3$.

De graaf G heeft dus in het totaal: $1 + 8 + 13 + 3 = 25$ verschillende matchingen.

Waarom ik dit voorbeeld helemaal heb uitgewerkt heeft twee redenen. Enerzijds om lezers die niet bekend zijn met grafentheorie/matchingtheorie te helpen met het begrijpen van de definities. Een tweede, misschien nog wel belangrijkere, reden is om te laten zien dat het niet eenvoudig is om het aantal verschillende k -matchingen snel te bepalen. Hier zullen we in het vervolg van deze scriptie nog uitgebreid op terugkomen.

Maximale matchingen

Als we naar de maximale matchingen kijken op de graaf G uit ons voorbeeld, zien we dat elke 3-matching een maximale matching is. Er zijn namelijk geen 4-matchingen dus het toevoegen van een lijn aan een 3-matching kan nooit een nieuwe matching opleveren. Er geldt in het algemeen dat elke grootste matching maximaal is.

Lemma 2.17. *Elke grootste matching is ook een maximale matching.*

Bewijs. Stel M is grootste matching van G die niet maximaal is. Dan is er een matching M' zodanig dat $|M| < |M'|$. Hieruit volgt dat $|M| < |M'|$ en dus is M geen grootste matching. We hebben een tegenspraak gevonden en hieruit volgt dat elke grootste matching ook een maximale matching is. \square

Lemma 2.18. *Voor elke maximale matching M van G geldt: $\frac{1}{2}\nu(G) \leq |M|$.*

Bewijs. Neem een maximale matching M en grootste matching M' . Voor elke lijn $(u, v) \in M'$ geldt dat minstens één van de twee knopen u of v verzadigd moet worden door M , anders kunnen we M uitbreiden met de lijn (u, v) en is M dus niet maximaal. Er zijn $|M'|$ lijnen in M' , omdat uit elke lijn minstens een knoop verzadigd moet worden en omdat elke lijn in M maar twee knopen overdekt geldt dat: $|M| \geq \frac{1}{2}|M'| = \frac{1}{2}\nu(G)$. \square

Gevolg 2.19. *Voor een maximale matching M geldt: $\frac{1}{2}\nu(G) \leq |M| \leq \nu(G)$.*

We bekijken opnieuw de graaf G uit ons voorbeeld en merken op dat uit gevolg 2.19 volgt dat elke maximale matching een 2-matching of 3-matching is. Het is echter niet zo dat elke 2-matchingen maximaal is. De matching M_1 is namelijk niet maximaal, maar de matching M_2 wel. In het algemeen is het niet eenvoudig te bepalen hoeveel maximale matchingen er zijn. Wel zullen we in hoofdstuk 3 een manier vinden om te bepalen of een maximale matching een grootste matching is.

Grootste matchingen

In ons voorbeeld zien we direct dat de grootste matching een 3-matching is. Een opmerking die we hier meteen moeten maken is dat de grootste matching niet uniek hoeft te zijn; elke 3-matching is immers een grootste matching. We hebben in lemma 2.17 gezien dat elke grootste matching maximaal is. De omkering hiervan hoeft echter niet waar te zijn. Niet elke maximale matching is een grootste matching. Bekijk hiervoor bijvoorbeeld de matching M_2 uit ons voorbeeld. We zien dat de deelgraaf M_2 wel een maximale matching is van G (omdat we de matching niet kunnen uitbreiden), maar het is geen grootste matching van G . We hebben namelijk $|M_2| < |M_3|$.

3 Fundament van de matchingtheorie

In dit hoofdstuk zullen we een aantal belangrijke stellingen uit de matchingtheorie behandelen. Aan het einde van dit hoofdstuk zullen we het huwelijksprobleem uit de inleiding met behulp van de Stelling van Hall oplossen.

3.1 Stelling van Berge

In het vorige hoofdstuk hebben we gezien dat elke grootste matching ook maximaal is. De omkering hiervan is echter niet waar, zoals we konden zien. We zullen in deze paragraaf kijken welke maximale matchingen ook grootste matchingen zijn. We zullen eerst een tweetal definities behandelen die we voor het bewijs van de Stelling van Berge nodig hebben.

Definitie 3.1. Een **pad** P in een graaf $G = (V, E)$ is een rij verschillende knopen (v_0, v_1, \dots, v_k) , zodanig dat v_{i-1} en v_i verbonden zijn voor elke $i = 1, \dots, k$. Een pad van lengte n , waar n het aantal lijnen is van het pad P , noteren we als P_n .

Definitie 3.2. Gegeven een graaf $G = (V, E)$ en een bijbehorende matching $M = (V, E')$. Dan noemen we een pad P een **alternerend pad** bij de matching M als het pad aan de twee onderstaande voorwaarden voldoet:

1. De knoop v_0 wordt niet verzadigd door de matching M .
2. De lijnen $(v_i, v_{i+1}) \in P$ zijn alternerend in E' en $E \setminus E'$.

Met andere woorden: een pad P_k is een alternerend pad bij de matching M als v_0 niet verzadigd wordt in M en voor elke $i \in \{1, \dots, k-1\}$ geldt als $(v_{i-1}, v_i) \in E' \Rightarrow (v_i, v_{i+1}) \in E \setminus E'$ en als $(v_{i-1}, v_i) \notin E' \Rightarrow (v_i, v_{i+1}) \in E'$.

Definitie 3.3. Een **augmenterend pad** P_k bij een matching M is een alternerend pad met de extra eigenschap dat behalve het beginpunt v_0 ook het eindpunt v_k niet verzadigd wordt door de matching M .

Het woord augmenterend komt van het franse woord 'augmenter' wat 'uitbreiden' betekent. We zullen zo zien dat we een matching kunnen 'uitbreiden' dan en slechts dan als er een augmenterend pad bestaat bij de matching.

Definitie 3.4. We definiëren de afstand tussen twee knopen als de lengte van het kortste pad P van u naar v in de graaf G . We noteren dit als $\text{dist}(u, v)$.

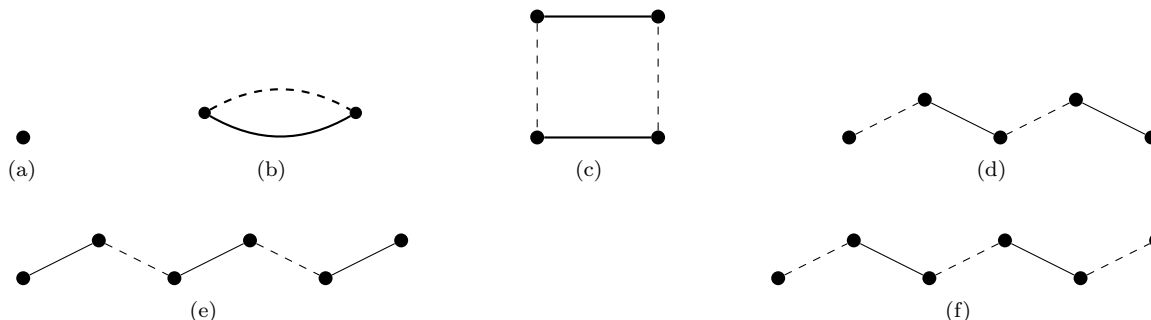
Stelling 3.5. (Stelling van Berge)

Een maximale matching M is een grootste matching dan en slechts dan als de matching M geen augmenterend pad heeft.

Bewijs. \Rightarrow Stel M heeft een augmenterend pad P . We construeren nu een nieuwe matching M' door uit het pad P de lijnen te nemen die niet in de matching M zaten. $M' = (v_0, v_1), (v_2, v_3), \dots, (v_{k-1}, v_k)$. Dit levert een nieuwe matching op met één lijn meer dan de matching M . Dus de matching M was geen grootste matching

\Leftarrow Stel M is geen grootste matching. We willen laten zien dat er een augmenterend pad is bij de matching M . Laat hiervoor $|M'| > |M|$ een grotere matching zijn. We construeren nu de multi-graaf $M_{\text{nieuw}} = M \cup M'$ inclusief de beide lijnen $e \in M \cap M'$. Voor alle knopen $v \in M_{\text{nieuw}}$ geldt nu: $\text{deg}_{M_{\text{nieuw}}}(v) \leq 2$, want elke knoop is verzadigd door maximaal twee lijnen, (maximaal één lijn uit M en één lijn uit M'). Hieruit volgt dat elke samenhangscomponent van M_{nieuw} een cykel of een pad is. Bovendien geldt dat de lengte van elke cykel even is, anders zouden twee lijnen uit M of twee lijnen uit M' aan elkaar grenzen wat natuurlijk niet kan omdat M en M' matchingen zijn. We merken nu op dat er voor elke samenhangscomponent van M_{nieuw} zes verschillende mogelijkheden zijn. Dit zijn namelijk:

1. Een losse knoop, dit geldt voor elke knoop $v \notin M \cup M'$.
2. Een 2-cykel, dit geldt voor alle lijnen $e \in M \cap M'$
3. Een cykel van even lengte, met lijnen afwisselend in M en M' .
4. Een pad van even lengte, met lijnen afwisselend in M en M' .
5. Een pad van oneven lengte beginnend (en eindigend) met een knoop uit M .
6. Een pad van oneven lengte beginnend (en eindigend) met een knoop uit M' .



Figuur 5: De samenhangscomponenten van de graaf $M \cup M'$

We gebruiken nu het feit dat $|M'| > |M|$ om te zeggen dat er meer lijnen in M' zitten dan in M . Hieruit volgt dat er minstens een samenhangscomponent van M_{nieuw} is die meer lijnen bevat uit M' dan uit M . Omdat alleen geval zes meer lijnen in M' heeft dan in M weten we dat er minstens één samenhangscomponent is die eruit ziet zoals omschreven in geval zes. Deze samenhangscomponent heeft oneven lengte en begint en eindigt met een lijn uit de matching M' . Dit levert een augmentierend pad op in M . Hiermee is de tweede implicatie bewezen en hebben we de Stelling van Berge bewezen. \square

De Stelling van Berge is vernoemd naar de Franse wiskundige Claude Berge. Berge wordt een van de grondleggers van de matchingtheorie genoemd omdat hij zich veel heeft bezig gehouden met matchingtheorie. De Stelling van Berge bewees hij in 1957. Het vermoeden werd echter al opgeschreven in 1891 door Petersen.

3.2 Tutte-Berge formule

We weten nu dat een maximale matching M een grootste matching is dan en slechts dan als de matching M geen augmentierend pad heeft. Hiermee kunnen we echter nog steeds niet ons huwelijksprobleem oplossen. Om het huwelijksprobleem op te lossen willen we iets meer weten over perfecte grafen. Wanneer is een graaf perfect? En als de graaf niet perfect is, hoe groot is dan de grootste matching? Op deze vragen zullen we in deze paragraaf ingaan.

Lemma 3.6. *Voor elke graaf $G = (V, E)$, waarin er geen knoop bestaat die in elke grootste matching zit, bestaat er een matching M die maar een knoop onverzadigd laat.*

Bewijs. Omdat er geen knoop $v \in V$ is die in alle grootste matchings zit weten we dat er geen volledige matching bestaat en dus geldt: $\nu(G) < \frac{1}{2}|V|$.

Stel er bestaat geen matching die maar één knoop onverzadigd laat. Voor elke matching M van G zijn er dan minstens twee onverzadigde knopen u en v uit de graaf G . We nemen nu van alle grootste matchings M met bijbehorende ontbrekende knopen (M, u, v) , zodanig dat de afstand tussen u en v zo klein mogelijk is. Als $dist(u, v) = 1$ weten we dat de knopen u en v verbonden zijn. Dit laatste is in met het gegeven dat M een grootste matching is. We kunnen namelijk de matching M uitbreiden naar een grotere matching door de lijn (u, v) toe te voegen.

Omdat $\text{dist}(u, v) > 1$, kunnen we een knoop k kiezen die op een kortste pad van u naar v ligt. Er bestaat minstens een grootste matching N die het punt k niet bevat, want anders zou k verzadigd zijn in alle grootste matchings. We kiezen nu zo'n matching N , zodanig dat $|N \cap M|$ maximaal is. Omdat $\text{dist}(u, v)$ minimaal is weten we nu dat N de knoop u overdekt, anders zou (N, u, k) een betere keuze zijn geweest. Met een zelfde argument overdekt N ook v . Omdat N en M beide grootste matchings zijn volgt dat $|M| = |N|$. We hebben nu twee knopen u en v die niet in M zitten, maar pas een knoop k die niet verzadigd wordt door N . Er moet dus nog een knoop $x \neq k$ zijn die wel in M zit, maar niet in N . We hebben dus een lijn $(x, y) \in M$ en bovendien geldt dat x niet verzadigd is in N . We weten nu dat y wel verzadigd moet zijn in N , omdat N maximaal is en we anders een grotere matching krijgen door (x, y) toe te voegen aan N . Omdat y verzadigd moet zijn in N weten we dat $y \neq k$. Dus er is een lijn (y, z) in N . Er geldt dat $z \neq x$, want x is onverzadigd in N . Als we nu kijken naar de matching $N' = N - (y, z) + (x, y)$ zien we dat $|N'| = |N|$ en we merken op dat $k \notin N'$. We hebben dus een grootste matching zonder knoop k . We merken verder op dat de lijn (x, y) in M zit en dus zit de lijn (y, z) niet in M . Nu volgt uit het gegeven dat de lijn (x, y) wel in N' zit maar niet in N dat, $|N' \cap M| > |N \cap M|$, wat een tegenspraak oplevert met de keuze van N . \square

Gevolg 3.7. *Voor elke graaf $G = (V, E)$, die geen knoop heeft die in elke grootste matching zit geldt dat de orde van G oneven is en dat $\nu(G) = \frac{1}{2}(|V| - 1)$.*

Bewijs. Omdat elke matching een even aantal knopen verzadigt volgt uit lemma 3.6 dat de graaf G een oneven aantal knopen heeft. De tweede opmerking volgt uit het gegeven dat er geen volledige matching is op de graaf G en er wel een matching bestaat die alle knopen, op één na, overdekt. Deze matching moet dan wel een grootste matching zijn. \square

Stelling 3.8. *(Tutte-Berge formule) Voor elke graaf $G = (V, E)$ geldt:*

$$\nu(G) = \min_{U \subseteq V} \frac{1}{2}(|V| + |U| - o(G \setminus U)), \quad (1)$$

waarbij geldt dat $o(G \setminus U)$ het aantal componenten van oneven orde is van de graaf G met daaruit weg gelaten alle knopen van U .

Bewijs. Om de ongelijkheid \leq te bewijzen nemen we een willekeurige deelverzameling U van V . We delen nu de lijnen van een grootste matching M op in M_1 en M_2 , waar M_1 de lijnen zijn die minstens een knoop $u \in U$ bevatten en M_2 de lijnen die geen knopen uit U bevatten.

$$\begin{aligned} \nu(G) &= |M| = |M_1| + |M_2| \leq |U| + \nu(G \setminus U) \leq |U| + \frac{(|V \setminus U| - o(G \setminus U))}{2} \\ &= |U| + \frac{1}{2}(|V| - |U| - o(G \setminus U)) = \frac{1}{2}(|V| + |U| - o(G \setminus U)). \end{aligned}$$

Er geldt dat $|M_1| \leq |U|$, omdat elke lijn uit M_1 minstens een knoop $v \in U$ bevat en twee lijnen uit M_1 verzadigen nooit dezelfde knoop. Het is duidelijk dat $|M_2| \leq \nu(G \setminus U)$, want M_2 is een matching van $G \setminus U$ en kan dus niet groter zijn dan $\nu(G \setminus U)$. De tweede ongelijkheid volgt uit het gegeven dat elke oneven-samenhangscomponent minstens één onverzadigde knoop heeft in een matching van $G \setminus U$.

Om de formule van Tutte Berge te bewijzen zullen we laten zien dat er altijd een matching is die aan vergelijking (1) voldoet. Dit doen we met inductie op $|E|$, het aantal lijnen van de graaf G . Het geval $E = \emptyset$ is triviaal want dan krijgen we:

$$\nu(G) = 0 \geq 0 = \min_{U \subseteq V} \frac{1}{2}(0 + 0 - 0) = \min_{U \subseteq V} \frac{1}{2}(|V| + |U| - o(G \setminus U)).$$

We mogen aannemen dat G samenhangend is, anders passen we de inductie toe op elke samenhangscomponent. We onderscheiden nu twee gevallen:

- **Geval 1.** Stel er is knoop $v \in V$ zodanig dat v in alle grootste matchings M van G zit. Hieruit volgt nu $\nu(G \setminus \{v\}) = \nu(G) - 1$. Uit de inductie hypothese weten we dat er een deelverzameling U' van $V \setminus \{v\}$ bestaat zodanig dat:

$$\nu(G \setminus \{v\}) = \frac{1}{2}(|(V \setminus \{v\})| + |U'| - o(G \setminus (U' \cup \{v\}))).$$

Dan voldoet $U := U' \cup \{v\} \subseteq V$ aan vergelijking (1).

$$\begin{aligned} \nu(G) &= \nu(G \setminus \{v\}) + 1 = \frac{1}{2}(|(V \setminus \{v\})| + |U'| - o(G \setminus (U' \cup \{v\}))) + 1 \\ &= \frac{1}{2}(|V| - 1 + |U| - 1 - o(G \setminus (U' \cup \{v\}))) + 1 \\ &= \frac{1}{2}(|V| + |U| - o(G \setminus U)). \end{aligned}$$

- **Geval 2.** Stel er is geen knoop $v \in V$ die verzadigd wordt door alle grootste matchings van G . Uit gevolg 3.7 volgt dat $\nu(G) = \frac{1}{2}(|V| - 1)$ en dat de orde van G oneven is. Dan voldoet $U = \emptyset$ aan vergelijking (1).

$$\nu(G) = \frac{1}{2}(|V| - 1) = \frac{1}{2}(|V| - o(G)).$$

In beide gevallen hebben we een deelverzameling $U \subseteq V$ gevonden die aan vergelijking (1) voldoet en hiermee hebben we de stelling bewezen. \square

3.3 Stelling van Tutte

Stelling 3.9. (Stelling van Tutte)

Een graaf $G = (V, E)$ heeft een volledige matching dan en slechts dan als voor elke deelverzameling U van V , de deelgraaf $V \setminus U$ maximaal $|U|$ oneven-samenhangscomponenten heeft.

De Stelling van Tutte volgt direct uit de Tutte-Berge formule. De Tutte-Berge formule is een generalisatie van de Stelling van Tutte.

Bewijs. Stel dat $\forall U \subseteq V$ geldt $o(G \setminus U) \leq |U|$; dan volgt hieruit met de Tutte-Berge formule dat:

$$\nu(G) = \min_{U \subseteq V} \frac{1}{2}(|V| + |U| - o(G \setminus U)) \leq \frac{1}{2}(|V| + |U| - |U|) = \frac{1}{2}(|V|).$$

Dus hebben we een volledige matching. Stel omgekeerd dat er een volledige matching is op G , dan geldt $\nu(G) = \frac{1}{2}(|V|)$. Dan volgt uit vergelijking (1) van de Tutte-Berge formule dat:

$$\begin{aligned} \nu(G) &= \min_{U \subseteq V} \frac{1}{2}(|V| + |U| - o(G \setminus U)) = \frac{1}{2}|V| \\ &\Rightarrow \min_{U \subseteq V} (|U| - o(G \setminus U)) = 0 \\ &\Rightarrow o(G \setminus U) \leq |U| \quad \forall U \subseteq V. \end{aligned}$$

\square

3.4 Stelling van Hall

Definitie 3.10. Een bipartiete graaf $G = (V, E)$ is een graaf zodanig: dat:

$V = X \cup Y$, $X \cap Y = \emptyset$ en voor alle lijnen $e = (x, y) \in E$ geldt $x \in X$ en $y \in Y$. We noteren in het vervolg een bipartiete graaf met partities X en Y als $G = (X + Y, E)$.

Stelling 3.11. (Stelling van Hall)

Een bipartiete graaf $G = (X + Y, E)$ heeft een matching die heel X overdekt dan en slechts dan als voor elke $S \subseteq X$, $|N(S)| \geq |S|$. Waar $N(S)$ alle knopen zijn die verbonden zijn met ten minste één knoop $s \in S$.

Bewijs. Stel $G = (X + Y, E)$ is een bipartiete graaf. We construeren een nieuwe graaf H als volgt. Als de orde van G oneven is voegen we een nieuwe knoop y toe aan Y samen met alle lijnen zodanig dat $Y \cup \{y\}$ een volledige deelgraaf is. Als de orde van G even is voegen we alleen alle lijnen toe zodanig dat Y een volledige deelgraaf is. We krijgen nu een graaf $H = (X + Y', E)$ met even orde en een volledige deelgraaf Y' . We zullen de volgende twee claims bewijzen om de Stelling van Hall af te leiden uit de stelling van Tutte.

Claim 1. Een bipartiete graaf $G = (X + Y, E)$ heeft een matching die X overdekt dan en slechts dan als H een volledige matching M heeft.

Claim 2. Als een bipartiete graaf $G = (X + Y, E)$ voldoet aan de voorwaarde van Hall, ($\forall S \subseteq X, |N(S)| \geq |S|$), dan voldoet H aan de eisen van Tutte, voor elke deelverzameling knopen T van H geldt: $o(H \setminus T) \leq |T|$.

Uit claim 2 volgt dat voor elke $S \subseteq X, |N(S)| \geq |S|$, de graaf H aan de voorwaarde van Tutte voldoet. Uit de stelling van Tutte volgt nu dat de graaf H een volledige matching heeft. Uit claim 1 volgt nu dat G een matching heeft die heel X overdekt.

- **Bewijs claim 1.** Stel G heeft een matching M die alle knopen $x \in X$ overdekt, dan is M ook een matching van H die X overdekt. Het is duidelijk dat er $|Y| - |X|$ knopen in Y niet verzadigd worden door M . Omdat de orde van H even is, weten we ook dat $|Y| - |X|$ even is en omdat Y een volledige deelgraaf is in H kunnen we een volledige matching M' maken op de knopen in Y die niet door M verzadigd waren. Er geldt dat $M \cup M'$ een volledige matching van H is. Andersom stel dat H een volledige matching M heeft, dan nemen we $M_X \subseteq M$ van alle lijnen die een punt uit X verzadigen en zien in dat M_X een matching is van G die X overdekt.
- **Bewijs claim 2.** Stel G voldoet aan de eisen van Hall; dus er geldt $\forall S \subseteq X$ dat $|N(S)| \geq |S|$. Laat nu T een willekeurige deelverzameling zijn van H . We schrijven: $T = T_X \cup T_Y$, waarbij $T_X = T \cap X$ en $T_Y = T \cap Y$. Omdat de deelverzameling Y volledig is in H weten we dat de samenhangscomponenten van $H \setminus T$ er als volgt uit zien. We krijgen een samenhangscomponent C die geheel $Y \setminus T_Y$ bevat en de knopen $x \in X \setminus T_X$ die verbonden zijn met ten minste één $y \in Y \setminus T_Y$. Verder krijgen we k samenhangscomponenten die bestaan uit geïsoleerde knopen $x \in X \setminus T_X$ die met geen enkele $y \in Y \setminus T_Y$ verbonden zijn. We noemen deze verzameling knopen S en mogen aannemen dat $|S| = k$, voor een zekere $k \geq 0$. Er geldt dat $o(H \setminus T) = k + 1$, als $|C|$ oneven is en we krijgen $o(H \setminus T) = k$, als $|C|$ even is.

Als $|C|$ even is weten we dat: $o(H \setminus T) = k = |S| \leq |N(S)| \leq |T_Y| \leq |T|$. De ongelijkheid $|S| \leq |N(S)|$ volgt uit de eisen van Hall. De tweede ongelijkheid $|N(S)| \leq |T_Y|$ volgt uit het feit dat voor elke knoop $y \in N(S)$ geldt dat $y \notin Y \setminus T_Y$. Hieruit concluderen we dat elke knoop $y \in N(S)$ ook in T_Y zit.

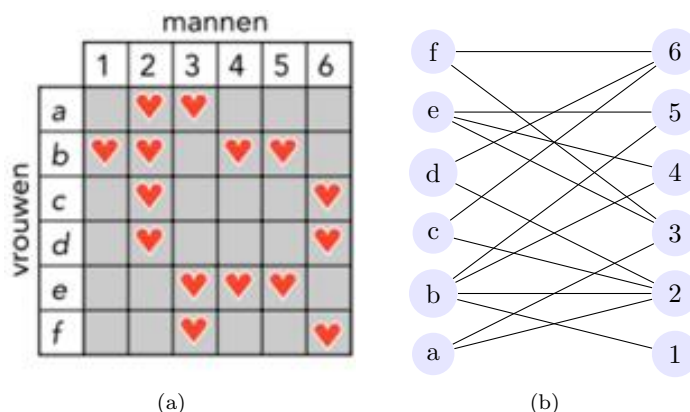
Als $|C|$ oneven en $T_X \neq \emptyset$, dan geldt: $|T_X| \geq 1$. Met een zelfde argument als hierboven volgt weer dat $k = |S| \leq |N(S)| \leq |T_Y| = |T| - |T_X| \leq |T| - 1$. Hieruit volgt dat $o(H \setminus T) = k + 1 \leq |T|$. H voldoet dus aan de voorwaarde van Tutte.

Als $|C|$ oneven en $T_X = \emptyset$, dan is het aantal knopen van H gelijk aan $|T_Y| + k + |C|$. Omdat het aantal knopen van H even is en omdat $|C|$ oneven geldt: $|T_Y| + k$ is oneven. Omdat $k \leq |T_Y|$, weten we nu dat k ongelijk is aan $|T_Y|$. Dus we krijgen: $k \leq |T_Y| - 1$. Hieruit volgt $o(H \setminus T) = k + 1 \leq |T_Y| = |T|$. H voldoet hiermee ook in dit geval aan de voorwaarde van Tutte.

□

Gevolg 3.12. Een bipartiete graaf $G = (X + Y, E)$ heeft een volledige matching dan en slechts dan als $|X| = |Y|$ en $\forall S \subseteq X, |N(S)| \geq |S|$.

We komen terug op het huwelijksprobleem zoals besproken in de inleiding. Ter herinnering: er zijn zes vrouwen die allen een huwelijkslijstje hebben gemaakt. De vraag is of we ervoor kunnen zorgen dat alle vrouwen gekoppeld worden aan een man van hun keuze. We zullen in deze paragraaf zien of het mogelijk is om het huwelijksprobleem uit de inleiding op te lossen. Hiervoor vertalen we eerst het huwelijksprobleem naar een equivalent probleem in de grafentheorie. Dit doen we door de verzameling vrouwen $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ en de verzameling mannen $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ te nemen en de bijbehorende bipartiete graaf te maken die vrouw x_i met man y_j verbindt, als vrouw i met man j wil trouwen. De graaf die we op deze manier krijgen staat in figuur 6.



Figuur 6: huwelijkslijst met bijbehorende bipartiete graaf

We willen weten of er een volledige matching is op deze bipartiete graaf. We kunnen daarvoor gevolg 3.12 gebruiken. Een bipartiete graaf $G = (X + Y, E)$ heeft een volledige matching dan en slechts dan als $|X| = |Y|$ en $\forall S \subseteq X, |N(S)| \geq |S|$. We merken eerst op dat $|X| = |Y|$, want er zijn evenveel mannen als vrouwen in ons huwelijksprobleem. Als we echter kijken naar de vrouwen a, c, d en f zien we dat deze vier vrouwen gezamenlijk maar drie verschillende mannen willen trouwen, namelijk 2, 3 en 6. Uit de Stelling van Hall volgt dat het niet mogelijk is om alle vrouwen te matchen aan een man van haar huwelijkslijstje. We zullen nu zien dat we het huwelijksprobleem van Hall ook kunnen oplossen door te kijken naar de minimale knopenoverdekking van de graaf G .

3.5 Stelling van König

Definitie 3.13. Een knopenoverdekking (of overdekking) van een graaf $G = (V, E)$ is een deelverzameling C van V , waarvoor geldt dat elke lijn van de graaf G minstens een eindpunt heeft in C .

Definitie 3.14. Een minimale knopenoverdekking C_{min} van een graaf $G = (V, E)$ is een knopenoverdekking met het kleinste aantal knopen. Voor elke knopenoverdekking C_i van de graaf G geldt: $|C_{min}| \leq |C_i|$.

We merken op dat de minimale knopenoverdekking niet uniek hoeft te zijn.

Stelling 3.15. Stelling van König

Voor een bipartiete graaf $G = (X + Y, E)$ zonder geïsoleerde punten geldt:

$$|C_{min}| = \nu(G).$$

Bewijs. Neem een grootste matching M en een minimale overdekking C_{min} . Het is eenvoudig om in te zien dat $|C_{min}| \geq |M|$, want elke lijn van de matching M heeft ten minste een eindpunt in de overdekking C_{min} en omdat de lijnen in de matching disjunct zijn volgt dat elke knoop in C_{min} met maximaal een lijn uit de matching verbonden is; dus $|C_{min}| \geq |M|$.

We willen nu nog laten zien dat $|C_{min}| \leq |\nu(G)|$. We doen dit door bij elke grootste matching M een overdekking C te vinden waarvoor geldt: $|C| \leq |M|$. Als we voor elke grootste matching zo'n overdekking kunnen vinden dan volgt hieruit dat: $|C_{min}| \leq |\nu(G)|$, hetgeen we willen bewijzen.

Stel M is een grootste matching. Definieer $S \subseteq X$ als de verzameling knopen in X die niet verzadigd zijn in M . Laat T de verzameling knopen $v \in G$ zijn die we kunnen bereiken met een altemnerend pad startend vanaf een knoop $s \in S$. Merk op dat zo'n pad steeds lijnen $e \in E \setminus M$ van X naar Y heeft en lijnen $e \in M$ van Y naar X .

We definiëren nu: $C = (X \setminus T) \cup (Y \cap T)$ en claimen dat C de gewenste overdekking is van de graaf $G = (X + Y, E)$. Stel C is geen overdekking van G . Dan is er dus een lijn (x, y) tussen $(X \cap T)$ en $(Y \setminus T)$. Als (x, y) in de matching M zat, dan is de enige manier om vanuit S via een altemnerend pad in x te komen via de lijn (y, x) , maar dan is hetzelfde pad met daaruit weggelaten de lijn (y, x) een altemnerend pad van S naar y . Dit levert een tegenspraak op met het gegeven dat $y \notin T$.

Stel nu dat de lijn (x, y) niet in de matching M zat, dan kunnen we een altemnerend pad van van S naar x uitbreiden met de lijn (x, y) om een altemnerend pad van S naar y te vinden. Dit levert een tegenspraak op met het gegeven dat $y \in (Y \setminus T)$. Hieruit volgt dat er geen lijnen zijn (x, y) tussen $X \cap T$ en $(Y \setminus T)$. We concluderen nu dat C een overdekking van G is.

We bewijzen nu dat $|C| \leq |M|$ en dan hebben we de stelling bewezen. Dit doen we door te laten zien dat elke knoop uit de overdekking C met een andere lijn uit de matching M verbonden is.

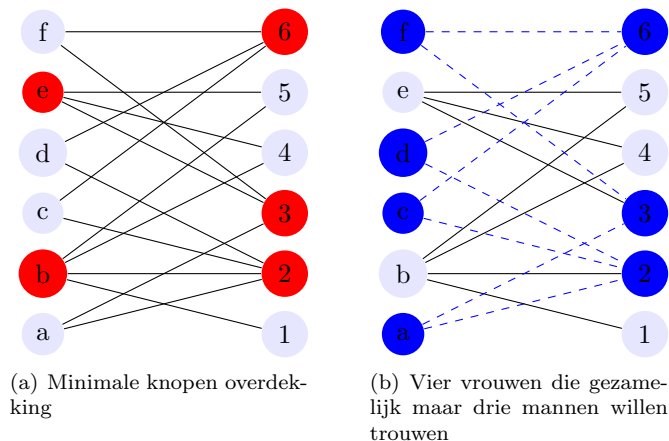
Stel dat $x \in C \cap X = X \setminus T$ en dus $x \notin T$. Omdat voor alle $s \in S$ het lege pad een altemnerend pad van S naar s is, weten we dat T de verzameling $S \subseteq X$ bevat. Hieruit volgt dat $x \notin S$, dus x wordt verzadigd door M .

Stel dat $y \in C \cap Y$, dan is er een altemnerend pad van S naar y . Hieruit volgt dat y verzadigd wordt door de matching M , want anders krijgen we een augmenterend pad van S naar b wat volgens de stelling van Berge een tegenspraak oplevert met het gegeven dat M een maximale matching is.

Dus elke knoop $c \in C$ is verzadigd door de matching M . We merken nu nog op dat twee verschillende knopen $c, d \in C$ nooit verzadigd worden door dezelfde lijn uit de matching M . Dit zou namelijk een lijn van $(X \setminus T)$ naar $(Y \cap T)$ geven. Hieruit volgt dat we een altemnerend pad van S naar $Y \cap T$ uitbreiden met de lijn uit de matching en dus een altemnerend pad van S naar $X \setminus T$ construeren wat een tegenspraak oplevert. \square

De aanname dat de graaf G bipartiet is kunnen we niet missen. De driehoeks-graaf K_3 heeft namelijk als grootste matching een 1-matching, terwijl de minimale overdekkingen van K_3 twee knopen bevatten. Als we de Stelling van König gebruiken om het huwelijksprobleem uit de inleiding op te lossen, vinden we de volgende overdekking die bestaat uit vijf knopen (zie figuur 7a). Uit de Stelling van

König volgt dat de grootste matching maximaal vijf lijnen bevat en we vinden ook op deze manier dat er geen oplossing is voor het huwelijksprobleem.



Figuur 7: Grafen bij het huwelijksprobleem

Stelling 3.16. *Elke k -reguliere bipartiete graaf ($k \geq 1$) heeft een volledige matching.*

Bewijs. Laat $G = (X + Y, E)$ een k -reguliere bipartiete graaf zijn. Er geldt dat: $|X| = |Y|$, want $k|X| = \sum_{x \in X} \deg(x) = |E| = \sum_{y \in Y} \deg(y) = k|Y|$.

Omdat elke knoop precies k van de $k|X|$ lijnen overdekt bevat elke overdekking C ten minste $|X|$ knopen. Uit de Stelling van König volgt nu dat een grootste matching ten minste $|X|$ lijnen bevat. Maar een matching kan nooit meer dan $|X|$ lijnen bevatten en dus moet elke grootste matching precies $|X|$ lijnen hebben. Hieruit volgt dat G een volledige matching heeft. \square

3.6 Nog openstaande vermoedens in de matchingtheorie

Een van de meest bekende openstaande problemen in de matchingtheorie is het vermoeden van Fulkerson.

Definitie 3.17. *Een graaf $G = (V, E)$ heeft een brug als er een lijn $e \in E$ bestaat met de eigenschap dat de graaf $G' = (V, E \setminus \{e\})$ meer samenhangscomponenten heeft dan de graaf G .*

Vermoeden van Fulkerson (1971)

Elke brugloze, 3-reguliere graaf heeft een dubbele overdekking door zes volledige matchingen.

Natuurlijk is het vermoeden waar voor elke graaf die 3-lijn-kleurbaar is, neem de klasse van kleuren als matchingen; dit zijn alledrie volledige matchingen want elke knoop zit in drie lijnen en elke lijn heeft een andere kleur. Deze drie matchingen overdekken de hele graaf G . Als we elke matching twee keer nemen hebben we zes matchingen gevonden, zodat elke lijn $e \in E$ in precies twee matchingen voorkomt. Tot op heden is er nog steeds geen bewijs gevonden voor het vermoeden. Wel zijn enkele wiskundigen erin geslaagd om het vermoeden te bewijzen voor verschillende klassen van grafen. Voor verschillende klasse van grafen die 4-kleurbaar zijn is het vermoeden wel al bewezen.[1] De Volgende vermoedens volgen direct uit het vermoeden van Fulkerson. Maar ook van deze vermoedens, die eenvoudiger te bewijzen moeten zijn dan het vermoeden van Fulkerson, weten we nog niet of ze waar zijn.

Vermoeden 1: Elke 3-reguliere, brugloze graaf heeft drie volledige matchingen zodanig dat geen enkele lijn in alle drie de matchingen zit.

Vermoeden 2: (Vermoeden van Berge (1961)) Elke 3-reguliere, brugloze graaf heeft vijf volledige matchingen zodanig dat elke lijn in minstens één van de vijf matchingen zit.

Voor het eerste vermoeden nemen we drie van de zes matchingen uit het vermoeden van Fulkerson. Er geldt dan dat geen enkele lijn in alle drie de matchingen zit. Voor het tweede vermoeden nemen we vijf van de zes matchingen. Deze vijf matchingen voldoen dan aan de eisen van het vermoeden van Berge. In 2010 bewees G. Mazzuoccolo zelfs dat vermoeden van Berge equivalent is aan het vermoeden van Fulkerson.[2]

In de afgelopen hoofdstukken hebben we ons vooral bezig gehouden met maximale, grootste en volledige matchingen. Een tweede interessante vraag als we het over matchingen op grafen hebben is: Hoeveel verschillende matchingen bestaan er op een graaf G ? In de volgende hoofdstukken zal hier verder op in worden gegaan.

4 Het matching polynoom

In het tweede deel van dit hoofdstuk zullen we ingaan op een tweetal belangrijke polynomen in de matchingtheorie.

Definitie 4.1. Voor $G = (V, E)$ een graaf met $|V| = n$ definiëren we het matching polynoom van een graaf G als volgt:

$$M_G(x) = \sum_{k \geq 0} m_k(G) x^k.$$

We merken op dat voor $k > \frac{n}{2}$ er geen matchingen zijn en dat voor $k > \frac{n}{2}$ de coëfficiënt van x^k in het matching polynoom gelijk is aan 0. Het matching polynoom heeft als coëfficiënt van x^k het aantal k -matchingen van de graaf G .

Definitie 4.2. We definiëren het acyclisch polynoom van een graaf G als volgt:

$$A_G(x) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k m_k(G) x^{n-2k}.$$

4.1 Relatie tussen matching polynoom en acyclisch polynoom

In eerste instantie lijkt het matching polynoom ons meer informatie te geven over het aantal matchingen dan het acyclisch polynoom. We zullen zometeen echter zien dat we de polynomen eenvoudig uit elkaar kunnen afleiden en dat we daarom net zo geïnteresseerd zijn in het acyclisch polynoom als het matching polynoom. De relatie tussen deze twee polynomen wordt gegeven door:

$$\begin{aligned} A_G(x) &= \sum_{k \geq 0} (-1)^k m_k(G) x^{n-2k} = x^n \sum_{k \geq 0} (-1)^k m_k(G) x^{-2k} \\ &= x^n \sum_{k \geq 0} m_k(G) ((-1)x^{-2})^k = x^n \sum_{k \geq 0} m_k(G) ((-x^{-2})^k = x^n M_G(-x^{-2}). \end{aligned} \quad (2)$$

Als we goed kijken naar de definities en de relatie hierboven zien we dat de coëfficiënten van het acyclisch polynoom en het matching polynoom op positie en teken na gelijk zijn. We zien eenvoudig in dat het matching polynoom alleen maar positieve coëfficiënten heeft, dat de constante term gelijk is aan 1 en dat de graad van het matching polynoom gelijk is aan $\nu(G)$. Het acyclisch polynoom daartegen is monisch, alternerend, heeft graad n en alle termen zijn ofwel even, ofwel oneven. We kunnen uit vergelijking 2 de volgende relatie afleiden.

Propositie 4.3. Als $A_G(x) = c_0 x^n - c_1 x^{n-2} + \dots - c_{\nu(G)} x^{n-2(\nu(G))}$ en $M_G(x) = d_0 + d_1 x + \dots + d_{\nu(G)} x^{\nu(G)}$ dan geldt: $c_i = d_i$ voor alle $i \in \{0, 1, \dots, \nu(G)\}$. Bovendien geldt dat $c_i = d_i = m_i(G)$.

Bewijs. Uit de definitie is duidelijk dat $c_i = m_i(G)$ voor alle $i \in \{0, 1, \dots, \nu(G)\}$. We hoeven dus alleen nog te bewijzen dat $d_i = m_i(G)$ voor alle $i \in \{0, 1, \dots, \nu(G)\}$. Maar dit volgt onmiddellijk uit de definitie van het acyclisch polynoom, want we zien dat d_i de coëfficiënt is van $x^{n-2i} = m_i(G)$ \square

De reden waarom we in deze scriptie vooral kijken naar het acyclisch polynoom is omdat dit polynoom een aantal mooie eigenschappen heeft die het matching polynoom niet heeft. Zo zullen we bewijzen dat voor een graaf zonder cykels het acyclisch polynoom gelijk is aan het karakteristiek polynoom van de graaf. Het doel van het tweede deel van deze scriptie is om twee methodes te bespreken om van een graaf G het acyclisch polynoom te bepalen en om enkele eigenschappen van het acyclisch polynoom te behandelen.

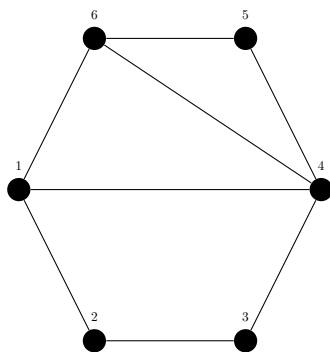
4.2 Toepassingen van het matching polynoom

Het is niet moeilijk om in te zien dat het totaal aantal matchingen van de graaf G gelijk is aan $M_G(1)$. Het totaal aantal matchingen op een graaf wordt ook wel de Hosoya index van de graaf genoemd, vernoemd naar de wiskundige Haruo Hosoya (1936, heden). Deze index speelt een belangrijke rol in de scheikunde om eigenschappen van moleculen en chemische reacties te bepalen. Het is niet moeilijk om moleculen op te vatten als grafen. Hierbij zijn de atomen de knopen en de bindingen de lijnen van de graaf. Het is wel verrassend dat er een verband is tussen eigenschappen van moleculen en de matchingtheorie op grafen.¹ Zo blijkt er bijvoorbeeld een correlatie te zijn tussen het kookpunt van alkanen en de Hosoya index van de bijbehorende graaf. Het blijkt ook dat er een verband is tussen het energieniveau van koolwaterstof-moleculen en de som van de absolute waarde van het acyclisch polynoom van de bijbehorende graaf. Hosoya was in 1970 de eerste wiskundige die keek naar het verband tussen matchingtheorie en de eigenschappen van moleculen. Er wordt nog altijd veel onderzoek gedaan naar de mogelijke verbanden en samenhang tussen deze twee (op het eerste oog) verschillende takken van de wetenschap. Een groot doel van deze onderzoekers is om het gedrag van moleculen en chemische reacties te bepalen uit eigenschappen van de bijbehorende graaf. Voor meer toepassingen van de matchingtheorie, en met name het acyclisch polynoom, in de scheikunde verwijs ik graag naar een van de volgende boeken van N. Trinajstić (1936, heden). [4][5] Verder spelen het acyclisch polynoom en matching polynoom een belangrijke rol in kunstmatige intelligentie en informatica. Voorbeelden hiervan zijn netwerk-verbindingen of algoritmes om een complex probleem op te lossen.

4.3 Voorbeeld matching en acyclisch polynoom

Als we opnieuw naar ons voorbeeld kijken van Hoofdstuk 4 vinden we dat de graaf G het volgende matching polynoom heeft: $M_G(x) = 3x^3 + 13x^2 + 8x + 1$. We hebben namelijk in Hoofdstuk 2 gezien dat er drie verschillende 3-matchingen zijn, dertien verschillende 2-matchingen, acht verschillende 1-matchingen en dat er per definitie één 0-matching is. Het acyclisch polynoom van de graaf G is gelijk aan:

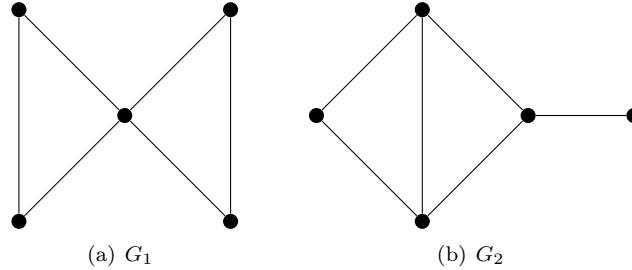
$$\begin{aligned} A_G(x) &= x^n M_G(-x^{-2}) = x^6(3(-x^{-2})^3 + 13(-x^{-2})^2 + 8(-x^{-2}) + 1) \\ &= x^6 - 8x^4 + 13x^2 - 3 \end{aligned}$$



Figuur 8: Graaf G

¹Een belangrijke opmerking die hierbij gemaakt moet worden is dat we in deze scriptie kijken naar ongewogen grafen, de vele toepassingen in de scheikunde maken gebruik van handig gekozen parameters en gewichten. In het boek 'Journal of Combinatorial Theory', van E.J. Farrell, worden zowel het acyclisch als matching polynoom van gewogen grafen gedefinieerd.[3]

We merken op dat we het acyclisch polynoom ook eenvoudig uit propositie 4.3 af hadden kunnen afleiden. Een andere belangrijke opmerking die we maken is dat twee isomorfe grafen G en H hetzelfde acyclisch polynoom hebben. De omkering hiervan is echter niet waar; twee grafen met hetzelfde acyclisch polynoom hoeven niet isomorf te zijn. In Figuur 9 bijvoorbeeld zijn twee grafen G_1 en G_2 met hetzelfde acyclisch polynoom gegeven, maar de grafen G_1 en G_2 zijn zeker niet isomorf.



Figuur 9: Twee niet-isomorfe grafen met hetzelfde acyclisch polynoom

Er geldt dat: $A_{G_1}(x) = x^5 - 6x^3 - 5x = A_{G_2}(x)$. Maar de grafen zijn duidelijk niet isomorf want in G_1 is er een knoop van graad 4 en in G_2 hebben alle knopen graad ≤ 3 . Het feit dat er niet-isomorfe grafen bestaan die wel hetzelfde acyclisch polynoom hebben, brengt ons bij de volgende definities.

Definitie 4.4. *We zeggen dat twee grafen co-matching zijn als ze hetzelfde acyclisch polynoom hebben.*

Definitie 4.5. *Een graaf G heet matching uniek als alle grafen die hetzelfde acyclisch polynoom hebben isomorf zijn aan G .*

In Hoofdstuk 6 zullen we nog terugkomen op co-matching grafen. In de volgende twee hoofdstukken zullen, naast enkele eigenschappen van het acyclisch polynoom, twee manieren om het acyclisch polynoom van een graaf te bepalen behandeld worden. In Hoofdstuk 6 zullen we het acyclisch polynoom bepalen met behulp van de zogeheten 'matchingmatrix'. Maar eerst zullen we met behulp van de minimale opspannende boom van een graaf op een recursieve manier het acyclisch polynoom bepalen.

4.4 Fundamentele theorie van acyclische polynomen

Lemma 4.6. *Voor twee grafen G en H die een disjuncte verzameling knopen hebben geldt:*

$$m_k(G \cup H) = \sum_{l=0}^k m_l(G) m_{k-l}(H).$$

Bewijs. Elke k -matching van $G \cup H$ bestaat uit een l -matching van G samen met een $k - l$ -matching van de graaf H . Dit geldt voor alle $l \leq k$. Hieruit volgt het lemma onmiddellijk. \square

Gevolg 4.7. Samenstelling van disjuncte grafen

Voor twee grafen G en H die een disjuncte knopenverzameling hebben geldt:

$$A_G(x) \times A_H(x) = A_{G \cup H}(x).$$

Bewijs. Stel aantal knopen van $G = n_G$ en aantal knopen van $H = n_H$, dan geldt:

$$\begin{aligned} A_G(x) \times A_H(x) &= \sum_{i \geq 0} (-1)^i m_i(G) x^{n_G - 2i} \times \sum_{j \geq 0} (-1)^j m_j(H) x^{n_H - 2j} \\ &= \sum_{i+j \geq 0} (-1)^{i+j} m_i(G) m_j(H) x^{n_G + n_H - 2(i+j)} \\ &= \sum_{k \geq 0} (-1)^k m_k(G \cup H) x^{n_G + n_H - 2k} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k m_k(G \cup H) x^{n - 2k} \\ &= A_{G \cup H}(x). \end{aligned}$$

□

Lemma 4.8. Voor een graaf G geldt:

$$m_k(G) = m_k(G - e) + m_{k-1}(G - u - v),$$

waar $G - e$ de graaf is die we uit G krijgen door de lijn $e = (u, v)$ weg te halen en $G - u - v$ de graaf is die uit G verkregen wordt door de knopen u en v samen met alle lijnen die aan u of v grenzen te verwijderen.

Bewijs. Een matching van de graaf G bevat de lijn e , of hij bevat de lijn e niet.

Stel de k -matching bevat de lijn e . Dan volgt hieruit dat alle aangrenzende lijnen niet in de matching zitten. We zoeken nu dus nog een $k-1$ -matching op de graaf $G - u - v$. Hiervan zijn er $m_{k-1}(G - u - v)$. Stel de k -matching bevat de lijn e niet. Dan hebben we een k -matching op de graaf $G - e$ en hiervan zijn er $m_k(G - e)$. In totaal zijn er dus $m_k(G - e) + m_{k-1}(G - u - v)$ verschillende k -matchingen op de graaf G . □

Gevolg 4.9. Recursie op lijnen

Voor een graaf $G = (V, E)$ geldt voor elke $e = (u, v) \in E$ dat:

$$A_G(x) = A_{G-e}(x) - A_{G-u-v}(x).$$

Bewijs.

$$\begin{aligned} A_G(x) &= \sum_{k \geq 0} (-1)^k m_k(G) x^{n-2k} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \left(m_k(G - e) + m_{k-1}(G - u - v) \right) x^{n-2k} \\ &= \sum_{k \geq 0} (-1)^k m_k(G - e) x^{n-2k} + \sum_{k \geq 1} (-1)^k m_{k-1}(G - u - v) x^{n-2k} \\ &= \sum_{k \geq 0} (-1)^k m_k(G - e) x^{n-2k} + (-1) \sum_{k-1 \geq 0} (-1)^{k-1} m_{k-1}(G - u - v) x^{n-2-2(k-1)} \\ &= \sum_{k \geq 0} (-1)^k m_k(G - e) x^{n-2k} + (-1) \sum_{l \geq 0} (-1)^l m_l(G - u - v) x^{|G-u-v|-2l} \\ &= A_{G-e}(x) - A_{G-u-v}(x). \end{aligned}$$

□

Lemma 4.10. *Stel we hebben een knoop $v \in V$ met graad $v = d$, dan geldt:*

$$m_k(G) = m_k(G - v) - \sum_{i=1}^d m_{k-1}(G - v - u_i),$$

waar $u_i \in V, 1 \leq i \leq d$ alle burenen van v zijn, $G - v$ de graaf die we uit G krijgen door de knoop v en alle aangrenzende lijnen weg te halen en $G - v - u_i$ de graaf is die uit G verkregen wordt door de knopen v en u_i samen met alle lijnen die aan v of u_i grenzen te verwijderen.

Bewijs. We kunnen alle k -matchings van de graaf opdelen in twee klassen: De matchingen die de knoop v bevatten en de matchingen die v niet bevatten.

Het aantal k -matchingen dat de knoop v niet bevat is gelijk aan $m_k(G - v)$.

Elke k -matching die de knoop v wel bevat moet een lijn $(v, u_i) \in E$ bevatten. En het aantal k -matchingen met de lijn $(v, u_i) \in E$ is nu gelijk aan $m_{k-1}(G - v - u_i)$. Dit geldt natuurlijk voor elke knoop u_i die een buur is van v . \square

Gevolg 4.11. Recursie op knopen

Voor een graaf $G = (V, E)$ geldt voor elke $v \in V$ dat:

$$A_G(x) = xA_{G-v}(x) - \sum_{i=1}^d A_{G-v-u_i}(x).$$

Bewijs.

$$\begin{aligned} A_G(x) &= \sum_{k \geq 0} (-1)^k m_k(G) x^{n-2k} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \left(m_k(G - v) + \sum_{i=1}^d m_{k-1}(G - v - u_i) \right) x^{n-2k} \\ &= \sum_{k \geq 0} (-1)^k m_k(G - v) x^{n-2k} + \sum_{k \geq 1} (-1)^k \sum_{i=1}^d m_{k-1}(G - v - u_i) x^{n-2k} \\ &= x \sum_{k \geq 0} (-1)^k m_k(G - v) x^{(n-1)-2k} + (-1) \sum_{i=1}^d \sum_{k-1 \geq 0} (-1)^{k-1} m_{k-1}(G - v - u_i) x^{(n-2)-2(k-1)} \\ &= x \sum_{k \geq 0} (-1)^k m_k(G - v) x^{(|G-v|-2k)} - \sum_{i=1}^d \sum_{l \geq 0} (-1)^l m_l(G - v - u_i) x^{|G-v-u_i|-2l} \\ &= xA_{G-v}(x) - \sum_{i=1}^d A_{G-v-u_i}(x). \end{aligned}$$

De eerste gelijkheid volgt uit Lemma 4.10. We mogen verder de sommen wisselen omdat i onafhankelijk is van k en beide sommen eindig zijn. \square

Met deze drie relaties kunnen we nu het acyclisch polynoom van een willekeurige graaf recursief bepalen. Door herhaaldelijk bovenstaande recursies te gebruiken de graaf kunnen we elke graaf reduceren tot een eenvoudige graaf waarvan het acyclisch polynoom bekend is. Van de volgende grafen kunnen we eenvoudig nagaan wat het acyclisch polynoom is.

4.5 Acyclische polynomen op standaard grafen

4.5.1 Acyclisch polynoom van de lege graaf

Voor de lege graaf $\overline{K_n}$, een graaf met n knopen maar zonder lijnen, geldt het volgende:

$$A_{\overline{K_n}}(x) = x^n.$$

Bewijs. In de graaf $\overline{K_n}$ zijn er geen lijnen dus de enige matching die er is is de 0-matching. Er geldt dus $m_k(\overline{K_n}) = 0$ voor alle $k > 0$. Het acyclisch polynoom van de graaf $\overline{K_n}$ is dus: $(-1)^0 m_0(\overline{K_n}) x^{n-2 \times 0} = x^n$ \square

4.5.2 Acyclisch polynoom van een pad

Voor een pad met n lijnen $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$, (notatie $G = P_n$) geldt:

$$m_k(P_n) = m_k(P_{n-1}) + m_{k-1}(P_{n-2}).$$

Dit is eenvoudig in te zien door alle k -matchingen op een pad P_n te verdelen in twee klassen, de matchingen die de eerste lijn (v_0, v_1) wel bevatten en de matchingen die de eerste lijn niet bevatten. Als de matching de lijn (v_0, v_1) wel bevat volgt dat we nog een $k-1$ -matching nodig hebben die de eerste en tweede lijn niet mag bevatten, dus een k -matching op een pad P_{n-2} . Als de eerste lijn niet in de matching zit dan moeten we dus een k -matching maken op een pad met de lijn (v_0, v_1) weg gelaten; hieruit volgt bovenstaande relatie.

Lemma 4.12.

$$A_{P_n}(x) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{n-k}{k} x^{n-2k}.$$

Bewijs. We hoeven alleen nog maar te bewijzen dat $m_k(P_n) = \binom{n-k}{k}$ voor elke k . Dan volgt het lemma onmiddellijk uit de definitie van het acyclisch polynoom. Dit doen we met inductie naar n . We maken bovendien gebruik van de volgende combinatorische formule. Voor een bewijs van deze identiteit verwijs ik graag naar een standaard boek over combinatoriek, bijvoorbeeld het boek *Introductory Combinatorics* van R.A. Brualdi.[6]

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}. \quad (3)$$

Voor P_0 en P_1 gaan we eenvoudig na dat het aantal k -matchingen gegeven wordt door $m_k(P_n) = \binom{n-k}{k}$. Er geldt namelijk: $m_0(P_0) = 1 = \binom{0}{0}$, $m_0(P_1) = 1 = \binom{1}{0}$ en $m_1(P_1) = 1 = \binom{1}{1}$.

Stel nu dat $m_k(P_n) = \binom{n-k}{k}$ voor alle paden P_i met $i < n$ dan geldt wegens vergelijking (3) dat:

$$\begin{aligned} m_k(P_n) &= m_k(P_{n-1}) + m_{k-1}(P_{n-2}) = \binom{n-1-k}{k} + \binom{n-2-(k-1)}{k-1} \\ &= \binom{n-k-1}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} = \binom{n-k}{k}. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dus dat het aantal k -matchingen op een pad P_n gelijk is aan $\binom{n-k}{k}$. \square

4.5.3 Acyclisch polynoom van een cykel

Als G een cykel is met n lijnen $\{v_1, v_2, \dots, v_n, v_1\}$, (notatie $G = C_n$) geldt:

$$m_k(C_n) = m_k(P_n) + m_{k-1}(P_{n-2}).$$

We kunnen namelijk een lijn $e = (u, v)$ in de cykel C_n weghalen. De k -matchingen van de graaf C_n vallen weer in twee klassen, de matchingen die de lijn e wel bevatten en de matchingen die de lijn e niet bevatten. Als de matching de lijn e wel bevat volgt dat we nog een $k-1$ -matching nodig hebben op een pad met $n-2$ knopen namelijk $G - u - v$, en als de lijn e niet in de matching zit hebben we een pad op n knopen en dus zoeken we k -matching op n knopen.

Lemma 4.13. *Voor een cykel C_n met n lijnen geldt:*

$$A_{C_n}(x) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} x^{n-2k}.$$

Bewijs. Het is voldoende om te bewijzen dat het aantal k -matchingen gelijk is aan $\frac{k}{n-k} \binom{n-k}{k}$ voor alle k . Uit bovenstaande lemma volgt dat het aantal k -matchingen $m_k(C_n)$ gelijk is aan $m_k(P_n) + m_{k-1}(P_{n-2})$. En hiervoor geldt:

$$\begin{aligned} m_k(C_n) &= m_k(P_n) + m_{k-1}(P_{n-2}) = \binom{n-k}{k} + \binom{n-2-(k-1)}{k-1} \\ &= \binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} = \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} + \frac{(n-k-1)!}{(k-1)!(n-2k)!} \\ &= \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} + \frac{(n-k-1)!(n-k)k}{(n-k)k(k-1)!(n-2k)!} = \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} + \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} \cdot \frac{k}{n-k} \\ &= \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} \cdot \left(1 + \frac{k}{n-k}\right) = \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} \cdot \left(\frac{n-k}{n-k} + \frac{k}{n-k}\right) \\ &= \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k}. \end{aligned}$$

□

4.5.4 Acyclisch polynoom van een volledige graaf

Lemma 4.14. *Voor een volledige graaf K_{2k} op $2k$ knopen geldt:*

$$m_k(K_{2k}) = \prod_{i=1}^k (2i-1) = \frac{(2k)!}{2^k k!}.$$

Bewijs. We nemen een knoop v_1 uit de graaf K_{2k} . Omdat elke knoop verzadigd moet worden in een volledige matching zijn er $2k-1$ mogelijkheden om knoop v_1 te matchen, hij kan met alle knopen matchen behalve zichzelf. We nemen nu een knoop $v_3 \neq v_1$ en ongelijk aan de knoop die we aan v_1 hadden gematcht, deze kan nog met $2k-3$ knopen verbonden worden. We kunnen dit proces herhalen en vinden zo dat $m_k(K_{2k}) = \prod_{i=1}^k (2i-1)$. We bewijzen nu met inductie naar k de tweede gelijkheid. Voor $k=1$ geldt: $m_k(K_{2k}) = m_1(K_2) = 1 = \frac{2}{2} = \frac{(2k)!}{2^k k!}$. Stel nu dat $\prod_{i=1}^k (2i-1) = \frac{(2k)!}{2^k k!}$ voor j dan geldt voor $j+1$:

$$\begin{aligned} \frac{(2(j+1))!}{(j+1)!2^{j+1}} &= \frac{(2j+2)!}{(j+1)!2^{j+1}} = \frac{(2j)!}{2^j j!} \cdot \frac{(2i+1)(2i+2)}{2(i+1)} = \frac{2j!}{2^j j!} \cdot (2i+1) \\ &= \prod_{i=1}^j (2i-1) \cdot (2j+1) = \prod_{i=1}^{j+1} (2i-1). \end{aligned}$$

□

Lemma 4.15.

$$A_{K_n}(x) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{(2k)!}{2^k k!} \binom{n}{2k} x^{n-2k}.$$

Bewijs. Om dit te bewijzen hoeven we alleen te laten zien dat het aantal k -matchingen op een volledige graaf gelijk is aan $\frac{(2k)!}{2^k k!} \binom{n}{2k}$. Voor elke $k \leq \frac{n}{2}$ zijn er $\binom{n}{2k}$ manieren om $2k$ knopen te kiezen uit de graaf K_n , elke mogelijkheid levert een volledige deelgraaf K_{2k} op. En uit Lemma 4.15 volgt nu dat voor elke van zulke deelgrafen er $\frac{(2k)!}{2^k k!}$ verschillende k -matchingen zijn. Hieruit volgt:

$$m_k(K_n) = \frac{(2k)!}{2^k k!} \binom{n}{2k}.$$

□

Een leuke opmerking die we hier kunnen maken is dat voor volledige grafen, het aantal matchingen equivalent is aan het telefoongesprekken in een telefoon netwerk. Als we voor elke telefoon een knoop nemen en de lijnen beschouwen als een mogelijke verbinding tussen de twee telefoons. We noemen het totaal aantal matchingen op een volledige graaf K_n daarom het telefoongetal van n (notatie $T(n)$). De telefoon getallen werden voor het eerst bestudeerd door Heinrich August Rothe in 1800.

Stelling 4.16. *Voor $n > 1$ geldt:*

$$T(n) = T(n-1) + (n-1)T(n-2).$$

Bewijs. Er geldt dat $T(0) = 1$, want er is maar één matching op de lege graaf. En ook $T(1) = 1$, want er is op een graaf met één knoop maar één matching, namelijk de lege matching. We bekijken voor $T(n)$ met $n > 1$ naar een knoop v uit de graaf K_n . Het aantal matchingen dat deze knoop niet bevat is gelijk aan het aantal matchingen op de graaf K_{n-1} . Als de knoop v wel verzadigd wordt door een matching dan bevat deze matching dus een lijn die v matcht aan een andere knoop uit K_n ; er zijn $n-1$ zulke lijnen. En dan houden we een volledige graaf over met $n-2$ knopen. Hieruit volgt: $T(n) = T(n-1) + (n-1)T(n-2)$. □

4.5.5 Acyclisch polynoom van een volledig bipartiete graaf

Lemma 4.17. *Voor een volledig bipartiete graaf $G = K_{n_1, n_2}$ met $n = n_1 + n_2$ en $n_1 \leq n_2$ geldt:*

$$A_{K_{n_1, n_2}}(x) = \sum_{k=0}^{n_1} (-1)^k k! \binom{n_1}{k} \binom{n_2}{k} x^{n-2k}.$$

Bewijs. Het is ook nu voldoende om te laten zien dat het aantal k -matchingen van $A_{K_{n_1, n_2}}$ gelijk is aan $k! \binom{n_1}{k} \binom{n_2}{k}$. We merken eerst op dat we op $\binom{n_1}{k} \binom{n_2}{k}$ manieren k verschillende knopen uit n_1 en k verschillende knopen uit n_2 kunnen halen. Er geldt dus dat $m_k(A_{K_{n_1, n_2}}) = \binom{n_1}{k} \binom{n_2}{k} \cdot m_k(K_{k, k})$. We claimen nu dat het aantal k -matchingen voor een volledige graaf $K_{k, k}$ gelijk is aan $k!$. Het bewijs van deze claim zal dit lemma dan bewijzen. Omdat we een k -matching zoeken op een graaf met $2k$ knopen weten we dat elke knoop verzadigd moet worden. Er zijn k mogelijkheden om de eerste knoop uit het linkerdeel te matchen. Er blijven nu $k-1$ mogelijkheden over om de tweede knoop uit het linkerdeel te matchen. Als we zo door gaan vinden we dat er $k!$ verschillende mogelijkheden zijn om een volledige matching te vinden. □

We hebben voor een aantal eenvoudige grafen een algemene formule gevonden voor het acyclisch polynoom. Als we van een willekeurige graaf G recursief het acyclisch polynoom willen bepalen zal dit in het algemeen echter veel tijd kosten. In 1981 bewezen I. Gutman en C. Godsil dat het acyclisch polynoom gelijk is aan het karakteristiek polynoom dan en slechts dan als de graaf G acyclisch is. Deze stelling maakt het voor vele grafen een stuk eenvoudiger om op een recursieve manier het acyclisch polynoom te bepalen. De stelling die Gutman en Godsil bewezen zegt dat voor een graaf zonder cykels het acyclisch polynoom gelijk is aan het karakteristiek polynoom van de graaf. Om dit te bewijzen zullen we in het volgende hoofdstuk enkele basiseigenschappen van het karakteristiek polynoom herhalen. Het bewijs van deze stelling heeft veel betekend voor de verdere ontwikkelingen 'in de jaren 80 en 90' op het gebied van matchingtheorie.

5 Acyclisch polynoom van een bos

Van alle polynomen op grafen is het karakteristiek polynoom misschien wel het meest bekende polynoom. Dit heeft het karakteristiek polynoom te danken aan de vele toepassingen en de eenvoudige definitie. Bijkomend voordeel is dat het berekenen van het karakteristiek polynoom, in tegenstelling tot veel andere polynomen op grafen, redelijk eenvoudig is. We zullen in deze paragraaf enkele kenmerken van het karakteristiek polynoom behandelen die we later nodig hebben om de beroemde stelling van Godsil en Gutman te bewijzen. Er zullen eerst enkele resultaten uit de lineaire algebra volgen die hier niet volledig bewezen zullen worden. Voor de geïnteresseerde lezer verwijs ik graag naar een standaard lineaire algebra boek, bijvoorbeeld: 'lineaire algebra' van K. Hoffman en R. Kunze.[7]

5.1 Definities en basiseigenschappen lineaire algebra

Definitie 5.1. Voor $n \in \mathbb{N}$ laat S_n de verzameling bijecties van $[n] := \{1, \dots, n\}$ zijn en voor $\sigma \in S_n$, $\text{sgn}(\sigma) \in \{-1, 1\}$ het welgedefinieerde teken van de permutatie zijn.

Definitie 5.2. We definiëren we de ring der $n \times n$ -matrices met reële coëfficiënten als: $M_n(\mathbb{R})$.

Definitie 5.3. Voor een matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ definiëren we de determinant als volgt: als $n = 1$ is de determinant van A gelijk aan A en voor $n > 1$ geldt:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(M_{ij}).$$

Hierbij is M_{ij} de matrix A met daaruit weggelaten rij i en kolom j .

Definitie 5.4. Voor een matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ zeggen we dat $\lambda \in \mathbb{C}$ een eigenwaarde van de matrix A is, als er een niet nul vector $v \in \mathbb{R}^n$ bestaat, zodanig dat $Av = \lambda v$.

Definitie 5.5. Voor een matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ wordt het karakteristiek polynoom $P_A(t)$ van de matrix A gegeven door $P_A(t) := \det(tI_n - A)$.

De volgende resultaten staan alle bewezen in hoofdstuk vijf en zes van het eerdergenoemde boek van K. Hoffman en R. Kunze. In deze scriptie zullen we een andere formule voor de determinant gebruiken dan de Definitie 5.3; de formule van Leibniz, genoemd naar de Duitse wiskundige Gottfried Leibniz (1646-1716).

Lemma 5.6. De formule van Leibniz luidt:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}.$$

Waarbij $\text{sgn}(\sigma)$ het teken van de permutatie aangeeft.

Lemma 5.7. Voor een matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ geldt dat $\lambda \in \mathbb{C}$ een eigenwaarde is van de matrix A dan en slechts dan als λ een nulpunt is van het karakteristiek polynoom $P_A(t)$.

Lemma 5.8. Voor een symmetrische matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ geldt dat alle nulpunten van het karakteristiek polynoom in het lichaam \mathbb{R} zitten.

Lemma 5.9. De eigenwaarde van een matrix A zijn gelijk aan de nulpunten van het karakteristiek polynoom $P_A(t)$.

Definitie 5.10. Laat $A \in M_n(\mathbb{R})$ een matrix zijn. Een matrix B is een minor van A , als B verkregen kan worden uit A door het verwijderen van een verzameling van rijen en hetzelfde aantal kolommen. Een hoofdminor is een minor M verkregen uit A door dezelfde rijen en kolommen te verwijderen. We noemen de determinant van een hoofdminor M een onderdeterminant van de matrix A . We zeggen dat een (hoofd)minor van orde i is als de minor i rijen en kolommen heeft. We noteren een hoofdminor van orde i als M_i .

Definitie 5.11. Het spoor van een matrix A is de som van de diagonaal elementen a_{ii} van de matrix A .

Definitie 5.12. De bogenmatrix van een graaf $G = (V, E)$ is een $n \times n$ -matrix A_G met coëfficiënten A_{ij} gegeven door:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als } (v_i, v_j) \in E \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Dit zal geen verwarring opleveren met de notatie van het acyclisch polynoom, omdat de bogenmatrix A_G een matrix is en het acyclisch polynoom $A_G(x)$ een polynoom is. Uit de definitie volgt onmiddellijk dat de bogenmatrix van een graaf symmetrisch is en dat het spoor van de bogenmatrix 0 is. We merken op dat de bogenmatrix niet uniek is. Een permutatie van de knopen levert een andere bogenmatrix op. Dit zal echter geen problemen opleveren, omdat we in het vervolg van deze scriptie geïnteresseerd zijn in de determinant van de bogenmatrix en omdat het verwisselen van de knopen (rijen en kolommen) determinant oplevert.

5.2 Het karakteristiek polynoom van een graaf

Definitie 5.13. Gegeven een graaf $G = (V, E)$ met $|V| = n$ met de bijbehorende bogenmatrix A_G . Dan wordt het karakteristiek polynoom van de graaf G gedefinieerd als het karakteristiek polynoom van de bijbehorende bogenmatrix:

$$P_G(t) := \det(tI_n - A_G).$$

De eigenwaarden van de graaf worden gedefinieerd als de eigenwaarden van de bijbehorende bogenmatrix.

Propositie 5.14. Laat $G = (V, E)$ een graaf zijn met bijbehorende bogenmatrix A_G en karakteristiek polynoom $P_A(t) = c_0 t^n + c_1 t^{n-1} + c_2 t^{n-2} + \dots + c_{n-1} t + c_n$. Dan geldt voor elke $i \in \{1, \dots, n\}$ dat de coëfficiënt $(-1)^i c_i$ gelijk is aan de som van alle onderdeterminanten van orde i van de bogenmatrix A_G .

$$D = (tI_n - A_G) = \begin{pmatrix} t & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & t & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & t \end{pmatrix}$$

Figuur 10: De graaf D

Bewijs. We gebruiken de formule van Leibniz om de determinant van $D = tI - A_G$ te bepalen. Er geldt dat: $P_A(t) = \det(D)$. We bekijken de elementen van de matrix D uit Figuur 10. Op de diagonaal van D staat overal een t , omdat de bogenmatrix op de diagonaal overal waarde 0 heeft. Om c_i (de coëfficiënt van t^{n-i}) te vinden moeten we een permutatie hebben die precies $n - i$ keer een element op zijn plek laat want, want de variabele t komt alleen op de diagonaal van D voor. De overgebleven i factoren zijn nu hoofdminoren van de matrix D van orde i . In deze hoofdminoren staan op de diagonaal elementen t . Als we een permutatie nemen die precies $n - i$ elementen op zijn plaats laat vormen de overige i elementen van deze permutatie samen de determinant van een hoofdminor M_i van A_G . De determinant van deze hoofdminor is gelijk aan $(-1)^i \det(M_i)$, omdat de grootte van M gelijk is aan i en alle elementen van de matrix A_G gelijk zijn aan $-a_{ij}$. Als we vervolgens naar alle mogelijke keuzes van $\sigma \in S_N$ kijken die $n - i$ diagonalen op de plek laten, vinden we dat $c_i = \sum_{M_i} (-1)^i \det(M_i)$. Hieruit volgt dat: $(-1)^i c_i = \sum_{M_i} \det(M_i)$, waar de som loopt over alle hoofdminoren M_i van A_G . \square

Gevolg 5.15. het karakteristiek polynoom monisch is van graad n .

Propositie 5.16. Voor een simpele graaf $G = (V, E)$ met bijbehorend karakteristiek polynoom $P_G(t) = t^n + c_1 t^{n-1} + c_2 t^{n-2} + \dots + c_{n-1} t + c_n$ geldt:

[1] $c_1 = 0$

[2] $c_2 = -|E(G)|$

[3] $c_3 = -(\text{tweemaal het aantal driehoeken in } G)$

Bewijs. Uit propositie 5.14 volgt dat $(-1)^i c_i$ gelijk is aan de som van onderdeterminanten van de bogenmatrix A_G van orde i .

[1] Voor de coëfficiënt van t^{n-1} merken we op dat c_1 gelijk is aan het spoor, de som van de diagonaal elementen, van de bogenmatrix. Omdat er geen lussen zijn in een simpele graaf zijn alle diagonaal elementen gelijk aan 0.

[2] Er zijn twee hoofdminoren van de bogenmatrix met twee rijen en kolommen: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. De eerste hoofdminor heeft determinant 0 en telt dus niet mee. Voor elke lijn is er een hoofdminor van de vorm $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ en de determinant van al deze hoofdminoren is gelijk aan -1 . Hieruit volgt dat: $(-1)^2 c_2 = (-1)|E|$ en dus dat: $-c_2 = |E|$.

[3] Er zijn acht mogelijke hoofdminoren van de bogenmatrix van grootte drie:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De determinant van de eerste zeven hoofdminoren is 0 en telt dus niet mee in de som. De achtste hoofdminor heeft determinant 2 en hoort bij een driehoek van de graaf G . We merken op dat er voor elke driehoek een hoofdminor bestaat van grootte drie die precies de knopen van de driehoek als kolommen/rijen heeft. Hieruit volgt dat: $(-1)^3 c_3 = -c_3 = \text{tweemaal het aantal driehoeken in } G$.

□

5.3 Lemma van Harary

Definitie 5.17. We noemen een graaf **regulier** als alle knopen dezelfde graad hebben. We noemen een graaf **k-regulier** als alle knopen graad k hebben.

Definitie 5.18. Een **elementaire graaf** is een graaf waarbij elke samenhangscomponent 1-regulier of 2-regulier is.

Definitie 5.19. Een **opspannende elementaire deelgraaf** van een graaf G is een elementaire deelgraaf die alle knopen V van G bevat. Dit is dus een deelgraaf die elke knoop verzadigt en waarbij alle samenhangscomponenten een lijn of een cykel C_k zijn. We geven de opspannende elementaire deelgrafen van een graaf G aan met: $\Omega_G = \{\omega_{1_G}, \dots, \omega_{n_G}\}$. Als het duidelijk is over welke graaf we spreken zullen we enkel $\omega_1, \dots, \omega_n$ schrijven.

Merk op dat een opspannende elementaire deelgraaf zonder cyclen een volledige matching oplevert.

Definitie 5.20. We noemen $comp(\omega_i)$ het aantal samenhangscomponenten van ω_i en $cyc(\omega_i)$ het aantal cyclen van ω_i .

In 1962 bewees F. Harary (1921-2005) het volgende lemma.

Lemma 5.21. Zij A_G de bogenmatrix van een graaf $G = (V, E)$, met $|V| = n$. Dan geldt:

$$\det(A_G) = (-1)^n \sum_{\omega_i \in \Omega_G} (-1)^{comp(\omega_i)} 2^{cyc(\omega_i)}.$$

Bewijs. De determinant van de bogenmatrix A_G wordt met de formule van Leibniz gegeven door:

$$\det(A_G) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}.$$

We kijken nu voor $\sigma \in S_n$ naar de term $\text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}$. Deze term wordt 0 als er een $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ is waarvoor $a_{i, \sigma(i)} = 0$. Dit is het geval als $(v_i, v_{\sigma(i)}) \notin E$. In het bijzonder wordt deze term dus 0 als de permutatie σ een punt op zijn plek laat. Een standaard resultaat uit de groepentheorie is dat elke permutatie $\sigma \in S_n$ op een unieke (op volgorde na) manier geschreven kan worden als product van disjuncte cyclen. Elke permutatie $\sigma \in S_n$ die ons een niet-nul term oplevert kunnen we dus schrijven als product van cyclen die minstens lengte twee hebben. Elke cykel (ij) van lengte twee correspondeert met een factor $a_{i,j} a_{j,i}$ en duidt een lijn $(v_i, v_j) \in E$ aan. Elke cykel $(ab\dots k)$ van lengte groter dan twee correspondeert met een factor $a_{ab} a_{bc} \cdots a_{jk}$, en duidt een cykel $\{v_a, v_b, \dots, v_k\}$ van lengte k aan in de graaf G . Hieruit volgt dat elke niet-nul term van de determinant formule correspondeert met een unieke opspannende elementaire deelgraaf ω_i .

We definiëren nu de functie $f : S_n \rightarrow \Omega_G$, $f(\sigma) = \omega_i$ die elke 'niet-nul' permutatie $\sigma \in S_n$ stuurt naar de bijbehorende elementaire deelgraaf ω_i .

Laat nu $f^{-1}(\omega_i) = \{\sigma \in S_n : f(\sigma) = \omega_i\}$ de verzameling van permutaties zijn die het inverse beeld van een elementaire deelgraaf zijn. Voor elke cykel geldt dat deze op twee manieren geschreven kan worden als permutatie. De twee verschillende richtingen van een cykel leveren namelijk twee verschillende permutaties op. Voor elke opspannende elementaire deelgraaf ω_i zijn er dus $2^{cyc(\omega_i)}$ verschillende permutaties die corresponderen met deze elementaire deelgraaf. En geldt dus: $|f^{-1}(\omega_i)| = 2^{cyc(\omega_i)}$.

Verder merken we op dat twee permutaties die naar dezelfde elementaire deelgraaf worden gestuurd ook hetzelfde teken hebben, want ze hebben precies dezelfde lengtes van cyclen. We kunnen daarom het teken van een permutatie schrijven als het teken van de bijbehorende elementaire deelgraaf. We kunnen dus schrijven: $\text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(\omega_i)$. We kunnen de determinant van de bogenmatrix schrijven als:

$$\det(A_G) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)} = \sum_{\omega_i \in \Omega_G} \sum_{\sigma \in f^{-1}(\omega_i)} \text{sgn}(\sigma) = \sum_{\omega_i \in \Omega_G} \text{sgn}(\omega_i) 2^{cyc(\omega_i)}. \quad (4)$$

Het teken van een opspannende deelgraaf ω_i is gelijk aan het teken van de bijbehorende $\sigma \in S_n$. Het teken van een permutatie is gelijk aan $(-1)^{N_e}$, waar N_e het aantal even cyclen in ω_i is. Omdat elke knoop verzadigd moet zijn in ω_i weten we, als $n = |V|$ even is dat we een even aantal oneven-samenhangscomponenten hebben in ω_i . Als n oneven is hebben we een oneven aantal oneven-samenhangscomponenten in ω_i . Hieruit volgt dat het aantal oneven-samenhangscomponenten N_o van ω_i gelijk is aan $n \bmod 2$. Bovendien geldt voor elke elementaire deelgraaf ω_i dat het aantal samenhangscomponenten $comp(\omega_i)$ gelijk is aan $N_e + N_o$. We concluderen nu dat:

$$\text{sgn}(\omega_i) = (-1)^{N_e} = (-1)^{(N_e + n + N_o)} = (-1)^{n + comp(\omega_i)}. \quad (5)$$

Als we 4 en 5 combineren vinden we het gewenste resultaat. Hiermee is het lemma van Harary bewezen. \square

Lemma 5.22. *Laat $G = (V, E)$ een graaf zijn met bijbehorend karakteristiek polynoom $P_G(t) = c_0 t^n + c_1 t^{n-1} + c_2 t^{n-2} + \dots + c_{n-1} t + c_n$. Dan geldt voor elke $i \in \{1, \dots, n\}$ dat:*

$$(-1)^i c_i = \sum_{\omega_i \in \Omega_G} (-1)^{\text{comp}(\omega_i)} 2^{\text{cyc}(\omega_i)},$$

waar de som loopt over de elementaire deelgrafen van G met i knopen.

Bewijs. We hebben in Propositie 10 al gezien dat $(-1)^i c_i = \sum_{M_i} \det(M_i)$, waar de som loopt over alle hoofdminoren M_i van A_G van grootte i . Elke term in deze som is de determinant van een bogenmatrix A_H van een deelgraaf H van G met i knopen. Elke elementaire deelgraaf van G met i knopen zit precies in één van deze deelgrafen. Als we nu Lemma 5.21 toepassen op elke hoofdminor, hebben we het lemma bewezen. \square

5.4 Stelling van Godsil en Gutman

Stelling 5.23. *(C. Godsil, I. Gutman, 1981) Laat $G = (V, E)$ een graaf zijn met bijbehorend acyclisch polynoom $A_G(x) = \sum_{k=0}^{n/2} (-1)^k m_k(G) x^{n-2k}$ en karakteristiek polynoom $P_G(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^{n-k}$. Laat verder $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ de verzameling elementaire deelgrafen van G zijn die alleen uit cykels bestaan, dus C is de verzameling van 2-reguliere deelgrafen van G . Dan geldt het volgende:*

$$P_G(x) = A_G(x) + \sum_{C \neq \emptyset} (-2)^{\text{comp}(C)} A_{G-C}(x), \quad (6)$$

waarbij $G - C$ de graaf G is met daaruit weggelaten alle knopen van C .

Bewijs. Uit lemma 5.22 vinden we dat:

$$P_G(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^{n-i} = \sum_{i=0}^n \sum_{\omega_i \in \Omega_G} (-1)^{\text{comp}(\omega_i)} 2^{\text{cyc}(\omega_i)} x^{n-i}.$$

We kunnen Ω nu opsplitsen in de ω 's die dezelfde verzameling cykels bevatten. Laat C zo'n verzameling cykels zijn. Laat nu $\gamma_j = \omega_j - C$. Dan is γ_j de verzameling van disjuncte lijnen in ω_j , want alle cykels zijn weggehaald en elke ω_j was een elementaire graaf. Laat $|C|$ het aantal knopen in C zijn, dan geldt bovendien dat:

$\text{cyc}(\omega_j) = \text{comp}(C)$, $\text{comp}(\omega_j) = \text{comp}(C) + \text{comp}(\gamma_j)$ en $i = |C| + 2\text{comp}(\gamma_j)$.

We kunnen dus schrijven:

$$\begin{aligned} P_G(x) &= \sum_{i=0}^n \sum_{\omega_i \in \Omega_G} (-1)^{\text{comp}(\omega_i)} 2^{\text{cyc}(\omega_i)} x^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_C \sum_{\gamma_j} (-1)^{\text{comp}(C) + \text{comp}(\gamma_j)} 2^{\text{comp}(C)} x^{n-i} \\ &= \sum_C (-1)^{\text{comp}(C)} 2^{\text{comp}(C)} \sum_{i=0}^n \sum_{\gamma_j} (-1)^{\text{comp}(\gamma_j)} x^{n-i} \\ &= \sum_C (-2)^{\text{comp}(C)} \sum_{\text{comp}(\gamma_j)=0}^{n-|C|} \sum_{\gamma_j} (-1)^{\text{comp}(\gamma_j)} x^{(n-|C|-2\text{comp}(\gamma_j))} \\ &= \sum_C (-2)^{\text{comp}(C)} A_{G-C}(x) \\ &= A_G(x) + \sum_{C \neq \emptyset} (-2)^{\text{comp}(C)} A_{G-C}(x). \end{aligned}$$

□

Gevolg 5.24. Als $G = (V, E)$ een bos is geldt voor de coëfficiënten van het karakteristiek polynoom $P_G(x)$:

$$c_i = \begin{cases} m_{\frac{i}{2}} & \text{als } i \text{ even is} \\ 0 & \text{als } i \text{ oneven is.} \end{cases}$$

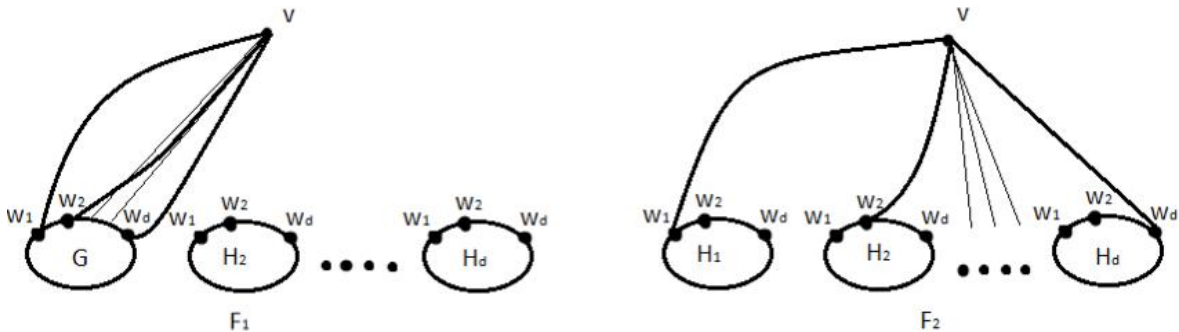
Stelling 5.25. (C.Godsil en I.Gutman 1981) Het acyclisch polynoom van een graaf G is gelijk aan het karakteristiek polynoom van de graaf dan en slechts dan als de graaf G een bos is.

Bewijs. Voor een graaf zonder cyclen volgt uit stelling 5.23 dat het karakteristiek polynoom gelijk is aan het acyclisch polynoom. De eerste implicatie volgt dus direct uit Stelling 5.23. Voor de tweede implicatie laten we zien dat voor een graaf G met cyclen geldt: $A_G(x) \neq P_G(x)$. Stel dat G geen bos is, laat $c = (v_1, \dots, v_k, v_1)$ de kleinste cykel van G zijn. We mogen aannemen dat er $p \geq 1$ cyclen $\{c_1, \dots, c_p\}$ van lengte k zijn in G . Laat c_i en m_i de coëfficiënten zijn van x^{n-i} in respectievelijk het acyclisch en karakteristiek polynoom. We laten zien dat de tweede term in vergelijking 6 ongelijk is aan 0 voor de coëfficiënt van x^k . We merken op dat alleen de som over alle $C \in \{c_1, \dots, c_p\}$ meetelt voor de coëfficiënt van x^{n-k} , want alle andere cyclen en cykel-combinaties zijn groter. Voor elke cykel $c_i \in \{c_1, \dots, c_p\}$ is er precies één 0-matching en dus telt elke cykel precies (-2) keer mee voor de coëfficiënt van x^{n-k} . Hieruit volgt dat $c_k = a_k - 2p \neq 0$ en vervolgens dat het acyclisch polynoom ongelijk is aan het karakteristiek polynoom. □

5.5 Nulpunten van het acyclisch polynoom

Lemma 5.26. Laat $G = (V, E)$ een graaf zijn met $v \in V$ en $\deg(v) = d$. Laat H_1 de deelgraaf van G zijn zonder de knoop v . Laat H_2, \dots, H_d allemaal isomorf zijn aan de graaf H_1 . Laat $F_1 = G \cup H_2 \cup \dots \cup H_d$. Laat $w_i(H_i)$ de knoop $w_i \in H_i$ zijn die correspondeert met de knoop $w_i \in H_1$. Laat F_2 de graaf zijn die knoop v verbindt met de knopen $w_1(H_1), \dots, w_d(H_d)$ in de graaf $H_1 \cup \dots \cup H_d$. Dan geldt:

$$A_{F_1}(x) = A_{F_2}(x).$$



Figuur 11: Graaf F_1 en F_2

Bewijs. We gebruiken voor $A_{F_1}(x)$ de recursie op knopen uit Gevolg 4.11, samen met Gevolg 4.7 (voor disjuncte grafen is het acyclisch polynoom een homomorfisme). Als we de recursie toepassen op knoop v volgt:

$$\begin{aligned} A_{F_1}(x) &= A_G(x)A_{H_2}(x) \cdots A_{H_d}(x) \\ &= A_{H_2}(x) \cdots A_{H_d}(x) \left(xA_{H_1}(x) - \sum_{i=1}^d A_{H_1-w_i}(x) \right). \end{aligned}$$

Met eenzelfde argument vinden we dat voor $A_{F_2}(x)$ geldt:

$$A_{F_2}(x) = xA_{H_1}(x) \cdots A_{H_d}(x) - \left(\sum_{i=1}^d A_{H_i-w_i(H_i)}(x) \prod_{j=1, j \neq i}^d A_{H_j}(x) \right) \quad (7)$$

$$= xA_{H_1}(x) \cdots A_{H_d}(x) - \left(A_{H_1}(x) \cdots A_{H_d}(x) \sum_{i=1}^d \frac{A_{H_i-w_i(H_i)}}{A_{H_i}(x)} \right). \quad (8)$$

Om het lemma te bewijzen gebruiken we twee extra eigenschappen. Allereerst weten we dat alle H_i isomorf zijn, dus $A_{H_i}(x) = A_{H_j}(x)$ voor alle $i, j \in \{1, \dots, d\}$. Verder gebruiken we het gegeven dat $A_{H_1-w_i}(x) = A_{H_i-w_i(H_i)}(x)$ voor elke $i \in \{1, \dots, d\}$. Als we deze twee relaties invullen in vergelijkingen 7 en 8 concluderen we dat:

$$\begin{aligned} A_{F_2}(x) &= xA_{H_1}(x)^d - dA_{H_1}(x)^{d-1}(x)A_{H_1-w_1}(x) \\ &= A_{H_1}(x)^{d-1} \left(xA_{H_1}(x) - dA_{H_1-w_1}(x) \right) = A_{F_1}(x). \end{aligned}$$

□

Gevolg 5.27. Voor elke graaf $G = (V, E)$ is er een acyclische graaf F zodanig dat $A_G(x)$ een deler is van $A_F(x)$.

Er geldt dat $A_G(x)$ een deler is van $A_{F_1}(x)$ en dus ook van $A_{F_2}(x)$, met F_1 en F_2 als in bewijs van Lemma 5.26. Als we Lemma 5.26 herhaaldelijk toepassen op de knopen $w_i(H_i)$ krijgen we een bos F_n zodanig dat $A_{F_n}(x) = A_{F_1}(x)$. Op deze manier vinden we een bos F_n zodanig dat $A_G(x)$ een deler is van $A_F(x)$.

Gevolg 5.28. De nulpunten van het acyclisch polynoom zijn reëel en symmetrisch rond 0.

Bewijs. Dat de nulpunten reëel zijn volgt direct uit Gevolg 5.27 en Lemma 5.8. We merken verder op dat het karakteristiek polynoom alleen maar even, of alleen maar oneven coëfficiënten heeft. In het eerste geval vinden we dat $A_G(X) = A_G(-x)$ en in het tweede geval vinden we dat $A_G(-x) = -A_G(x)$ in beide gevallen geldt:

$$A_G(x) = 0 \iff A_G(-x) = 0.$$

Hieruit volgt dat de nulpunten van het acyclisch polynoom symmetrisch zijn rond 0. □

6 De matrixbenadering van acyclische polynomen

Tot nu toe hebben we gekeken hoe we voor een gegeven graaf G het acyclisch polynoom kunnen bepalen en hebben we enkele eigenschappen van het acyclisch polynoom behandeld. Een interessante vraag is of we andersom ook iets kunnen zeggen. Voor welke polynomen $P(x)$ bestaat er een graaf waarvan $P(x)$ het acyclisch polynoom is? Hier zullen we in dit hoofdstuk naar kijken. Dit zullen we doen door te kijken naar de matching matrix.

6.1 De d -functie van een graaf

Definitie 6.1. Laat G een graaf zijn met n knopen die we labelen van $1, \dots, n$ dan definiëren we de $n \times n$ -*matching matrix* van G als volgt:

$$a_{ij} = \begin{cases} x & \text{als } i = j \\ 0 & \text{als } i \text{ en } j \text{ niet verbonden zijn in } G \text{ en } i \neq j \\ \sqrt{-1} & \text{als } i < j \text{ en } i \text{ en } j \text{ verbonden in } G \\ -\sqrt{-1} & \text{als } i > j \text{ en } i \text{ en } j \text{ verbonden in } G. \end{cases}$$

We zullen in het vervolg de matching matrix van een graaf G aanduiden met $M(G)$. Uit de definitie volgt dat $a_{ij} = -a_{ji}$ voor alle $i \neq j$. Verder merken we op dat $M(G)$ uniek is op de permutatie van rijen en kolommen na. Uit de definitie volgt onmiddellijk dat als $M(G)$ een matching matrix van een graaf G is, dat dan $M(G - i)$, de matrix zijn die ontstaat als we rij i en kolom i verwijderen, een matching matrix is van de graaf $G - i$.

Lemma 6.2. Voor elke graaf G met minder dan vier knopen geldt: $A_G(x) = \det(M(G))$

Bewijs. Om dit lemma te bewijzen zullen we alle gevallen af gaan. We schrijven nu i als het complexe getal $\sqrt{-1}$.

- **geval 1: De graaf G heeft één knoop**

Het is triviaal dat $A_G(x) = x$ en er geldt ook triviaal dat de matching matrix de waarde x oplevert en de determinant is in dit geval ook gelijk aan x .

- **geval 2: De graaf heeft twee knopen**

In het geval dat G twee knopen heeft zijn er twee mogelijkheden voor de graaf G . Ofwel de knopen zijn verbonden ofwel ze zijn niet verbonden. We hebben dus de grafen K_2 en $\overline{K_2}$.

geval 2.1: De knopen zijn verbonden ($G = K_2$)



Figuur 12: De graaf K_2 met matching matrix $M(K_2)$

We zien eenvoudig dat de determinant van de matching matrix gelijk is aan $x^2 - 1$ en het acyclisch polynoom $A_{K_2}(x)$ is ook gelijk aan $x^2 - 1$.

geval 2.2: De knopen zijn niet verbonden ($G = \overline{K_2}$)



Figuur 13: De graaf $\overline{K_2}$ met matching matrix $M(\overline{K_2})$

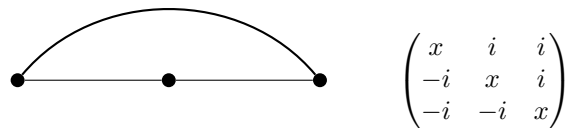
Voor $G = \overline{K_2}$ geldt dat het acyclisch polynoom gelijk is aan x^2 . We hebben namelijk in Hoofdstuk 5 gezien dat het acyclisch polynoom van een lege graaf op n punten gelijk is aan x^n . De determinant van $M(\overline{K_2})$ is ook gelijk aan x^2 .

Dus voor alle grafen met 2 punten geldt dat $A_G(x) = \det(M(G))$.

• **geval 3: De graaf G heeft drie knopen**

We kijken nu naar alle grafen G met drie knopen. We vinden de volgende vier grafen met drie knopen: K_3 , P_3 , $K_2 \cup K_1$ en $\overline{K_3}$.

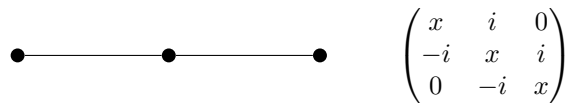
geval 3.1: Alle knopen zijn verbonden ($G = K_3$)



Figuur 14: De graaf K_3 met matching matrix $M(K_3)$

Er geldt dat de determinant van $M(K_3)$ gelijk is aan $x^3 - 3x$. En ook het acyclisch polynoom $A_{K_3}(x) = x^3 - 3x$.

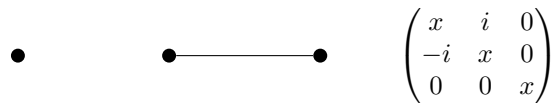
geval 3.2: De knopen zijn verbonden met een pad ($G = P_3$)



Figuur 15: De graaf P_3 met matching matrix $M(P_3)$

Deze heeft determinant $x^3 - 2x$ en ook hier is het acyclisch polynoom $A_{P_3}(x) = x^3 - 2x$ gelijk aan de determinant van de matching matrix.

geval 3.3: Er zijn twee knopen verbonden ($G = K_2 \cup K_1$)



Figuur 16: De graaf $K_2 \cup K_1$ met matching matrix $M(K_2 \cup K_1)$

Als derde graaf hebben we de graaf met één lijn en één onverzadigd punt. We vinden de matching matrix met determinant $x^3 - x$ en zien dat het acyclisch polynoom gelijk is aan de determinant van de matching matrix, namelijk $A_{P_3}(x) = x^3 - x$.

geval 3.4: De knopen zijn niet verbonden ($G = \overline{K_3}$)



Figuur 17: De graaf $\overline{K_3}$ met matching matrix $M(\overline{K_3})$

Als vierde en laatste graaf met drie knopen hebben we de lege graaf. Deze heeft als acyclisch polynoom x^3 en de determinant van de matching matrix is ook in dit geval gelijk aan het acyclisch polynoom. We zien dus dat ook voor elke graaf met drie knopen het acyclisch polynoom gelijk is aan de determinant van de matching matrix. Dus voor alle grafen met minder dan vier knopen is het acyclisch polynoom gelijk aan de determinant van de matching matrix en daarmee is dit lemma bewezen. □

Definitie 6.3. Laat G een graaf zijn en $M(G)$ een bijbehorende matching matrix. We definiëren nu de d -functie, $d : G \rightarrow \mathbb{Z}[x]$, op de graaf G als volgt:

$$d(G) = \begin{cases} 0 & \text{als } \deg(G)=0 \\ \det(M(G)) & \text{als } 0 < \text{ord}(G) \leq 3 \\ xd(G - v_i) - \sum_{(v_i, v_j) \in E(G)} d(G - v_i - v_j) & \text{als } \text{ord}(G) > 3. \end{cases}$$

Hier is $(G - v_i)$ de graaf die we krijgen door rij i en kolom i te elimineren uit de graaf G .

Stelling 6.4.

$$d(G) = A_G(x).$$

Bewijs. We zullen de stelling bewijzen met inductie naar n , het aantal knopen van de graaf G . Als $n = 1$ volgt de stelling direct uit de definitie van $d(G)$ en het gegeven dat $M(K_1) = 1$. Als $n = 2$ of $n = 3$ volgt de stelling uit Lemma 6.2. Stel nu dat de stelling waar is voor alle grafen met minder dan n knopen, uit Lemma 4.11 vinden we:

$$A_G(x) = xA_{G-v}(x) - \sum_{i=1}^m A_{G-v-u_i}(x). \quad (9)$$

De graaf $G - v$ heeft nu $n - 1$ knopen en de graaf $G - v - u_i$ heeft $n - 2$ knopen voor alle burens u_i van v . Er geldt vanwege de inductie hypothese dat: $d(G - v) = A_{G-v}(x)$ en $d(G - v - u_i) = A_{G-v-u_i}(x)$. Als we dit in vergelijking (9) invullen, vinden we dat:

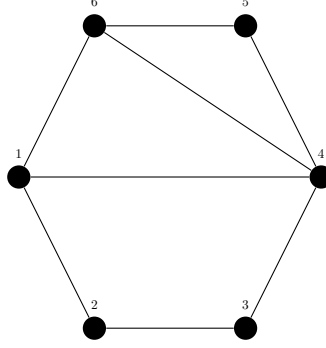
$$\begin{aligned} A_G(x) &= xA_{G-v}(x) - \sum_{i=1}^m A_{G-v-u_i}(x) \\ &= xd(G - v) - \sum_{(v, u_i) \in E(G)} d(G - v - u_i) = d(G). \end{aligned}$$

En dus geldt de stelling met inductie voor alle grafen. □

Gevolg 6.5. De d -functie is invariant onder het labelen van de knopen. Dit volgt onmiddellijk uit het gegeven dat het acyclisch polynoom invariant is onder het nummeren van de knopen en het feit dat de d -functie gelijk is aan het acyclisch polynoom.

6.2 Acyclisch polynoom van een graaf met behulp van de matching matrix

Met de d -functie kunnen we het acyclisch polynoom bepalen van een graaf G . We zullen als voorbeeld het acyclisch polynoom van de graaf G uit ons voorbeeld in hoofdstuk 3 (zie figuur 18) op deze manier bepalen.



Figuur 18: Graaf G

$$\begin{aligned}
 A_G(x) &= xd(G - v_i) - \sum_{(v_i, v_j) \in E(G)} d(G - v_i - v_j) = xd(G - v_2) - \sum_{(v_2, v_j) \in E(G)} d(G - v_2 - v_j) \\
 &= xd(G - v_2) - d(G - v_2 - v_3) - d(G - v_2 - v_1) \\
 &= x \left(xd(G - v_2 - v_5) - d(G - v_2 - v_4 - v_5) - d(G - v_2 - v_5 - v_6) \right) \\
 &\quad - \left(xd(G - v_2 - v_3 - v_5) - d(G - v_2 - v_3 - v_4 - v_5) - d(G - v_2 - v_3 - v_5 - v_6) \right) \\
 &\quad - \left(xd(G - v_2 - v_1 - v_5) - d(G - v_2 - v_1 - v_4 - v_5) - d(G - v_2 - v_1 - v_5 - v_6) \right) \\
 &= x \left(xd(G - v_2 - v_5) - (x^3 - x) - (x^3 - 2x) \right) - \left(x(x^3 - 3x) - (x^2 - 1) - (x^2 - 1) \right) \\
 &\quad - \left(x(x^3 - 2x) - x^2 - (x^2 - 1) \right) \\
 &= x \left(x \left(xd(G - v_2 - v_5 - v_3) - d(G - v_2 - v_5 - v_3 - v_4) \right) - (2x^3 - 3x) \right) \\
 &\quad - \left(x^4 - 5x^2 + 2 \right) - \left(x^4 - 4x^2 + 1 \right) \\
 &= x \left(x \left(x(x^3 - 3x) - (x^2 - 1) \right) - (2x^3 - 3x) \right) - \left(x^4 - 5x^2 + 2 \right) - \left(x^4 - 4x^2 + 1 \right) \\
 &= x \left(x(x^4 - 4x^2 + 1) - (2x^3 - 3x) \right) - \left(x^4 - 5x^2 + 2 \right) - \left(x^4 - 4x^2 + 1 \right) \\
 &= x \left(x^5 - 4x^3 + x \right) - (2x^3 - 3x) - \left(x^4 - 5x^2 + 2 \right) - \left(x^4 - 4x^2 + 1 \right) \\
 &= \left(x^6 - 6x^4 + 4x^2 \right) - \left(x^4 - 5x^2 + 2 \right) - \left(x^4 - 4x^2 + 1 \right) \\
 &= x^6 - 8x^4 + 13x^2 - 3.
 \end{aligned}$$

We hebben dus nu met behulp van de d -functie het acyclisch polynoom van de graaf G bepaald. Als we goed kijken zien we dat deze methode eigenlijk identiek is aan het elimineren van knopen. Maar het voordeel van de matching matrix en d -functie is dat we met behulp van de matching matrix ook kunnen kijken of er andere grafen zijn met hetzelfde matching polynoom. We kunnen dus alle co-matching grafen van een graaf bepalen.

6.3 Co-matching grafen met behulp van de matching matrix

Tot nu toe hebben we alleen maar gekeken hoe we van een graaf G het acyclisch polynoom kunnen bepalen. Maar stel nu dat we een polynoom $P(x)$ hebben en willen weten of er grafen G zijn waarvan het polynoom $P(x)$ het acyclisch polynoom is, kan dat? En als er een graaf is met acyclisch polynoom $A_G(x)$, is deze graaf matching uniek? Om deze twee problemen op te lossen gebruiken we weer de d -functie van de graaf. Als we een gegeven polynoom $P(x)$ hebben van graad n , dan construeren we een bijbehorende n -bij- n matrix als volgt. We lossen vervolgens het stelsel vergelijkingen wat we vinden op om alle grafen te vinden bij een gegeven acyclisch polynoom. Als voorbeeld gaan we op zoek naar alle grafen met acyclisch polynoom $x^5 - 6x^3 - 5x$.

$$\begin{pmatrix} x & ia_{12} & ia_{13} & ia_{14} & ia_{15} \\ -ia_{12} & x & ia_{23} & ia_{24} & ia_{25} \\ -ia_{13} & -ia_{23} & x & ia_{34} & ia_{35} \\ -ia_{14} & -ia_{24} & -ia_{34} & x & ia_{45} \\ -ia_{15} & -ia_{25} & -ia_{35} & -ia_{45} & x \end{pmatrix}$$

Figuur 19: De matching matrix van een 5-bij-5 graaf

We berekenen nu het acyclisch polynoom van deze matrix met behulp van de d -functie.

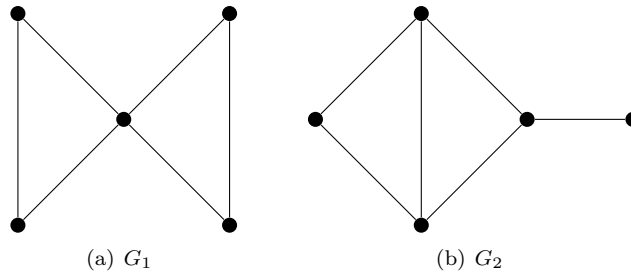
$$\begin{aligned} A_G(x) &= xd(G - v_1) - \sum_{j=2}^5 d(G - v_1 - v_j)a_{1j} \\ &= x \left(xd(G - v_1 - v_2) - \sum_{k=3}^5 d(G - v_1 - v_2 - v_k)a_{2k} \right) - \sum_{j=2}^5 \left(d(G - v_1 - v_j)a_{1j} \right) \\ &= x^5 - (a_{34} + a_{35} + a_{45})x^3 - x \left(a_{23}(x^2 - a_{45}^2) \right) - x \left(a_{24}(x^2 - a_{35}^2) \right) - x \left(a_{25}(x^2 - a_{34}^2) \right) \\ &\quad - a_{12} \left(x^3 - (a_{34} + a_{35} + a_{45})x \right) - a_{13} \left(x^3 - (a_{24} + a_{25} + a_{45})x \right) \\ &\quad - a_{14} \left(x^3 - (a_{23} + a_{25} + a_{35})x \right) - a_{15} \left(x^3 - (a_{23} + a_{24} + a_{34})x \right) \\ &= x^5 - \sum_{i=1}^4 \sum_{j=i+1}^5 a_{ij}x^3 + \left(a_{12}a_{34} + a_{12}a_{35} + a_{12}a_{45} + a_{13}a_{24} + a_{13}a_{25} + a_{13}a_{45} \right. \\ &\quad \left. + a_{14}a_{23} + a_{14}a_{25} + a_{14}a_{35} + a_{15}a_{23} + a_{15}a_{24} + a_{15}a_{34} + a_{23}a_{45} + a_{24}a_{35} + a_{25}a_{34} \right)x \end{aligned}$$

Als we alle grafen zoeken die acyclisch polynoom $x^5 - 6x^3 - 5x$ hebben krijgen we de volgende twee

vergelijkingen.

$$\begin{aligned} & \left(a_{12}a_{34} + a_{12}a_{35} + a_{12}a_{45} + a_{13}a_{24} + a_{13}a_{25} + a_{13}a_{45} + a_{14}a_{23} + a_{14}a_{25} \right. \\ & \quad \left. + a_{14}a_{35} + a_{15}a_{23} + a_{15}a_{24} + a_{15}a_{34} + a_{23}a_{45} + a_{24}a_{35} + a_{25}a_{34} \right) = 5 \\ & \left(a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{23} + a_{24} + a_{25} + a_{34} + a_{35} + a_{45} \right) = 6, \end{aligned}$$

waarbij $a_{ij} \in \{0, 1\}$ voor alle i en j . Met enig rekenwerk vinden we dat er vijftig oplossingen zijn voor dit stelsel vergelijkingen. We gaan ook eenvoudig na dat er 35 bogenmatrixen zijn voor de graaf G_1 en 15 bogenmatrixen voor de graaf G_2 . Hieruit volgt dat er maar twee niet-isomorfe grafen zijn met acyclisch polynoom $x^5 - 6x^3 - 5x$. We merken op dat voor grotere grafen het berekenen en oplossen van dit stelsel vergelijkingen geen makkelijke opgaven is. Een snellere methode om alle co-matchingen grafen te vinden is er tot op heden echter niet gevonden. Mocht er een snellere methode gevonden worden dan zou dit een hele grote ontwikkeling zijn in de matchingtheorie.



Figuur 20: De enige twee grafen bij het acyclisch polynoom $x^5 - 6x^3 - 5x$

Referenties

- [1] A.S. Shanthi *Springer, Berge–Fulkerson Conjecture on Certain Snarks, Basel, 2015*
- [2] Giuseppe Mazzuocolo 2011, *Wiley Periodicals, Inc. J Graph Theory* 68, 125–128,
- [3] E.J. Farrell *Journal of Combinatorial Theory, Series B Volume 27, Issue 1, August 1979, 75-86*
- [4] Nenad Trinajstić 1972, "Graph theory and molecular orbitals", *Chemical Physics Letters*.
- [5] Nenad Trinajstić 1975, *Graph Theory and Molecular Orbitals, Am. Chem. Soc. 99 (6):1692-1704*
- [6] R.A. Brualdi *Introductory Combinatorics, 1977*
- [7] K.Hoffman, R. Kunze *linear algebra, second edition, PRENTICE-HALL, INC., Englewood Cliffs, New Jersey, 140-219*
- [8] E.J. Farrell en S.A. Wahid *Matching Polynomials: A Matrix Approach and its Applications, Department of Mathematics, University of the West Indies, St. Augustine, Trinidad, 1986*
- [9] I. Gutman en H. Hosoya. *On the calculation of the acyclic polynomial, Theoretica Chimica Acta, Springer-Verlag 1978*
- [10] A. Bondy en U.S.R. Murthy *Graph theory, Springer, 2008*
- [11] C. Godsil *Algebraic Combinatorics, Chapman and Hall, 1993*