

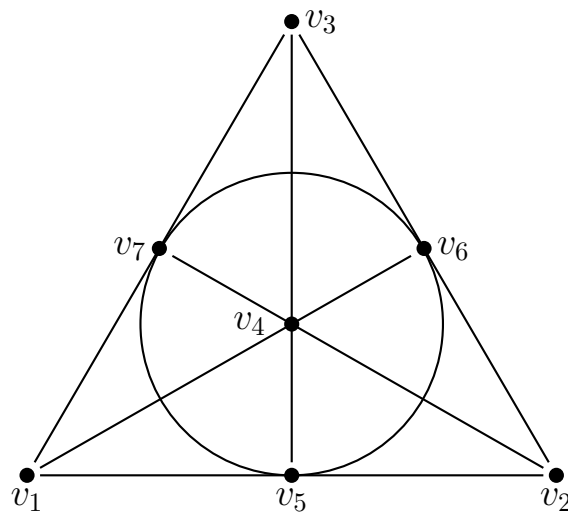
Radboud Universiteit Nijmegen



Bachelorscriptie
Wiskunde

Hypergrafen

Een generalisatie van een graaf.



Lotte Robben

Studentnummer: s4787471

Scriptiebegeleiders: dr. W. Bosma
MSc. ME.d S.J.C.E. van Boven

2 augustus 2020

Abstract

Deze bachelorscriptie over hypergrafen is geschreven in de vorm van een module over hypergrafen die bedoeld is voor leerlingen in 5 of 6 vwo van de middelbare school en andere geïnteresseerden. In de inleiding wordt het onderwerp geïntroduceerd en aan de hand van de definitie van grafen. In het tweede hoofdstuk komen verschillende definities met betrekking tot grafen en hypergrafen aan de orde. In het laatste hoofdstuk staat de kleurbaarheid van hypergrafen centraal. Bovendien zijn er in deze module opgaves met uitwerkingen verspreid over de hoofdstukken. Ook zijn er ter verduidelijking afbeeldingen van voorstellingen van zowel grafen als hypergrafen toegevoegd.

Inhoudsopgave

Voorwoord	4
1 Inleiding	5
2 Voorstelling van hypergrafen	10
2.1 Verschillende hypergrafen	10
2.2 Samenhangende hypergrafen	16
2.3 Deelhypergrafen en isomorfie	22
3 Kleurbaarheid van hypergrafen	34
4 Referenties	41
5 Reflectie	42
Bijlage: Betekenis van wiskundige symbolen	43

Voorwoord

Deze bachelorscriptie is geschreven in de vorm van een module over hypergrafen. De hoeveelheid leerstof in deze module is geschikt voor een lessenreeks over hypergrafen. Het niveau van deze module sluit aan bij leerlingen in 5 of 6 vwo van de middelbare school. Maar ook andere geïnteresseerden kunnen gebruik maken van deze module over hypergrafen. Voorkennis over grafentheorie is onmisbaar bij het gebruik van deze module. Ook kan kennis over kansberekening van pas komen bij het uitwerken van enkele opgaves. Verder is affiniteit met wiskundige bewijzen gewenst bij bepaalde opgaves in deze module.

In deze module zijn er opgaves verspreid over de verschillende hoofdstukken, zodat leerlingen en andere gebruikers de leerstof over hypergrafen tot zich kunnen nemen. Bovendien zijn er in deze module diversen voorbeelden van voorstellingen van zowel grafen als hypergrafen toegevoegd, om de leerstof voor leerlingen en andere gebruikers te visualiseren. Verder is er als bijlage een lijst toegevoegd met daarin de betekenis van de gebruikte wiskundige symbolen met een simpel voorbeeld. Deze module wordt afgesloten met een toepassing van hypergrafen, zodat het onderwerp aansluit bij de belevingswereld van leerlingen en andere gebruikers.

Grafen en hypergrafen worden hoofdzakelijk gebruikt bij het analyseren van netwerken. We kunnen bij verschillende toepassingen gebruik maken van hypergrafen. In bepaalde netwerken is het functioneel om hypergrafen te gebruiken in plaats van grafen. Hypergrafen worden bijvoorbeeld gebruikt in de psychologie bij het bestuderen van sociale netwerken. Hypergrafen worden ook gebruikt voor biologische modellen van bijvoorbeeld eiwitten of genen. Daarnaast worden hypergrafen gebruikt voor representaties van moleculaire structuren. Hypergrafen worden ook gebruikt bij het bepalen van een conflictvrije kleuring, dit is een voorbeeld van een combinatorisch optimaliseringsprobleem.

Een toepassing van een conflictvrije kleuring in een mobiel netwerk is het frequentietoewijzing probleem. Een mobiel netwerk bestaat uit meerdere zendmasten met een bepaalde frequentie. Als een gebruiker van het netwerk binnen het bereik van verschillende zendmasten is, dan zijn er al deze zendmasten beschikbaar voor de communicatie. De communicatie kan op deze manier verstoord worden door interferentie, als meerdere zendmasten dezelfde frequentie gebruiken. We kunnen interferentie voorkomen door de zendmasten allemaal een eigen frequentie te geven, maar we willen het aantal frequenties minimaliseren.

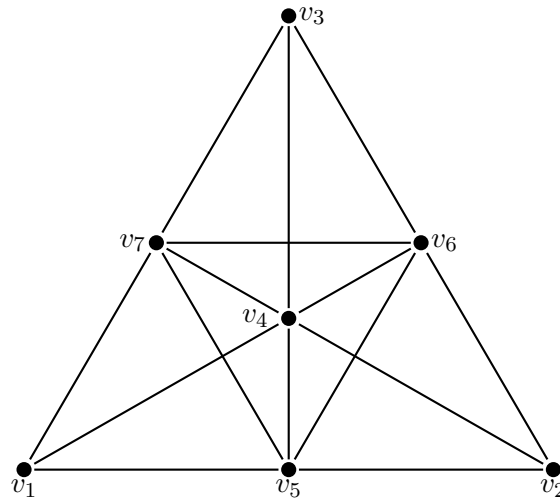
1 Inleiding

Voorstellingen van grafen zijn afbeeldingen die bestaan uit punten en lijnstukken of krommen. Deze afbeeldingen zijn toepasbaar bij het analyseren van problemen uit de grafentheorie. Figuur 1.1 is een voorstelling van een graaf. Een graaf wordt bepaald door de punten en de lijnen, het is daarbij alleen van belang of er een lijn loopt tussen bepaalde paren punten en niet hoe deze lijn getekend is. Dus het is vanzelfsprekend dat de lijnstukken of krommen in een graaf elkaar mogen snijden. In de wiskunde worden grafen natuurlijk op een meer formele manier gedefinieerd.

Definitie 1.1. Een *graaf* G is een paar $G = (V, E)$ met V een willekeurige niet-lege eindige verzameling en E een verzameling van paren uit V . De elementen van V noemen we de *knopen* van G en de elementen van E noemen we de *kanten* van G .

We gebruiken de volgende notatie voor de graaf in Figuur 1.1:

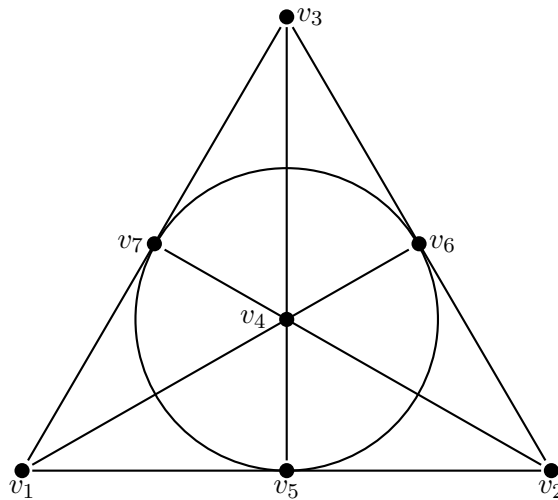
$$(\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}, \{\{v_1, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \{v_1, v_7\}, \{v_2, v_4\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_6\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_6\}, \{v_3, v_7\}, \{v_4, v_5\}, \{v_4, v_6\}, \{v_4, v_7\}, \{v_5, v_6\}, \{v_5, v_7\}, \{v_6, v_7\}\})$$



Figuur 1.1: Een voorbeeld van een graaf die bestaat uit 7 knopen v_1, \dots, v_7 en 15 kanten e_1, \dots, e_{15} . $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ en $E = \{e_1, e_2, \dots, e_{14}, e_{15}\} = \{\{v_1, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \{v_1, v_7\}, \{v_2, v_4\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_6\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_6\}, \{v_3, v_7\}, \{v_4, v_5\}, \{v_4, v_6\}, \{v_4, v_7\}, \{v_5, v_6\}, \{v_5, v_7\}, \{v_6, v_7\}\}$.

De afbeelding op de titelpagina komt overeen met Figuur 1.2, deze afbeelding vertoont veel overeenkomsten met Figuur 1.1. Het enige waarneembare verschil tussen deze twee afbeeldingen is de manier waarop de kanten $e_{13} = \{v_5, v_6\}$, $e_{14} = \{v_5, v_7\}$ en $e_{15} = \{v_6, v_7\}$ zijn getekend. Eigenlijk zou dit dezelfde graaf moeten zijn, aangezien een graaf wordt bepaald door het

aantal knopen en de knopen die verbonden zijn door een kant. Dit is echter een uitzondering, de afbeelding in Figuur 1.2 heet het Fano-vlak, dit is het kleinste projectieve vlak in de eindige meetkunde. Dit bijzondere projectieve vlak bestaat uit 7 knopen $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$ en 7 kanten $x_1 = \{v_1, v_2, v_5\}$, $x_2 = \{v_1, v_3, v_7\}$, $x_3 = \{v_1, v_4, v_6\}$, $x_4 = \{v_2, v_3, v_6\}$, $x_5 = \{v_2, v_4, v_7\}$, $x_6 = \{v_3, v_4, v_5\}$, $x_7 = \{v_5, v_6, v_7\}$. Het Fano-vlak is een hypergraaf, omdat de (hyper)kanten uit een willekeurig aantal knopen bestaan en de kanten in een ‘gewone’ graaf twee knopen verbinden. We gebruiken over het algemeen de letter X voor de verzameling (hyper)kanten in een hypergraaf in plaats van de letter E , zoals bij ‘gewone’ grafen. Wie zien in Figuur 1.2 dat alle kanten uit 3 knopen bestaan, daarom wordt het Fano-vlak een 3-uniforme hypergraaf genoemd. Een ‘gewone’ graaf zonder lussen komt dus overeen met een 2-uniforme hypergraaf. Over het algemeen wordt het Fano-vlak afgebeeld zoals in Figuur 1.2, wij zullen echter een andere notatie gebruiken om verschillende interpretaties van grafen en hypergrafen te voorkomen.



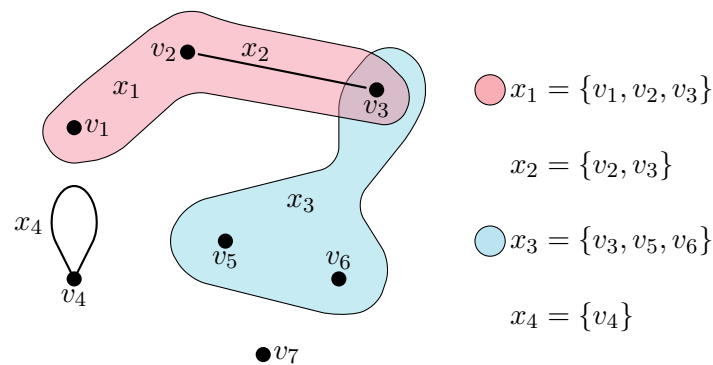
Figuur 1.2: Het Fano-vlak is een voorbeeld van een hypergraaf met 7 knopen v_1, \dots, v_7 en 7 kanten x_1, \dots, x_7 . $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ en $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\} = \{\{v_1, v_2, v_5\}, \{v_1, v_3, v_7\}, \{v_1, v_4, v_6\}, \{v_2, v_3, v_6\}, \{v_2, v_4, v_7\}, \{v_3, v_4, v_5\}, \{v_5, v_6, v_7\}\}$.

In Figuur 1.3 zien we een hypergraaf met 7 knopen en 4 kanten. De kanten x_1 en x_3 bestaan beide uit 3 knopen, deze kanten zijn beide getekend als een kromme die de 3 knopen omcirkelt. De kant x_2 bestaat uit 2 knopen, deze kant is getekend als een lijnstuk. De kant x_4 bestaat uit 1 knoop, deze kant noemen we een lus, omdat deze knoop alleen met zichzelf is verbonden. Een lus tekenen we op dezelfde manier als in een ‘gewone’ graaf.

Dus we gebruiken voortaan de volgende notatie voor de (hyper)kanten in een hypergraaf:

- De kanten die uit 1 knoop bestaan ($|x_i| = 1$ met $x_i \in X$), worden getekend als een lus net zoals in een ‘gewone’ graaf.
- Dus kanten die uit 2 knopen bestaan ($|x_i| = 2$ met $x_i \in X$), tekenen we als een lijnstuk of kromme die deze 2 knopen verbindt.
- De kanten die uit meer dan 2 knopen bestaan ($|x_i| > 2$ met $x_i \in X$), tekenen we als een kromme die deze knopen omcirkeld.

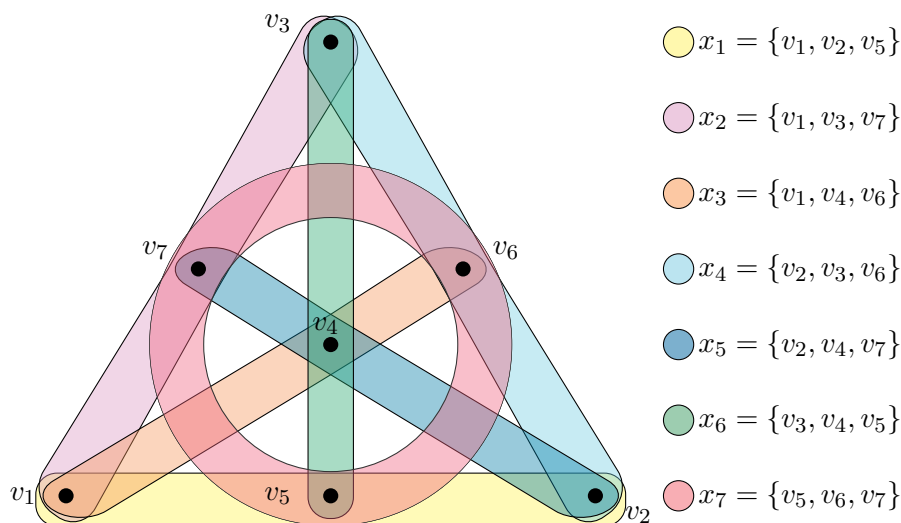
Met bovenstaande notatie voorkomen we dat er meerdere interpretaties van grafen en hypergrafen mogelijk zijn, omdat alleen de kanten die bestaan uit twee knopen worden getekend als lijnstukken of krommen. Dus een ‘gewone’ graaf wordt nog steeds op dezelfde manier afgebeeld, maar de hyperkanten in een hypergraaf worden getekend als krommen die de knopen omcirkelen.



Figuur 1.3: Een voorbeeld van een hypergraaf met 7 knopen v_1, \dots, v_7 en 4 kanten x_1, \dots, x_4 . $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ en $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_5, v_6\}, \{v_4\}\}$.

In Figuur 1.2 zien we hoe het Fano-vlak over het algemeen wordt afgebeeld. Het Fano-vlak bestaat uit 7 hyperkanten, waarvan er één wordt getekend als een cirkel en de andere 6 worden als lijnstuk afgebeeld. Het Fano-vlak is een 3-uniforme hypergraaf, aangezien alle kanten uit 3 knopen bestaan. Wij zullen het Fano-vlak in het vervolg met bovenstaande notatie weergeven. In Figuur 1.4 hebben we bovenstaande notatie gebruikt voor de hyperkanten in het Fano-vlak. In deze afbeelding zijn de hyperkanten getekend als krommen die de knopen omcirkelen. Op deze manier is het direct duidelijk dat de afbeelding een hypergraaf voorstelt in plaats van een ‘gewone’ graaf. Net zoals bij een graaf is het ook bij een hypergraaf niet van belang hoe de kanten zijn getekend, maar alleen welke knopen worden zijn bevat in de hyperkanten.

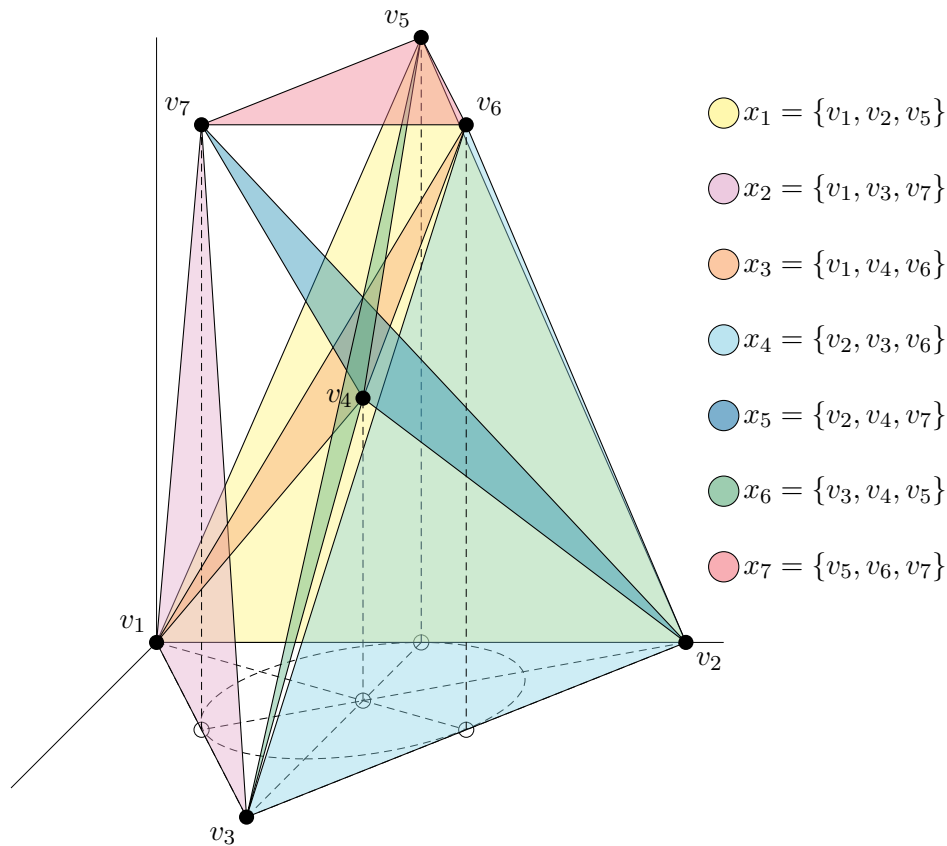
We kunnen de hyperkanten van Fano-vlak allemaal verschillende vormen geven, maar als alle hyperkanten dezelfde knopen bevatten blijft het dezelfde hypergraaf. Dus Figuur 1.4 is een voorbeeld van een voorstelling van het Fano-vlak als hypergraaf. We kunnen het Fano-vlak namelijk ook op een andere manier afbeelden. We kunnen bijvoorbeeld de vorm van de hyperkanten veranderen, maar we kunnen ook de knopen een andere plaats geven in de hypergraaf. Een mogelijk gevolg van veel aanpassingen is dat het Fano-vlak minder goed te herkennen is in de hypergraaf.



Figuur 1.4: Een voorstelling van het Fano-vlak waarbij de kanten zijn getekend als krommen die de knopen omcirkelen. De hypergraaf bestaat uit 7 knopen v_1, \dots, v_7 en 7 kanten x_1, \dots, x_7 . $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ en $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\} = \{\{v_1, v_2, v_5\}, \{v_1, v_3, v_7\}, \{v_1, v_4, v_6\}, \{v_2, v_3, v_6\}, \{v_2, v_4, v_7\}, \{v_3, v_4, v_5\}, \{v_5, v_6, v_7\}\}$.

Een simpele (hyper)graaf is een (hyper)graaf zonder meervoudige kanten en lussen. Voor een (hyper)graaf met n knopen geldt dat de verzameling knopen V uit n elementen bestaat, dit noteren we met $|V| = \#V = n$. In een simpele graaf met n knopen kunnen we maximaal $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$ tekenen. Dit is gelijk het aantal kanten in een volledige graaf. Het maximale aantal kanten in een simpele graaf is gelijk aan het aantal mogelijke paren knopen. Dit komt overeen met het aantal manieren om, zonder terugleggen, $k = 2$ voorwerpen te kiezen uit n voorwerpen. We kunnen dit berekenen met de binomiaalcoëfficiënt $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. In een simpele hypergraaf met n knopen kunnen we meer kanten tekenen dan in een simpele graaf. De machtsverzameling $\mathcal{P}(V)$ is de verzameling van alle verschillende deelverzamelingen van V . De verzameling kanten in een volledige simpele hypergraaf is gelijk aan de verzameling van alle mogelijke deelverzamelingen van V met 2 of meer

knopen. Dit is gelijk aan $\mathcal{P}(V)$, de machtsverzameling van de verzameling knopen, zonder de lege verzameling \emptyset en de verzamelingen met één knoop $\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \dots, \{v_n\}$. Het aantal elementen in de machtsverzameling van V komt overeen met 2^n , dit noteren we met $|\mathcal{P}(V)| = 2^n$. Dus het aantal kanten in een volledige hypergraaf met n knopen is gelijk aan $2^n - (n + 1)$. Aangezien het maximale aantal kanten in een simpele hypergraaf groter is dan in een simpele graaf komt het vaak voor dat de hyperkanten overlappen. Dit kan als gevolg hebben dat het niet duidelijk is welke knopen bevat zijn in de hyperkanten. Vaak kunnen we dit vaak oplossen door de kleur van de hyperkanten te veranderen. Maar we kunnen er ook voor kiezen om een driedimensionale voorstelling van de hypergraaf te maken, zoals in Figuur 1.5. In deze afbeelding liggen de knopen van de hypergraaf op de hoekpunten van de hyperkanten. Het Fano-vlak is in deze afbeelding te herkennen in het grondvlak van de driedimensionale hypergraaf.



Figuur 1.5: Dit is een driedimensionale voorstelling van het Fano-vlak. De hypergraaf bestaat uit 7 knopen v_1, \dots, v_7 en 7 kanten x_1, \dots, x_7 . $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ en $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\} = \{\{v_1, v_2, v_5\}, \{v_1, v_3, v_7\}, \{v_1, v_4, v_6\}, \{v_2, v_3, v_6\}, \{v_2, v_4, v_7\}, \{v_3, v_4, v_5\}, \{v_5, v_6, v_7\}\}$.

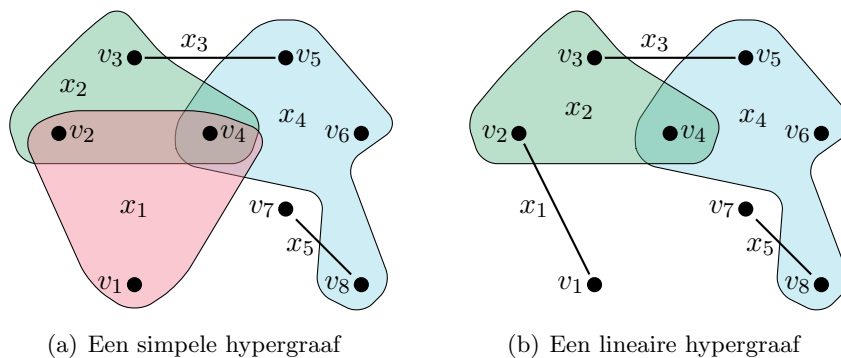
2 Voorstelling van hypergrafen

2.1 Verschillende hypergrafen

In de inleiding is het onderwerp hypergrafen geïntroduceerd met behulp van de definitie van ‘gewone’ grafen. Het verschil tussen hypergrafen en grafen is dat de kanten in een hypergraaf uit een willekeurig aantal knopen bestaan en de kanten in een graaf precies twee knopen bevatten. In de inleiding hebben we verschillende afbeeldingen met voorstellingen van hypergrafen gezien, waarbij de hyperkanten zijn getekend als krommen die de knopen omcirkelen. Net als grafen worden hypergrafen in de wiskunde ook op een meer formele manier gedefinieerd.

Definitie 2.1.1. Een *hypergraaf* H is een paar $H = (V, X)$ met V een willekeurige niet-lege eindige verzameling en X een verzameling van niet-lege deelverzamelingen van V . De elementen van V noemen we de *knopen* van H en de elementen van X noemen we de *hyperkanten* of *kanten* van H .

Een *lege hypergraaf* is een hypergraaf waarbij X de lege verzameling is, uit de definitie van een hypergraaf volgt dat de verzameling V niet-leeg is. De definitie van een lege hypergraaf komt overeen met de definitie van een lege graaf. Een *simpele hypergraaf* is een hypergraaf zonder meervoudige kanten ($x_i = x_j \iff i = j$ voor alle $x_i, x_j \in X$) en lussen. Tenzij anders staat vermeld gaan we ervan uit dat een hypergraaf simpel is. Een *lineaire hypergraaf* is een simpele hypergraaf waarvoor geldt dat de doorsnede van twee willekeurige kanten hoogstens een knoop bevat, dit noteren we met $|x_i \cap x_j| \leq 1$ voor alle $x_i, x_j \in X$ met $i \neq j$. Een *triviale lineaire hypergraaf* bevat alleen de hyperkant die alle knopen omvat. Een hypergraaf waarin elk paar knopen in precies één kant is bevat heet een *lineaire ruimte*.



Figuur 2.1: Een voorbeeld van een simpele en een lineaire hypergraaf.

De hypergraaf in Figuur 2.1(a) heeft geen lussen of meervoudige kanten, dus is simpel. Maar de hypergraaf is niet lineair, aangezien $|x_1 \cap x_2| = 2 \not\leq 1$.

De notatie voor deze hypergraaf is als volgt $(\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}, \{\{v_1, v_2, v_4\}, \{v_2, v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5, v_6, v_8\}, \{v_7, v_8\}\})$. De hypergraaf in Figuur 2.1(b) is simpel en er geldt voor deze hypergraaf dat $|x_i \cap x_j| \leq 1$ voor alle $x_i, x_j \in X$ met $i \neq j$. Dus deze hypergraaf is lineair. We gebruiken de volgende notatie voor deze hypergraaf $(\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5, v_6, v_8\}, \{v_7, v_8\}\})$.

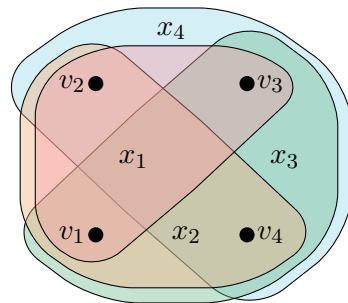
De cardinaliteit of grootte van de verzameling knopen V , is de *orde* van een hypergraaf. Dit noteren we met $|V| = \#V = n$. De cardinaliteit of grootte van de verzameling hyperkanten X , is de *omvang* van een hypergraaf. Dit noteren we met $|E| = \#E = m$.

De knopen v_i en v_j zijn *verbonden* als er een hyperkant $x_i \in X$ is die beide knopen bevat. Als de knopen v_i en v_j verbonden zijn, dan heet v_i een *buur* van v_j . De *graad* van een knoop v_i is het aantal buren van v_i . We noteren de graad van een knoop v_i met $d(v_i)$. Voor een hypergraaf H noteren we het maximum van de graden van de knopen met $\Delta(H)$ en het minimum van de graden van de knopen noteren we met $\delta(H)$.

Definitie 2.1.2. Een hypergraaf H heet *regulier* als alle knopen dezelfde graad hebben. In een *d-reguliere* hypergraaf H hebben alle knopen graad d , dit kunnen we noteren met $\Delta(H) = \delta(H) = d$ of $d(v_i) = d$ voor alle $v_i \in V$.

De *rang* van een hypergraaf H is de maximale cardinaliteit van de hyperkanten in de hypergraaf. De rang van een hypergraaf H noteren we met $r(H)$. De minimale cardinaliteit van de hyperkanten in hypergraaf H is de *co-rang* van de hypergraaf. De co-rang van een hypergraaf H noteren we met $cr(H)$.

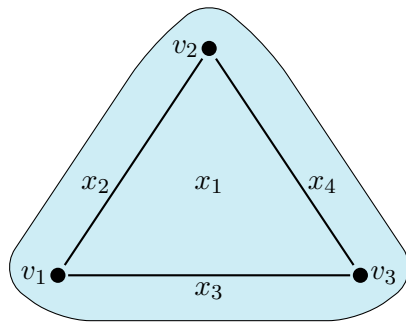
Definitie 2.1.3. Een hypergraaf H heet *uniform* als alle hyperkanten dezelfde cardinaliteit hebben. In een *k-uniforme* hypergraaf H hebben alle hyperkanten cardinaliteit k , dit kunnen we noteren met $r(H) = cr(H) = k$.



Figuur 2.2: Een voorbeeld van een zowel 3-reguliere als 3-uniforme hypergraaf. We gebruiken de volgende notatie voor deze hypergraaf $(\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2, v_4\}, \{v_1, v_3, v_4\}, \{v_2, v_3, v_4\}\})$.

Definitie 2.1.4. Een hypergraaf H met $|V| = \#V = n$ heet *volledig* als geldt dat $H = (V, X = \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \dots, \{v_n\}\})$. Met andere woorden de hypergraaf H heet volledig als geldt dat de verzameling kanten gelijk is aan de verzameling van alle mogelijke deelverzamelingen van V met cardinaliteit groter of gelijk aan 2.

De verzameling van alle mogelijke deelverzamelingen van V noemen we de machtsverzameling van V , dit noteren we met $\mathcal{P}(V)$. De verzameling kanten in een volledige hypergraaf is gelijk aan de machtsverzameling $\mathcal{P}(V)$ zonder de lege verzameling \emptyset en de verzamelingen met één knoop $\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \dots, \{v_n\}$. De cardinaliteit van de machtsverzameling van de verzameling knopen is gelijk aan 2^n , dit noteren we met $|\mathcal{P}(V)| = 2^n$. Dus het aantal kanten in een volledige hypergraaf is $|\mathcal{P}(V)| = 2^n - (n + 1)$.

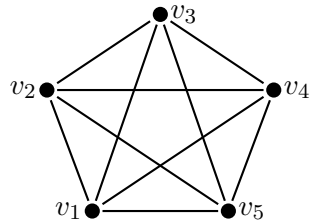


Figuur 2.3: Een voorstelling van de volledige hypergraaf met 3 knopen. We gebruiken de volgende notatie voor deze hypergraaf $(\{v_1, v_2, v_3\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_1, v_2, v_3\}\})$.

Definitie 2.1.5. Een *volledige k -uniforme* hypergraaf met $|V| = \#V = n$ is een hypergraaf waarbij de verzameling kanten gelijk is aan de verzameling van alle mogelijke deelverzamelingen van V met cardinaliteit k . De volledige k -uniforme hypergraaf met n knopen wordt genoteerd met K_n^k .

We gebruiken de notatie $\mathcal{P}_k(V)$ voor de verzameling van alle mogelijke deelverzamelingen van V met cardinaliteit k . De verzameling $\mathcal{P}_k(V)$ is bevat in de machtsverzameling van V , dit kunnen we als volgt noteren $\mathcal{P}_k(V) \subset \mathcal{P}(V)$ voor alle $k \in \{1, \dots, n\}$ met $|V| = \#V = n$. Voor een volledige k -uniforme hypergraaf H geldt dat de verzameling kanten gelijk is aan $\mathcal{P}_k(V)$, dit kunnen we noteren met $X = \mathcal{P}_k(V)$ of $H = (V, X = \mathcal{P}_k(V))$. Het aantal kanten in een volledige k -uniforme hypergraaf is gelijk aan de cardinaliteit van de verzameling $\mathcal{P}_k(V)$. Dit is gelijk aan het aantal manieren om, zonder terugleggen, k voorwerpen te kiezen uit n voorwerpen. De cardinaliteit van de verzameling $\mathcal{P}_k(V)$ kunnen we met de binomiaalcoëfficiënt $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ berekenen als er geldt dat $|V| = \#V = n$.

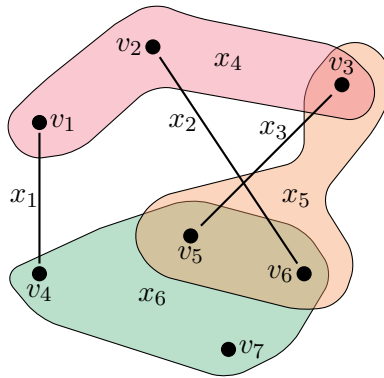
De hypergraaf in Figuur 2.2 is de volledige 3-uniforme hypergraaf met 4 knopen, dit noteren we met K_4^3 . Voor deze hypergraaf geldt er dat $|V| = \#V = 4$ en $X = \mathcal{P}_3(V)$. Het aantal kanten in deze hypergraaf is gelijk aan 4, dit kunnen we berekenen met de binomiaalcoëfficiënt $\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{3!} = 4$.



Figuur 2.4: Een voorbeeld van een volledige 2-uniforme hypergraaf met 5 knopen. Er geldt $|V| = \#V = 5$ en $X = \mathcal{P}_2(V)$ voor deze hypergraaf.

Figuur 2.4 is een voorstelling van de volledige 2-uniforme hypergraaf met 5 knopen, dit noteren we met K_5^2 . Deze hypergraaf is gelijk aan de K_5 , de volledige graaf met 5 knopen. De notatie van deze graaf is als volgt $(\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_2, v_5\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}\})$. We kunnen het aantal kanten in deze graaf berekenen met de binomiaalcoëfficiënt $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$. Er volgt dat we beide notaties K_n^2 of K_n mogen gebruiken voor een volledige 2-uniforme hypergraaf met n knopen. Het aantal hyperkanten in een volledige 2-uniforme hypergraaf met n knopen kunnen we berekenen met de binomiaalcoëfficiënt $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!}$. Dit komt overeen met het aantal kanten in een volledige graaf met n knopen.

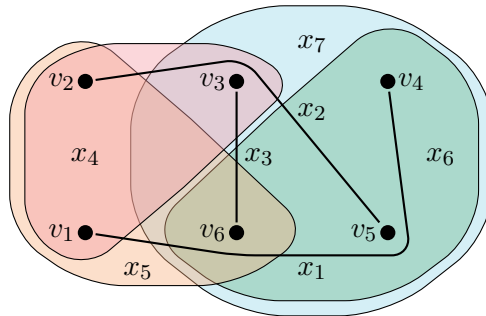
Opgaves:



Figuur 2.5

- Opgave 2.1.1.* (i) Geef een juiste notatie voor de hypergraaf in Figuur 2.5.
(ii) Teken hypergraaf $H = (\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}, \{\{v_1, v_4\}, \{v_2, v_5\}, \{v_3, v_6\}, \{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2, v_6\}, \{v_4, v_5, v_6\}, \{v_3, v_4, v_5, v_6\}\})$.

- Uitwerking.* (i) De notatie voor de hypergraaf in Figuur 2.5:
 $(\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_6\}, \{v_3, v_5\}, \{v_1, v_2, v_3\}, \{v_3, v_5, v_6\}, \{v_4, v_5, v_6, v_7\}\})$.
(ii) In Figuur 2.6 is een voorstelling van hypergraaf H gegeven.



Figuur 2.6

Opgave 2.1.2. (i) Is de hypergraaf in Figuur 2.5 een simpele hypergraaf? Is deze hypergraaf lineair?

(ii) Geef de graden van de knopen van deze hypergraaf. Is deze hypergraaf regulier?

Uitwerking. (i) De hypergraaf in Figuur 2.5 is een simpele hypergraaf, want de hypergraaf heeft geen meervoudige kanten of lussen. Deze hypergraaf is niet lineair, omdat de doorsnede van de kanten $\{v_3, v_5, v_6\}$ en $\{v_4, v_5, v_6, v_7\}$ uit meer dan één knoop bestaat. ($|\{v_3, v_5, v_6\} \cap \{v_4, v_5, v_6, v_7\}| = 2 \not\leq 1$)

(ii) De graden van de knopen van de hypergraaf in Figuur 2.5 zijn gegeven door $d(v_1) = 2$, $d(v_2) = 2$, $d(v_3) = 3$, $d(v_4) = 2$, $d(v_5) = 3$, $d(v_6) = 3$ en $d(v_7) = 1$. Deze hypergraaf is niet regulier, omdat niet alle knopen dezelfde graad hebben. In deze hypergraaf H geldt dat $\Delta(H) = 3$ en $\delta(H) = 1$, dus $\Delta(H) \neq \delta(H)$.

Opgave 2.1.3. (i) Teken de volledige hypergraaf met 4 knopen en geef de juiste notatie van deze graaf.

(ii) Voor welke hypergraaf kunnen we de volgende notatie gebruiken

$$H = (V, X = \bigcup_{k=2}^n \mathcal{P}_k(V)) \text{ met } |V| = \#V = n?$$

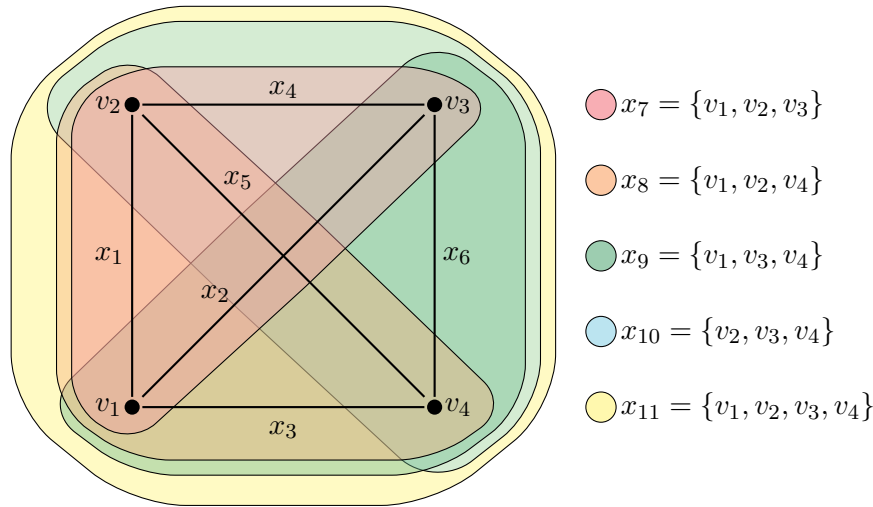
(iii) Hoeveel verschillende 3-uniforme hypergrafen met 5 knopen bestaan er? Hoeveel verschillende hypergrafen met 4 knopen bestaan er?

(Hint: Bereken eerst het aantal hyperkanten in een volledige hypergraaf.)

Uitwerking. (i) Een voorstelling van de volledige hypergraaf met 4 knopen is gegeven in Figuur 2.7. We gebruiken de volgende notatie voor deze hypergraaf ($\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}, \{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2, v_4\}, \{v_1, v_3, v_4\}, \{v_2, v_3, v_4\}, \{v_1, v_2, v_3, v_4\}\}$).

(ii) Bovenstaande notatie komt overeen met $H = (V, X = \mathcal{P}_2(V) \cup \mathcal{P}_3(V) \cup \mathcal{P}_4(V) \cup \dots \cup \mathcal{P}_n(V))$. Dit betekent dat alle mogelijke deelverzamelingen van V met grootte 2 tot en met n bevat zijn in de verzameling hyperkanten van deze hypergraaf. Dit is gelijk aan de machtsverzameling $\mathcal{P}(V)$ zonder de lege verzameling \emptyset en de verzamelingen met één knoop $\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \dots, \{v_n\}$. Dus we kunnen deze notatie gebruiken voor de volledige hypergraaf met $|V| = \#V = n$.

(iii) Het aantal hyperkanten in een volledige 3-uniforme hypergraaf met 5 knopen kunnen we berekenen met de binomiaalcoëfficiënt $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$. Alle mogelijke hyperkanten kunnen wel of niet bevat zijn in de verzameling hyperkanten van de hypergraaf, dus het totaal aantal verschillende hypergrafen is $2^{10} = 1024$. Het aantal hyperkanten in een volledige hypergraaf met 4 knopen is gelijk aan $2^4 - (4 + 1) = 16 - 5 = 11$. Dus het totaal aantal verschillende hypergrafen met 4 knopen is $2^{11} = 2048$.



Figuur 2.7

Opgave 2.1.4. (i) Bereken het aantal hyperkanten in een volledige hypergraaf met 5 knopen.

(ii) De volledige hypergraaf met 5 knopen is een k -reguliere hypergraaf. Bereken de waarde van k , oftewel de graad van de knopen in deze hypergraaf.

Uitwerking. (i) Het aantal hyperkanten in een hypergraaf met 5 knopen is gelijk aan $2^5 - (5 + 1) = 32 - 6 = 26$. Dit is de cardinaliteit van de machtsverzameling zonder de lege verzameling \emptyset en de verzamelingen die bestaan uit één knoop $\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\}$.

(ii) We berekenen eerst de graad k in elke volledige n -uniforme hypergraaf.

- De cardinaliteit van de verzameling $\mathcal{P}_2(V)$ is $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$. In totaal zijn dit $10 \cdot 2 = 20$ graden, dus elke knoop heeft graad $20 : 5 = 4$.
- De cardinaliteit van de verzameling $\mathcal{P}_3(V)$ is $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$. In totaal zijn dit $10 \cdot 3 = 30$ graden, dus elke knoop heeft graad $30 : 5 = 6$.
- De cardinaliteit van de verzameling $\mathcal{P}_4(V)$ is $\binom{5}{4} = \frac{5!}{4!(5-4)!} = \frac{5!}{4!} = 5$. In totaal zijn dit $5 \cdot 4 = 20$ graden, dus elke knoop heeft graad $20 : 5 = 4$.
- De cardinaliteit van de verzameling $\mathcal{P}_5(V)$ is $\binom{5}{5} = \frac{5!}{5!} = 1$. In totaal zijn dit 5 graden, dus elke knoop heeft graad 1 .

Elke knoop een volledige hypergraaf met 5 knopen heeft graad $4 + 6 + 4 + 1 = 15$. Dus een volledige hypergraaf met 5 knopen is k -regulier met $k = 15$.

2.2 Samenhangende hypergrafen

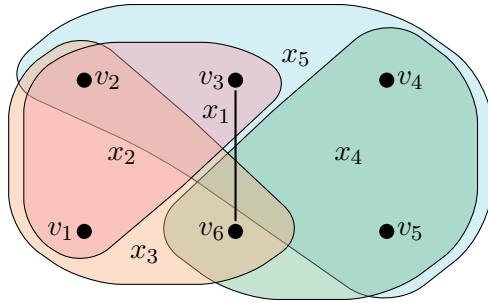
Een *geïsoleerde knoop* in een hypergraaf is een knoop zonder burenen. Een geïsoleerde knoop heeft graad 0, dus voor een geïsoleerde knoop v_i geldt $d(v_i) = 0$. Een geïsoleerde knoop is niet bevat in een van de hyperkanten van de hypergraaf.

Definitie 2.2.1. Een *pad* P in een hypergraaf H is een rij van knopen en hyperkanten $(v_0, x_0, v_1, x_1, \dots, v_{s-1}, x_{s-1}, v_s)$ zodat:

- Alle $v_0, v_1, \dots, v_{s-1}, v_s$ verschillende knopen zijn in hypergraaf H .
- Alle x_0, x_1, \dots, x_{s-1} verschillende hyperkanten zijn in hypergraaf H .
- Voor alle $i \in \{1, \dots, s\}$ geldt dat de knopen v_{i-1} en v_i in hypergraaf H verbonden zijn door de hyperkant x_{i-1} , oftewel $v_{i-1}, v_i \in x_{i-1}$.

Het getal s noemen we de *lengte* van het pad P in hypergraaf H . Als er voor een pad P in hypergraaf H geldt dat $v_0 = v_s$ met $s \geq 3$ dan noemen we het pad P een *cykel*. Een cykel C is dus een gesloten pad P . Een *acyclische hypergraaf* is een hypergraaf zonder cyclen.

We zeggen dat een pad $P (v_0, x_0, v_1, x_1, \dots, v_{s-1}, x_{s-1}, v_s)$ dat de knopen v_0 en v_s verbindt. Dit pad P loopt van de knoop v_0 naar de knoop v_s of tussen de knopen v_0 en v_s . Als er in een hypergraaf H een pad P bestaat van v_0 naar v_s , dan bestaat er in deze hypergraaf ook een pad P' van v_s naar v_0 .



Figuur 2.8: Een voorbeeld van een hypergraaf met 6 knopen. We gebruiken de volgende notatie voor deze hypergraaf $(\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}, \{\{v_3, v_6\}, \{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2, v_6\}, \{v_4, v_5, v_6\}, \{v_2, v_3, v_4, v_5\}\})$.

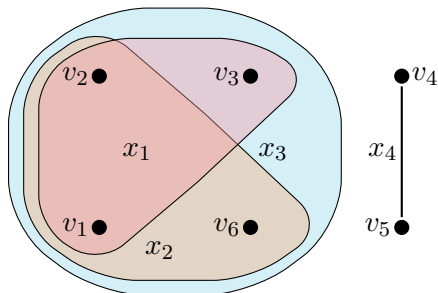
Een voorbeeld van een pad P dat loopt tussen de knopen v_1 en v_4 in de hypergraaf in Figuur 2.8 is $(v_1, x_3, v_6, x_4, v_4)$. Maar $(v_1, x_2, v_2, x_5, v_4)$ is ook een pad P' van v_1 naar v_4 in deze hypergraaf. De lengte van de paden P en P' is gelijk aan 2. Maar er zijn ook paden van lengte 3 tussen de knopen v_1 en v_4 , bijvoorbeeld het volgende pad $(v_1, x_3, v_6, x_1, v_3, x_5, v_4)$. Een voorbeeld van een cykel C in deze hypergraaf is $(v_1, x_3, v_6, x_4, v_4, x_5, v_2, x_2, v_1)$. Dit is een cykel, omdat het een gesloten pad is in deze hypergraaf vanuit de knoop v_1 . De cykel C' $(v_1, x_2, v_2, x_5, v_4, x_4, v_6, x_3, v_1)$ in deze hypergraaf is gelijk aan de cykel C . De lengte van de cyclen C en C' is gelijk aan 4.

Definitie 2.2.2. De *afstand* tussen de knopen v_i en v_j in een hypergraaf is de lengte van een kortste pad dat deze twee knopen verbindt, dit noteren we met $d(v_i, v_j)$. Als er in hypergraaf H twee knopen v_k en v_l zijn die niet verbonden zijn door een pad, dan definiëren we $d(v_k, v_l) = \infty$. De maximale afstand tussen twee knopen in hypergraaf H is de *diameter* van de hypergraaf, dit noteren we met $d(H) = \max\{d(v_i, v_j) : v_i, v_j \in X\}$.

In Figuur 2.8 is er geen hyperkant in de hypergraaf die de knopen v_1 en v_4 met elkaar verbindt, dus de afstand tussen deze twee knopen is groter dan 1, $d(v_1, v_4) > 1$. We hebben eerder gezien dat er in deze hypergraaf paden van onder andere lengte 2 en 3 bestaan tussen deze twee knopen. Dus het kortste pad dat er tussen deze twee knopen bestaat heeft lengte 2. Daarom is de afstand tussen de knopen v_1 en v_4 in deze hypergraaf gelijk aan 2, $d(v_1, v_4) = 2$. Voor deze hypergraaf geldt $d(v_1, v_4) = 2$ en $d(v_1, v_5) = 2$ de andere paren knopen in deze hypergraaf zijn verbonden door een hyperkant. Dus de diameter van deze hypergraaf H is gelijk aan 2, $d(H) = 2$, omdat dit de maximale afstand tussen twee willekeurige knopen in deze hypergraaf is.

Definitie 2.2.3. Een hypergraaf H is *samenhangend* als alle paren knopen in de hypergraaf verbonden zijn door een pad. Een hypergraaf H heet *onsamenhangend*, als de hypergraaf niet samenhangend is. Een *component* van een hypergraaf H is de maximale deelverzameling W van V , waarvoor geldt dat elk paar willekeurige knopen in de deelverzameling W verbonden is door een pad. Dus voor de component die bestaat uit de knopen in de deelverzameling $W \subset V$ geldt dat $d(v_i, v_j) \neq \infty$ voor alle $v_i, v_j \in W$.

Uit de definitie volgt dat een component van een hypergraaf altijd samenhangend is. Een hypergraaf kan uit verschillende componenten bestaan, als een hypergraaf uit één component bestaat dan is het een samenhangende hypergraaf. Als er voor twee knopen v_i en v_j in een hypergraaf geldt dat $d(v_i, v_j) = \infty$, dan is de hypergraaf onsamenhangend. De vereniging van de knopen in componenten van een hypergraaf is gelijk aan de verzameling knopen van de hypergraaf. Voor de verzameling knopen in een component $W_i \subseteq V$ geldt $\bigcup_{i=1}^n W_i = V$ en $|W_i \cap W_j| = \emptyset$ met $i, j \in \{1, \dots, n\}$.



Figuur 2.9: Een voorbeeld van een onsamenhangende hypergraaf H . We gebruiken de volgende notatie voor deze hypergraaf $(\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}, \{\{v_4, v_5\}, \{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2, v_6\}, \{v_1, v_2, v_3, v_6\}\})$.

De hypergraaf in Figuur 2.9 is onsamenhangend, omdat bijvoorbeeld de knopen v_1 en v_4 niet zijn verbonden door een pad. In deze hypergraaf

zijn er ook nog andere paren van knopen niet verbonden door een pad. Voor deze hypergraaf geldt bijvoorbeeld dat $d(v_1, v_4) = \infty$, $d(v_3, v_4) = \infty$ en $d(v_2, v_5) = \infty$. Deze hypergraaf bestaat uit twee componenten: een component bestaat uit de deelverzameling met de knopen $\{v_1, v_2, v_3, v_6\} \in V$ en de andere component bestaat uit de deelverzameling met de resterende knopen $\{v_4, v_5\} \in V$ van de hypergraaf. De componenten van de hypergraaf zijn de twee grootste deelverzamelingen van de verzameling knopen waarvoor geldt dat alle paren knopen verbonden zijn door een pad. De verzameling knopen van de hypergraaf is gelijk aan de vereniging van de knopen in de componenten van de hypergraaf. Dit noteren we als volgt $\{v_1, v_2, v_3, v_6\} \cup \{v_4, v_5\} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} = V$ en $\{v_1, v_2, v_3, v_6\} \cap \{v_4, v_5\} = \emptyset$.

Definitie 2.2.4. Een *equivalentierelatie* of *equivalentie* is een (binaire) relatie \sim op een verzameling V , waarvoor geldt dat:

- $v_i \sim v_i$ voor alle $v_i \in V$ (*reflexief*)
- als $v_i \sim v_j$ dan $v_j \sim v_i$ voor alle $v_i, v_j \in V$ (*symmetrisch*)
- als $v_i \sim v_j$ en $v_j \sim v_k$ dan $v_i \sim v_k$ voor alle $v_i, v_j, v_k \in V$ (*transitief*)

Voor elke $v_i \in V$ is er een verzameling $\{v_j \in V : v_i \sim v_j\}$ van elementen die equivalent zijn met v_i . Deze verzameling heet de *equivalentieklasse* van v_i .

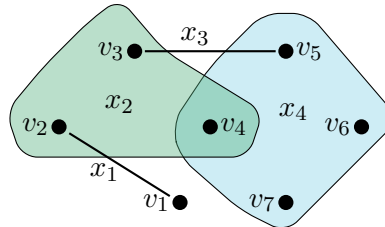
Propositie 2.2.5. *Definieer de relatie \sim in een hypergraaf $H = (V, X)$ door: $v_i \sim v_j$ als $d(v_i, v_j) \neq \infty$ met $v_i, v_j \in V$. Dus $v_i \sim v_j$ als de knopen v_i en v_j verbonden zijn door een pad in hypergraaf H . Dan geldt er dat de relatie \sim een equivalentierelatie is met als equivalentieklassen de componenten van hypergraaf H .*

Bewijs. Een component van een hypergraaf is samenhangend. Het is dus voldoende om te bewijzen dat de relatie \sim een equivalentierelatie is.

- Er bestaat een pad P in hypergraaf H van lengte $d(v_i, v_i) = 0$ dat begint en eindigt bij de knoop v_i , dus $v_i \sim v_i$ voor alle $v_i \in V$.
- Als er in hypergraaf H een pad P bestaat van de knoop v_i naar de knoop v_j , dan bestaat er in hypergraaf H ook een pad P' van de knoop v_j naar de knoop v_i , dit is het omgekeerde pad van P . Dus $v_j \sim v_i$ als $v_i \sim v_j$ voor alle $v_i, v_j \in V$.
- Als er in hypergraaf H een pad P_1 van lengte p_1 bestaat van de knoop v_i naar de knoop v_j en een pad P_2 van lengte p_2 van de knoop v_j naar de knoop v_k , dan vormen deze twee paden een pad P_3 van lengte $p_3 \leq p_1 + p_2$ van de knoop v_i naar de knoop v_k . Als de paden P_1 en P_2 niet disjunct zijn, dan bestaat er een korter pad tussen de knopen v_i en v_k via een gemeenschappelijke knoop van deze twee paden. Dus $v_i \sim v_k$ als $v_i \sim v_j$ en $v_j \sim v_k$ voor alle $v_i, v_j, v_k \in V$.

□

Opgaves:



Figuur 2.10

Opgave 2.2.1. (i) Geef de afstand tussen de knopen in de hypergraaf in Figuur 2.10. Wat is de diameter van deze hypergraaf H ? *Let op:* We kunnen de diameter van een hypergraaf bepalen aan de hand van de afstanden tussen de knopen. De diameter van een hypergraaf is dus ongelijk aan het langst mogelijke pad tussen twee willekeurige knopen afstand tussen de knopen.

(ii) Geef een voorbeeld van een cykel in de hypergraaf in Figuur 2.10. Geef een voorbeeld van een pad van lengte 3 en een pad van lengte 4 tussen de knopen v_1 en v_7 in de hypergraaf in Figuur 2.10.

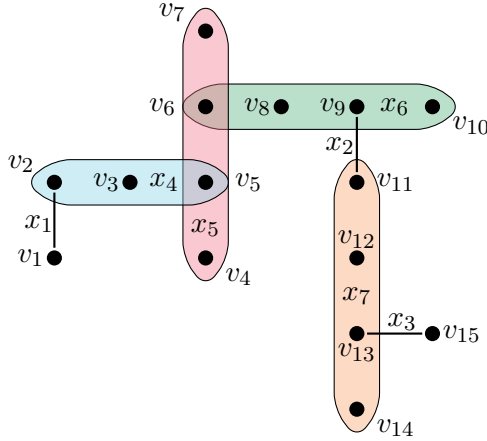
Uitwerking. (i) De afstand tussen de knopen in de hypergraaf in Figuur 2.9 is gegeven door: $d(v_1, v_2) = 1$, $d(v_1, v_3) = 2$, $d(v_1, v_4) = 2$, $d(v_1, v_5) = 3$, $d(v_1, v_6) = 3$, $d(v_1, v_7) = 3$, $d(v_2, v_3) = 1$, $d(v_2, v_4) = 1$, $d(v_2, v_5) = 2$, $d(v_2, v_6) = 2$, $d(v_2, v_7) = 2$, $d(v_3, v_4) = 1$, $d(v_3, v_5) = 1$, $d(v_3, v_6) = 2$, $d(v_3, v_7) = 2$, $d(v_4, v_5) = 1$, $d(v_4, v_6) = 1$, $d(v_4, v_7) = 1$, $d(v_5, v_6) = 1$, $d(v_5, v_7) = 1$ en $d(v_6, v_7) = 1$. Dus de diameter van deze hypergraaf H is gelijk aan 3, dus $d(H) = 3$.

(ii) Een voorbeeld van een cykel in de hypergraaf is $(v_3, x_2, v_4, x_4, v_5, x_3, v_3)$. Een voorbeeld van een pad van lengte 3 tussen de knopen v_1 en v_7 is $(v_1, x_1, v_2, x_2, v_4, x_4, v_7)$. Een voorbeeld van een pad van lengte 4 tussen de knopen v_1 en v_7 is $(v_1, x_1, v_2, x_2, v_3, x_3, v_5, x_4, v_7)$.

Opgave 2.2.2. Zij $H = (V, X)$ een hypergraaf. Bewijs dat elke knoop van hypergraaf H in precies één component bevat is.

Uitwerking. Stel er is een knoop v_i in hypergraaf H , die bevat is in de componenten C_1 en C_2 van hypergraaf H . Dan bestaat er een pad van elke knoop in de component C_1 naar elke knoop in de component C_2 via de knoop v_i . Dit heeft als gevolg dat alle knopen die bevat zijn in de component C_1 door een pad verbonden zijn met de knopen die bevat zijn in de component C_2 . Dit betekent dat de componenten C_1 en C_2 samen één component vormen, omdat elk paar knopen in de component $C_1 \cup C_2$ verbonden is door een pad. In hypergraaf H is de component C_1 gelijk aan de component C_2 of de componenten zijn disjunct. Dus elke knoop van hypergraaf H is in precies één component bevat. \square

Definitie 2.2.6. Een samenhangende hypergraaf $H = (V, X)$ noemen we een *hyperboom* als er een onsamenvangende hypergraaf H' ontstaat wanneer een van de hyperkanten $x_i \in X$ wordt weggehaald.



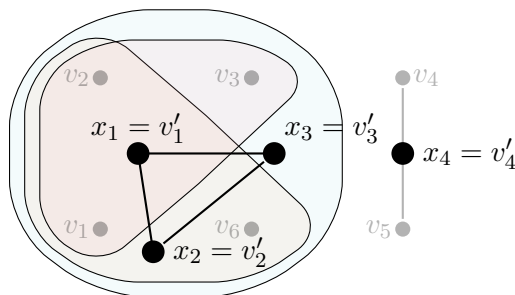
Figuur 2.11: Een voorbeeld van een hyperboom, als een van de hyperkanten x_1, \dots, x_7 wordt weggehaald ontstaat er een onsamenvangende hypergraaf. We gebruiken de volgende notatie voor deze hypergraaf $(\{v_1, v_2, \dots, v_{14}, v_{15}\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_9, v_{11}\}, \{v_{13}, v_{15}\}, \{v_2, v_3, v_5\}, \{v_4, v_5, v_6, v_7\}, \{v_6, v_8, v_9, v_{10}\}, \{v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}\}\})$.

Opgave 2.2.3. Bewijs dat een samenhangende hypergraaf H een hyperboom is als de hypergraaf geen *gesloten verzameling van cyclen* $C = \{C_1, \dots, C_m\}$ bevat. We noemen een verzameling cyclen $C = \{C_1, \dots, C_m\}$ gesloten als er in de hypergraaf een hyperkant x_i is, zodat elk paar knopen van hyperkant x_i bevat is in een cykel $C_i \in C$. (*Hint: Bewijs met een tegenspraak.*)

Uitwerking. Stel dat een samenhangende hypergraaf $H = (V, X)$ een hyperboom is met een gesloten verzameling cyclen $C = \{C_1, \dots, C_s\}$ ten opzichte van de hyperkant $x_i \in X$. We verwijderen de hyperkant x_i uit hypergraaf H , dit geeft de hypergraaf $H' = (V, X \setminus \{x_i\})$. We bekijken een willekeurig paar knopen $v_i, v_j \in V$ en nemen aan dat hyperkant x_i bevat is in het pad tussen deze knopen. Het pad tussen de knopen v_i en v_j is gegeven door $(v_i, \dots, v_k, x_i, v_l, \dots, v_j)$. In hypergraaf H' is er een pad tussen elk paar disjuncte knopen $v_n, v_m \in x_i$, omdat C een gesloten verzameling van cyclen is ten opzichte van hyperkant x_i . Dus er is een pad tussen de knopen v_k en v_l in hypergraaf H' en daardoor is er ook een pad tussen de knopen v_i en v_j . Dit betekent dat hypergraaf H' samenhangend is. ζ Dus een hyperboom is een samenhangende hypergraaf zonder gesloten verzameling van cyclen. \square

Definitie 2.2.7. Zij $H = (V, X)$ een niet-lege hypergraaf. De *lijngraaf* van hypergraaf H is de graaf $L(H) = (V', X')$ zodat:

- $V' = \{x_1 = v'_1, \dots, x_m = v'_m\}$
- $\{x_i, x_j\} \in X'$ met $x_i \neq x_j$ voor alle $x_i, x_j \in X \iff x_i \cap x_j \neq \emptyset$



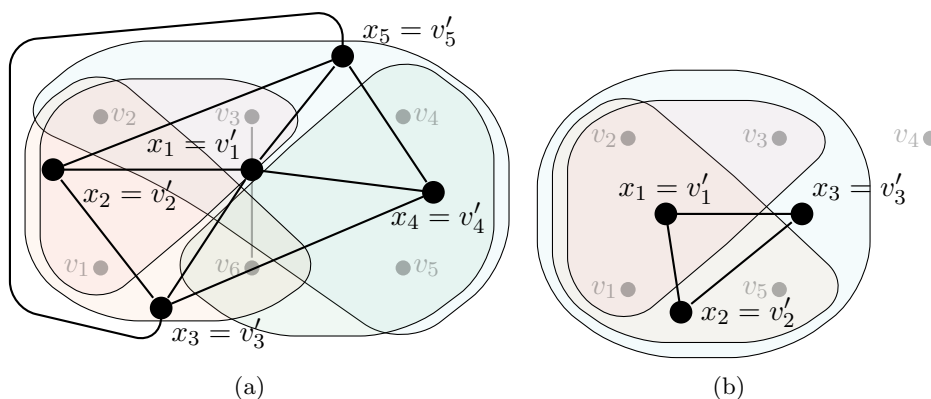
Figuur 2.12: Dit is de lijngraaf $L(H)$ van Figuur 2.9. Deze onsamenvangende graaf heeft 4 knopen $V' = \{x_1 = v'_1, x_2 = v'_2, x_3 = v'_3, x_4 = v'_4\}$ en 3 kanten $X' = \{\{v'_1, v'_2\}, \{v'_1, v'_3\}, \{v'_2, v'_3\}\}$.

- Opgave 2.2.4.* (i) Teken de lijngraaf van de hypergraaf in Figuur 2.8.
(ii) Bewijs dat de lijngraaf $L(H)$ van een samenhangende hypergraaf H ook samenhangend is.
(iii) Bewijs of geef een tegenvoorbeeld. De lijngraaf $L(H)$ van een onsamenvangende hypergraaf H is onsamenvangend.

Uitwerking. (i) Figuur 2.13(a) is de lijngraaf van Figuur 2.8. Deze graaf heeft 5 knopen $V' = \{x_1 = v'_1, x_2 = v'_2, x_3 = v'_3, x_4 = v'_4, x_5 = v'_5\}$ en 9 kanten $X' = \{\{v'_1, v'_2\}, \{v'_1, v'_3\}, \{v'_1, v'_4\}, \{v'_1, v'_5\}, \{v'_2, v'_3\}, \{v'_2, v'_5\}, \{v'_3, v'_4\}, \{v'_3, v'_5\}, \{v'_4, v'_5\}\}$.

(ii) Als H een samenhangende hypergraaf is, dan is elk paar knopen in de hypergraaf verbonden door een pad. Dit betekent dat ook elk paar hyperkanten in de hypergraaf is verbonden door een pad. In de lijngraaf $L(H)$ geeft dit een pad tussen elk paar knopen van de lijngraaf $L(H)$. Dus de lijngraaf $L(H)$ van een samenhangende hypergraaf H is samenhangend. \square

(iii) Figuur 2.13(b) is een tegenvoorbeeld. De lijngraaf $L(H)$ van hypergraaf H is een samenhangende graaf. De hypergraaf H is onsamenvangend, omdat de knoop v_4 in deze hypergraaf een geïsoleerde knoop is. De lijngraaf $L(H)$ heeft 3 knopen $V' = \{x_1 = v'_1, x_2 = v'_2, x_3 = v'_3\}$ en 3 kanten $X' = \{\{v'_1, v'_2\}, \{v'_1, v'_3\}, \{v'_2, v'_3\}\}$. \square



Figuur 2.13

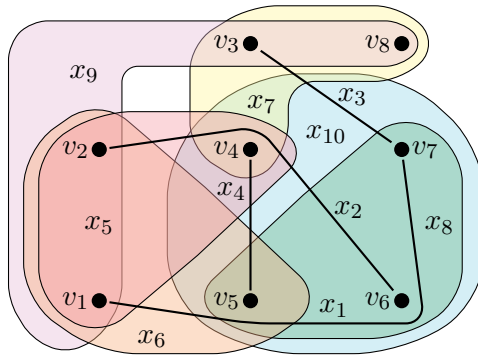
2.3 Deelhypergrafen en isomorfie

Definitie 2.3.1. Zij $H = (V, X)$ een hypergraaf.

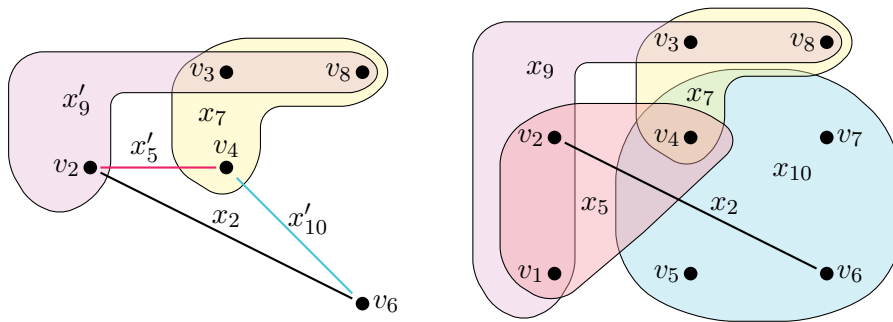
- Voor een *hyperdeelgraaf* $H' = (V', X')$ van H geldt $V' \subseteq V$ en $X' \subseteq X$. Een hyperdeelgraaf $H(V')$ met $X' = \{x_j \in X : x_j \subseteq V'\}$ wordt *voortgebracht door* V' . Een hyperdeelgraaf $H(X')$ met $V' = \bigcup_{x_j \in X'} x_j$ wordt *voortgebracht door* X' . De hyperdeelgraaf H' heet een *verwijderde-hyperkant deelhypergraaf* als geldt dat $X' = X \setminus x_j$ met $x_j \in X$. Een hyperdeelgraaf H' heet *opspannend* als $V' = V$. Een *r-factor* is een opspannende r -reguliere hyperdeelgraaf H' van H .
- Een *deelhypergraaf* H' van H wordt voortgebracht door een deelverzameling $V' \subseteq V$ en is gedefinieerd door $H' = (V', X' = \{x_j \cap V' : x_j \in X \text{ en } |x_j \cap V'| \geq 2\})$. In deelhypergraaf H' zijn bepaalde knopen van H verwijderd en de lege hyperkanten en lussen die zijn ontstaan. De deelhypergraaf H' heet een *verwijderde-knoop deelhypergraaf* als geldt dat de deelverzameling $V' = V \setminus v_i$ met $v_i \in V$.
- De *extensie* $\text{Ex}(H')$ van deelhypergraaf H' wordt voortgebracht door een deelhypergraaf $H' = (V', X')$ en is gedefinieerd door $\text{Ex}(H') = (V^*, X^*)$ met $V^* = \bigcup_{x_j \in X, |x_j \cap V'| \geq 2} x_j$ en $X^* = \{x_j \in X : x_j \subseteq V^* \text{ en } |x_j \cap V'| \geq 2\}$. De extensie $\text{Ex}(H')$ bevat deelhypergraaf H' en alle hyperkanten van H die gedeeltelijk zijn bevat in deelhypergraaf H' .
- De *partiële hypergraaf* \tilde{H} wordt voortgebracht door de deelverzameling $\tilde{X} \subseteq X$ en is gedefinieerd door $\tilde{H} = (\tilde{V} = \bigcup_{x_j \in \tilde{X}} x_j, \tilde{X})$. In de partiële hypergraaf \tilde{H} zijn bepaalde hyperkanten van H verwijderd en de geïsoleerde knopen die zijn ontstaan.
- De *sectie hypergraaf* is de partiële hypergraaf voortgebracht door de deelverzameling $V' \subseteq V$ en gedefinieerd door $H \times V' = (V'' \subseteq V', X' = \{x_j \in X : x_j \subseteq V'\})$ met $V'' = \{v_i \in V' : v_i \in x_j \text{ voor een } x_j \in X'\}$ en $X' \subseteq X$. In de sectie hypergraaf $H \times V'$ zijn bepaalde hyperkanten van H verwijderd en de geïsoleerde knopen die zijn ontstaan.

Een *sterke knoop- en kantverwijdering* wordt als volgt gedefinieerd: Een knoop v_i van H wordt sterk verwijderd als de knoop $v_i \in V$ wordt verwijderd uit H en alle kanten $x_j \in X$ waarvoor geldt $v_i \in x_j$ worden verwijderd. Een kant x_j van H wordt sterk verwijderd uit H als de kant $x_j \in X$ wordt verwijderd en alle knopen $v_i \in V$ waarvoor geldt $v_i \in x_j$ worden verwijderd.

Elke hyperdeelgraaf van hypergraaf H is ook een deelhypergraaf van H . Maar een deelhypergraaf van H voortgebracht door V' is over het algemeen geen hyperdeelgraaf van H , omdat het geen vereiste is dat $X' \subseteq X$. De hypergraaf in Figuur 2.15(a) is een deelhypergraaf van hypergraaf H in Figuur 2.14, maar geen hyperdeelgraaf, omdat $x'_5 = \{v_2, v_4\} \not\subseteq X$, $x'_9 = \{v_2, v_3, v_8\} \not\subseteq X$ en $x'_{10} = \{v_4, v_6\} \not\subseteq X$, oftewel $X' \not\subseteq X$.

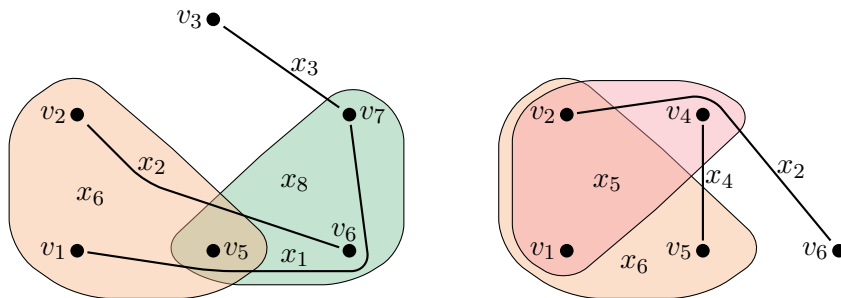


Figuur 2.14: Een voorbeeld van een hypergraaf $H = (V, X)$ met $V = \{v_1, \dots, v_8\}$ en $X = \{x_1, \dots, x_{10}\}$. De notatie van deze hypergraaf is als volgt $(\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}, \{\{v_1, v_7\}, \{v_2, v_6\}, \{v_3, v_7\}, \{v_4, v_5\}, \{v_1, v_2, v_4\}, \{v_1, v_2, v_5\}, \{v_3, v_4, v_8\}, \{v_5, v_6, v_7\}, \{v_1, v_2, v_3, v_8\}, \{v_4, v_5, v_6, v_7\}\})$.



(a) Voorbeeld van een deelhypergraaf $H' = (V', X')$ met $V' = \{v_2, v_3, v_4, v_6, v_8\}$ en $X' = \{x_2, x'_5, x_7, x'_9, x'_{10}\}$.

(b) Voorbeeld van de extensie $\text{Ex}(H') = (V^*, X^*)$ van deelhypergraaf H' met $V^* = V$ en $X^* = \{x_2, x_5, x_7, x_9, x_{10}\}$.



(c) Voorbeeld van een partiële hypergraaf $\tilde{H} = (\tilde{V}, \tilde{X})$ met $\tilde{V} = \{v_1, v_2, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ en $\tilde{X} = \{x_1, x_2, x_3, x_6, x_8\}$.

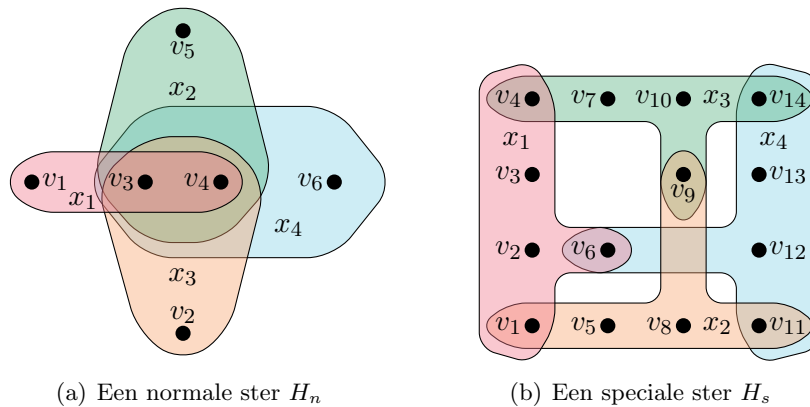
(d) Voorbeeld van een sectie hypergraaf $H \times V' = (V'', X')$ met $V' = \{v_1, v_2, v_4, v_5, v_6, v_8\}$, $V'' = V' \setminus \{v_8\}$ en $X' = \{x_2, x_4, x_5, x_6\}$.

Figuur 2.15: Voorbeelden van een deelhypergraaf H' , de extensie $\text{Ex}(H')$, een partiële hypergraaf \tilde{H} en een sectie hypergraaf $H \times V'$ van hypergraaf H in Figuur 2.14. De hypergrafen in Figuur (b), (c) en (d) zijn hyperdeelgrafen.

Een component $H' = (V', X')$ is een maximaal samenhangende hyperdeelgraaf van een hypergraaf $H = (V, X)$, dus $V' \subseteq V$ en $X' \subseteq X$. Met maximaal wordt er bedoeld dat $H' = H''$, als $H' = (V', X')$ een samenhangende hyperdeelgraaf is van een hyperdeelgraaf $H'' = (V'', X'')$ van $H = (V, X)$.

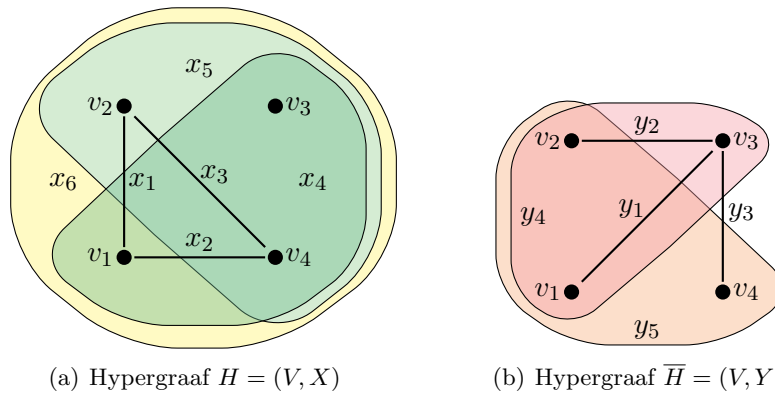
Een hyperdeelgraaf in een hyperboom, die wordt voortgebracht door twee of meer hyperkanten met een gemeenschappelijke knoop, wordt een *ster* genoemd. Er bestaan er twee verschillende soorten sterren in hyperbomen:

- Een ster heet *normaal* als de doorsnede van alle hyperkanten in de ster een niet-lege verzameling is.
- Een ster heet *speciaal* als de doorsnede van elk paar hyperkanten van de ster niet-lege is en de doorsnede van alle hyperkanten van de ster de lege verzameling is. Elke speciale ster bevat minstens drie hyperkanten en minstens één cykel.



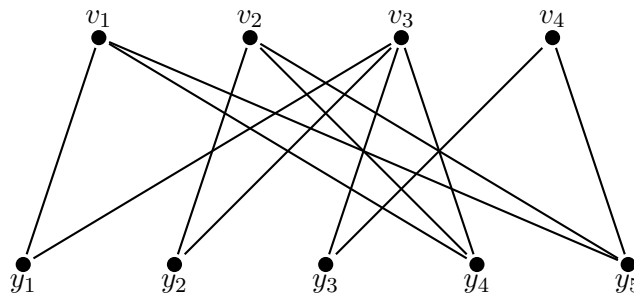
Figuur 2.16: Deze twee hypergraphen zijn voorbeelden van een hyperboom; als we een hyperkant weghalen, ontstaat een onsamenhangende hypergraaf, omdat er geïsoleerde knopen ontstaan. De doorsnede van alle hyperkanten in de ster H_n is een niet-lege verzameling, $x_1 \cap x_2 \cap x_3 \cap x_4 = \{v_3, v_4\} \neq \emptyset$, dus de ster H_n is een normale ster. De doorsnede van alle hyperkanten in de ster H_s is gelijk aan de lege verzameling, $x_1 \cap x_2 \cap x_3 \cap x_4 = \emptyset$. De doorsnede van elk willekeurig paar hyperkanten in de ster H_s is een niet-lege verzameling: $x_1 \cap x_2 = \{v_1\}$, $x_1 \cap x_3 = \{v_4\}$, $x_1 \cap x_4 = \{v_6\}$, $x_2 \cap x_3 = \{v_9\}$, $x_2 \cap x_4 = \{v_{11}\}$ en $x_3 \cap x_4 = \{v_{14}\}$. Dus de ster H_s is een speciale ster.

Definitie 2.3.2. Het complement van hypergraaf $H = (V, X)$ is hypergraaf $\overline{H} = (V, Y)$, waarbij Y de verzameling hyperkanten is die niet bevat zijn in X ; dus er geldt dat $X \cap Y = \emptyset$ en bovendien geldt dat $H' = (V, X \cup Y)$ een volledige hypergraaf is. Complementen van hypergraphen hebben de volgende eigenschap: $\overline{\overline{H}} = H$.



Figuur 2.17: Het complement van hypergraaf $H = (V, X)$ is hypergraaf $\bar{H} = (V, Y)$, omdat er geldt dat $H' = (V, X \cup Y)$ een volledige hypergraaf is en $X \cap Y = \emptyset$. We gebruiken de volgende notatie voor hypergraaf H ($\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_4\}, \{v_1, v_3, v_4\}, \{v_2, v_3, v_4\}, \{v_1, v_2, v_3, v_4\}\}$) en voor hypergraaf \bar{H} gebruiken we de notatie ($\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2, v_4\}\}$).

Definitie 2.3.3. Zij $H = (V, X)$ een hypergraaf zonder geïsoleerde knopen. De *incidentiegraaf* $G(H)$ van H is de graaf $G(H) = (V', E)$ met $V' = V \cup X$ en $E = \{\{v_i, x_j\} : v_i \in x_j, v_i \in V \text{ en } x_j \in X\}$.



Figuur 2.18: Een voorstelling van de incidentiegraaf $G(\bar{H})$ van hypergraaf \bar{H} in Figuur 2.17(b). We gebruiken de volgende notatie voor deze graaf ($\{v_1, v_2, v_3, v_4, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}, \{\{v_1, y_1\}, \{v_1, y_4\}, \{v_1, y_5\}, \{v_2, y_2\}, \{v_2, y_4\}, \{v_2, y_5\}, \{v_3, y_1\}, \{v_3, y_2\}, \{v_3, y_3\}, \{v_3, y_3\}, \{v_4, y_3\}, \{v_4, y_5\}\}$).

In de incidentiegraaf worden ook de hyperkanten van de hypergraaf toegevoegd als een knoop. Dus voor de incidentiegraaf geldt dat de verzameling knopen bestaat uit de knopen en de hyperkanten van de hypergraaf. In de incidentiegraaf wordt een knoop die een hyperkant voorstelt verbonden met de knopen die in de hypergraaf bevat zijn in deze hyperkant. Dus de kanten in de incidentiegraaf geven een voorstelling van de knopen die verbonden zijn

door een hyperkant in de hypergraaf. De incidentiegraaf van een hypergraaf is altijd een *bipartiete graaf*. We noemen een graaf $G = (V, E)$ bipartiet als de verzameling knopen V gesplitst kan worden in twee disjuncte niet-lege deelverzamelingen V_1 en V_2 , zodat voor de verzameling kanten geldt $E \subseteq \{\{v_1, v_2\} : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$. In de incidentiegraaf zijn de knopen die een knoop voorstellen en de knopen die een hyperkant voorstellen onderling niet verbonden door een kant. Dus de incidentiegraaf is een bipartiete graaf, omdat deze graaf bestaat uit twee disjuncte niet-lege deelverzamelingen met knopen die onderling niet verbonden zijn door een kant.

Een *wandeling* in een hypergraaf H is een rij van knopen en hyperkanten $(v_0, x_0, v_1, x_1, \dots, v_{s-1}, x_{s-1}, v_s)$, zodat voor alle $i \in \{1, \dots, s\}$ geldt dat de knopen v_{i-1} en v_i in hypergraaf H verbonden zijn door de hyperkant x_{i-1} , oftewel $v_{i-1}, v_i \in x_{i-1}$. In een wandeling is het niet nodig dat alle knopen $v_0, v_1, \dots, v_{s-1}, v_s$ en alle hyperkanten x_0, x_1, \dots, x_{s-1} verschillend zijn.

Lemma 2.3.4. *Zij $H = (V, X)$ een hypergraaf met $V = \{v_0, \dots, v_n\}$ en $X = \{x_0, \dots, x_m\}$ en zij $G(H)$ de incidentiegraaf. Stel P is een rij van knopen en hyperkanten $(v_0, x_0, v_1, x_1, \dots, v_{s-1}, x_{s-1}, v_s)$ in H . We noteren de rij met de corresponderende knopen in $G(H)$ met P_G . Dan geldt er dat:*

1. P een wandeling is in hypergraaf $H \iff P_G$ een wandeling is in de graaf $G(H)$ zonder twee dezelfde opeenvolgende knopen.
2. P een pad is in hypergraaf $H \iff P_G$ een pad is in de graaf $G(H)$.

Bewijs. 1. \Rightarrow Als P een wandeling is in H , dan geldt er voor twee opeenvolgende elementen van de rij P dat de knoop bevat is in de hyperkant in H . Er volgt dat de corresponderende knopen in $G(H)$ verbonden zijn. Dus P_G is een wandeling in $G(H)$. In P zijn alle opeenvolgende elementen verschillend, dus alle opeenvolgende knopen in P_G zijn verschillend.

\Leftarrow Als P_G een wandeling zonder twee dezelfde opeenvolgende knopen is in $G(H)$, dan geldt er voor twee opeenvolgende elementen in de rij P_G dat deze knopen verbonden zijn in $G(H)$. De corresponderende knopen in H zijn daarom bevat in de corresponderende hyperkanten. Dus P is een wandeling in H .

2. \Rightarrow Als P een pad is in H , dan is P een wandeling met disjuncte knopen en hyperkanten. Dit heeft als gevolg dat P_G een wandeling is met disjuncte knopen en kanten in $G(H)$, dus P_G is een pad in $G(H)$.
 \Leftarrow Als P_G een pad is in $G(H)$, dan is P_G een wandeling met disjuncte knopen en hyperkanten. Dit heeft als gevolg dat P een wandeling is met disjuncte knopen en kanten in H , dus P is een pad in $G(H)$. □

Stelling 2.3.5. Een hypergraaf $H = (V, X)$ is samenhangend \iff de incidentiegraaf $G(H)$ samenhangend is.

Bewijs. \Rightarrow We nemen aan dat $H = (V, X)$ samenhangend is. We bekijken twee willekeurige knopen in $G(H)$. We onderscheiden 3 gevallen:

- $v_i, v_j \in V$: v_i en v_j zijn beide knopen in H . Dus er bestaat een pad tussen de knopen v_i en v_j in H . Met **Lemma 2.3.4.** volgt er dat er een pad in $G(H)$ bestaat tussen de knopen v_i en v_j .
- $v_i \in V$ en $x_j \in X$: v_i is een knoop in H en x_j is een hyperkant in H . We kiezen een willekeurige knoop $v_j \in x_j$ in H . Er bestaat een pad P tussen de knopen v_i en v_j in H . Dus Px_j is een pad tussen de knopen v_i en x_j in $G(H)$.
- $x_i, x_j \in X$: x_i en x_j zijn beide hyperkanten in H . We kiezen twee willekeurige knopen $v_i \in x_i$ en $v_j \in x_j$ in H . Er bestaat een pad P tussen de knopen v_i en v_j in H . Dus x_iPx_j is een pad tussen de knopen x_i en x_j in $G(H)$.

Er bestaat een pad tussen twee willekeurige knopen in $G(H)$, dus $G(H)$ is samenhangend.

\Leftarrow We nemen aan dat $G(H)$ samenhangend is. We bekijken twee willekeurige knopen $v_i, v_j \in V$ in H . Stel dat er een pad bestaat tussen de knopen v_i en v_j in $G(H)$. Dan volgt er met **Lemma 2.3.4.** dat er een pad bestaat in H tussen de knopen v_i en v_j . Dus H is samenhangend. \square

Gevolg 2.3.6. Zij $H = (V, X)$ een hypergraaf en $G(H)$ de incidentiegraaf. Dan geldt er dat $G(H')$ een component is van $G(H)$, als H' een component is van H .

Bewijs. Zij H' een component van H en zij $G(H')$ de incidentiegraaf. Met **Stelling 2.3.5.** volgt er dat $G(H')$ samenhangend is. Zij $G(H'')$ een component van $G(H)$ die $G(H')$ bevat als hyperdeelgraaf en zij H'' een hyperdeelgraaf van H die H' bevat als hyperdeelgraaf. Dan is $G(H'')$ samenhangend en de incidentiegraaf van een hypergraaf H'' , met **Stelling 2.3.5.** volgt er dat H'' samenhangend is. H' is een maximaal samenhangende hyperdeelgraaf van H en een hyperdeelgraaf van hyperdeelgraaf H'' , dus er moet gelden dat $H' = H''$. Dit heeft als gevolg dat $G(H') = G(H'')$ en dus is G' een component van G . \square

Definitie 2.3.7. Zij $H = (V, X)$ een hypergraaf met $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ de verzameling knopen en $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ de verzameling hyperkanten. De *incidentiematrix* van hypergraaf H is de $n \times m$ matrix $A = (a_{ij})$ met:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als } v_i \in x_j \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

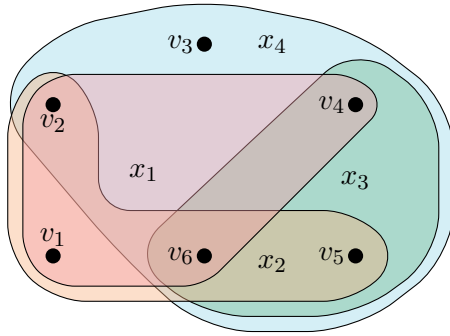
Dit geeft een matrix met n rijen en m kolommen, de matrix A bestaat alleen uit de getallen 0 en 1. De *getransponeerde* matrix A^T is de matrix waarbij de kolommen van A de rijen van A^T zijn en de rijen van A zijn de kolommen van A^T . De getransponeerde matrix van een $n \times m$ matrix is een $m \times n$ matrix. De getransponeerde matrix A^T is gedefinieerd door: $a_{ij}^T = a_{ji}$ voor $i \in \{1, \dots, m\}$ en $j \in \{1, \dots, n\}$. De getransponeerde matrix A^T van matrix A bestaat ook alleen uit de getallen 0 en 1. Verder heeft de getransponeerde van een matrix de volgende eigenschap: $(A^T)^T = A$.

$ \begin{array}{c} \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ v_1 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ v_2 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ v_3 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ v_4 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \\ \text{(a) Incidentiematrix } A \end{array} $	$ \begin{array}{c} \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ v_1 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ v_2 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ v_3 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ v_4 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ v_5 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ v_6 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \\ \text{(b) Getransponeerde matrix } A^T \end{array} $
--	--

Figuur 2.19: De incidentiematrix A is de incidentiematrix van de hypergraaf in Figuur 2.17(a). De matrix A^T is de getransponeerde matrix van de incidentiematrix A .

Definitie 2.3.8. Zij $H = (V, X)$ een niet-lege hypergraaf zonder geïsoleerde knopen met incidentiematrix A . De *duale* $H^T = (X^T, V^T)$ van hypergraaf H is de hypergraaf met incidentiematrix A^T , oftewel de getransponeerde matrix van incidentiematrix A van hypergraaf H . Een duale hypergraaf H^T van een hypergraaf H heeft, net zoals de incidentiematrix, de volgende eigenschap: $(H^T)^T = H$.

Zij $H = (V, X)$ een niet-lege hypergraaf zonder geïsoleerde knopen. Stel dat hypergraaf H uit n knopen en m hyperkanten bestaat, dan bestaat de duale $H^T = (X^T, V^T)$ uit m knopen en n hyperkanten; aangezien er geldt dat $|V| = \#V = |V^T| = \#V^T = n$ en $|X| = \#X = |X^T| = \#X^T = m$.



Figuur 2.20: Een voorstelling van de duale van de hypergraaf in Figuur 2.17(a). De incidentiematrix van deze hypergraaf is de matrix A^T in Figuur 2.19(b). De incidentiematrix A^T is de getransponeerde van de matrix A in Figuur 2.19(a).

Propositie 2.3.9. *De duale $H^T = (X^T, V^T)$ van een lineaire hypergraaf $H = (V, X)$ zonder geïsoleerde knopen is lineair.*

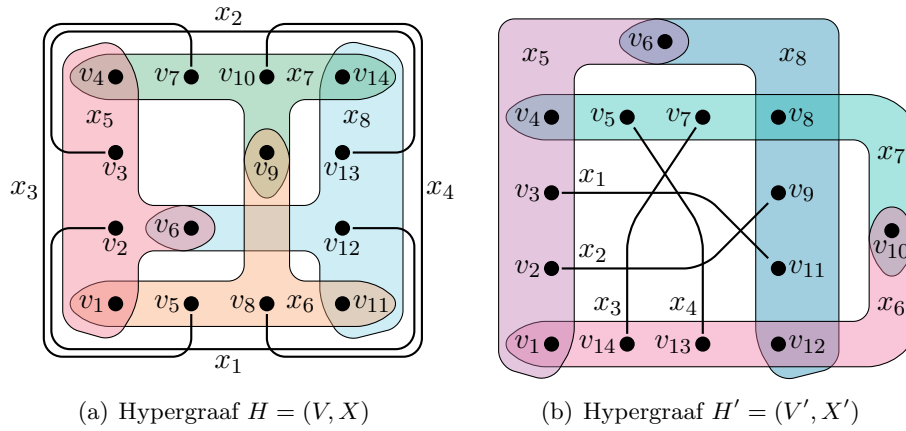
Bewijs. Zij $H = (V, X)$ een lineaire hypergraaf. Stel dat de duale $H^T = (X^T, V^T)$ niet lineair is. Dan zijn er in H^T twee disjuncte hyperkanten $v_i^T, v_j^T \in V^T$, waarvan de doorsnede minstens twee knopen bevat $x_i^T, x_j^T \in X^T$. Dus er volgt dat de knopen x_i^T en x_j^T bevat zijn in de hyperkanten v_i^T en v_j^T in H^T . Met de definitie van een duale hypergraaf volgt er dat de knopen v_i en v_j bevat zijn in de hyperkanten x_i en x_j in H . In dit geval is de hypergraaf H niet lineair. ζ Dus de duale H^T van een lineaire hypergraaf H zonder geïsoleerde knopen is lineair. \square

Definitie 2.3.10. Twee hypergrafen $H = (V, X)$ en $H' = (V', X')$ heten *isomorf* als er een bijectieve functie $f : V \rightarrow V'$ bestaat, waarvoor geldt dat $v_i \in x_j$ in H met $v_i \in V$ en $x_j \in X \iff f(v_i) \in x'_j = \{f(v_i) : v_i \in x_j\}$ in H' met $f(v_i) \in V'$ en $x'_j \in X'$. Dus de knoop v_i in hypergraaf H is bevat in hyperkant $x_j \iff$ de knoop $f(v_i)$ bevat is in hyperkant x'_j in hypergraaf H' . Als de hypergrafen H en H' isomorf zijn noteren we dit met $H \cong H'$.

Voor twee isomorfe hypergrafen H en H' geldt:

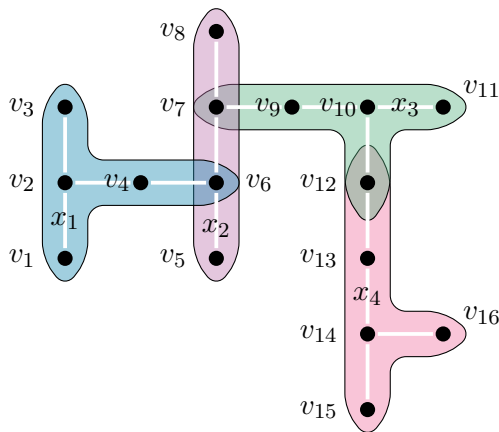
- $H \cong H' \iff \overline{H} \cong \overline{H'}$
- $H \cong H' \iff H^T \cong (H')^T$

Een hypergraaf $H = (V, X)$ is *zelf-complementair* als $H \cong \overline{H}$, dat wil zeggen de hypergraaf $H = (V, X)$ en het complement $\overline{H} = (V, Y)$ zijn isomorf. Een hypergraaf $H = (V, X)$ is *zelf-duale* als $H \cong H^T$, dat wil zeggen de hypergrafen $H = (V, X)$ en de duale $H^T = (X^T, V^T)$ zijn isomorf.



Figuur 2.21: De hypergrafen H en H' zijn isomorf, dus $H \cong H'$. Er bestaat een bijectieve functie $f : V' \rightarrow V$, zodat $v_i \in x_j$ in hypergraaf H met $v_i \in V$ en $x_j \in X \iff f(v_i) \in x'_j$ in hypergraaf H' met $f(v_i) \in V'$ en $x'_j \in X'$. Deze bijectie is gegeven door: $f(v_1) = v_1$, $f(v_2) = v_2$, $f(v_3) = v_3$, $f(v_4) = v_4$, $f(v_5) = v_{14}$, $f(v_6) = v_6$, $f(v_7) = v_7$, $f(v_8) = v_{13}$, $f(v_9) = v_{10}$, $f(v_{10}) = v_5$, $f(v_{11}) = v_{12}$, $f(v_{12}) = v_9$, $f(v_{13}) = v_{11}$ en $f(v_{14}) = v_8$.

Definitie 2.3.11. Een *gastgraaf* van een samenhangende hypergraaf $H = (V, X)$ is een samenhangende graaf $G = (V, E)$, waarvoor geldt dat alle hyperkanten van H worden voortgebracht door een samenhangende deelgraaf van G . Een gastgraaf $G = (V, E)$ van een onsamenshangende hypergraaf $H = (V, X)$ is een onsamenshangende graaf, zodat er een bijectie is tussen de componenten van G en H waarvoor geldt dat elk component G' van G een gastgraaf is van de bijbehorende component H' van H .



Figuur 2.22: Een voorbeeld van een gastgraaf G in het wit, elke hyperkant van hypergraaf H wordt voortgebracht door een samenhangende deelgraaf van G . We gebruiken de volgende notatie voor deze hypergraaf $(\{v_1, v_2, \dots, v_{15}, v_{16}\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_9, v_{11}\}, \{v_{13}, v_{15}\}, \{v_2, v_3, v_5\}, \{v_4, v_5, v_6, v_7\}, \{v_6, v_8, v_9, v_{10}\}, \{v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}\}\})$.

Opgaves:

Opgave 2.3.1. Zij $H = (V, X)$ een niet-lege hypergraaf met incidentiegraaf $G(H)$ en duale $H^T = (X^T, V^T)$ en stel dat $v_i \in V$ en $x_j \in X$.

(i) Bewijs dat $G(H \setminus \{x_j\}) = G(H) \setminus \{x_j\}$ voor alle $x_j \in X$.

(ii) Bewijs dat $G(H \setminus \{v_i\}) = G(H) \setminus \{v_i\}$ als $|V| = \#V \geq 2$

(iii) Bewijs dat $(H \setminus \{v_i\})^T = H^T \setminus \{v_i^T\}$, als $|V| = \#V \geq 2$

(iv) Bewijs dat $(H \setminus \{x_j\})^T = H^T \setminus \{x_j\}$, als H geen geïsoleerde knopen heeft, de hyperkant x_j geen knopen van graad 1 bevat en $|X| = \#X \geq 2$.

Uitwerking. (i) De hypergraaf $H \setminus \{x_j\}$ krijgen we door de hyperkant x_j sterk te verwijderen uit de hypergraaf H . In de graaf $G(H)$ komt dit overeen met het verwijderen van de knoop x_j en alle kanten die de knoop x_j bevatten. Dit is gelijk aan het sterk verwijderen van de knoop x_j in de graaf $G(H)$, dus dit geeft de graaf $G(H) \setminus \{x_j\}$. Dus er geldt dat $G(H \setminus \{x_j\}) = G(H) \setminus \{x_j\}$ voor alle $x_j \in X$. \square

(ii) We nemen aan dat $|V| = \#V \geq 2$. De hypergraaf $H \setminus \{v_i\}$ krijgen we door de knoop v_i sterk te verwijderen in de hypergraaf H . In hypergraaf H bestaat er geen hyperkant met een cardinaliteit kleiner dan 2. In de graaf $G(H)$ komt dit overeen met het verwijderen van de knoop v_i en alle kanten die de knoop v_i bevatten. Dit is gelijk aan het sterk verwijderen van de knoop v_i in de graaf $G(H)$, dus dit geeft de graaf $G(H) \setminus \{v_i\}$. Dus er geldt dat $G(H \setminus \{v_i\}) = G(H) \setminus \{v_i\}$ als $|V| = \#V \geq 2$. \square

(iii) We nemen aan dat $|V| = \#V \geq 2$. De hypergraaf $H \setminus \{v_i\}$ krijgen we door de knoop v_i sterk te verwijderen uit hypergraaf H . De hypergraaf $(H \setminus \{v_i\})^T$ krijgen we door de hyperkant v_i^T sterk te verwijderen uit hypergraaf H^T . Een geïsoleerde knoop in $(H \setminus \{v_i\})^T$ ontstaat door een geïsoleerde knoop in H^T of een knoop van graad 1 die bevat is in de hyperkant v_i^T . Dit is onmogelijk, omdat er in hypergraaf H geen hyperkant bestaat met een cardinaliteit kleiner dan 2. Dus er geldt dat $(H \setminus \{v_i\})^T = H^T \setminus \{v_i^T\}$, als $|V| = \#V \geq 2$. \square

(iv) We nemen aan dat hypergraaf H geen geïsoleerde knopen heeft, de hyperkant x_j geen knopen van graad 1 bevat en $|X| = \#X \geq 2$. Door de hyperkant x_j sterk te verwijderen uit hypergraaf H krijgen we de hypergraaf $H \setminus \{x_j\}$. De hypergraaf $(H \setminus \{x_j\})^T$ krijgen we door de hyperkant x_j sterk te verwijderen uit hypergraaf H^T . Een lege hyperkant in $(H \setminus \{x_j\})^T$ ontstaat door een geïsoleerde knoop in $H \setminus \{x_j\}$. Dit is onmogelijk, omdat hypergraaf H geen geïsoleerde knopen heeft en de hyperkant x_j geen knopen van graad 1 bevat. Dus er geldt dat $(H \setminus \{x_j\})^T = H^T \setminus \{x_j\}$ als hypergraaf H geen geïsoleerde knopen heeft, de hyperkant x_j geen knopen van graad 1 bevat en $|X| = \#X \geq 2$. \square

Opgave 2.3.2. Een ster heet *niet-triviaal* als de ster minstens 2 hyperkanten bevat. Bewijs dat een hyperboom H een niet-triviale ster is \iff de diameter van H gelijk is aan 2.

Uitwerking. \Rightarrow Als een hyperboom H een ster is met minstens twee hyperkanten, dan is de diameter van H gelijk aan 2.

\Leftarrow Als een hyperboom H diameter 2 heeft, dan volgt er dat H minstens twee hyperkanten heeft. Als H geen cyclen bevat dan is H een normale ster. Stel dat H minstens één cykel bevat. Als deze cykel bestaat uit minstens twee hyperkanten zonder een gemeenschappelijke knoop, dan is de diameter van H minstens 3. In dit geval is H geen ster, omdat de doorsnede van alle hyperkanten gelijk is aan de lege verzameling en de doorsnede van minimaal één paar hyperkanten in H is leeg. Als deze cykel niet bestaat uit hyperkanten zonder een gemeenschappelijke knoop, dan is de diameter van H gelijk aan 2. In dit geval is H een speciale ster, omdat de doorsnede van alle hyperkanten gelijk is aan de lege verzameling en de doorsnede van elk paar hyperkanten in H niet-leeg is. Dus een hyperboom H is een niet triviale ster \iff de diameter van H gelijk is aan 2. \square

Opgave 2.3.3. (i) Zij $H = (V, X)$ een hypergraaf, de *graad* van een hyperkant $x_j \in X$ is de cardinaliteit van deze hyperkant x_j , dus $d(x_j) = |x_j|$. Bewijs het volgende voor een hypergraaf $H = (V, X)$:

$$\sum_{v_i \in V} d(v_i) = \sum_{x_j \in X} d(x_j)$$

(ii) Bewijs dat een hypergraaf $H = (V, X)$ een oneven aantal knopen met een oneven graad heeft $\iff H = (V, X)$ heeft een oneven aantal hyperkanten met een oneven graad.

Uitwerking. (i) Zij $G(H)$ de incidentiegraaf van hypergraaf H . We tellen in deze graaf $G(H)$ de graden van de knopen die de knopen van H voorstellen en de graden van de knopen die de hyperkanten van H voorstellen. De incidentiegraaf $G(H)$ is een bipartiete graaf, dus de kanten van deze graaf verbinden de knopen in deze twee deelverzamelingen met elkaar. De som van de graden van deze twee deelverzamelingen is gelijk aan elkaar. Dus voor een hypergraaf $H = (V, X)$ geldt $\sum_{v_i \in V} d(v_i) = \sum_{x_j \in X} d(x_j)$. \square

(ii) De som van de graden van de knopen is gelijk aan de som van de graden van de hyperkanten. Er volgt dat de som van de graden van de knopen oneven is \iff de som van de graden van de hyperkanten oneven is. De som van de graden van de knopen is oneven als er een oneven aantal knopen zijn met een oneven graad. De som van de graden van de hyperkanten is oneven als er een oneven aantal hyperkanten zijn met een oneven graad. Dus er geldt dat een hypergraaf $H = (V, X)$ een oneven aantal knopen met een oneven graad heeft \iff hypergraaf $H = (V, X)$ een oneven aantal hyperkanten met een oneven graad heeft. \square

Opgave 2.3.4. (i) Bewijs dat een hypergraaf $H = (V, X)$ k -uniform is \iff de duale $H^T = (X^T, V^T)$ k -regulier is.

(ii) Zij $H = (V, X)$ een niet-lege hypergraaf met duale $H^T = (X^T, V^T)$. Bewijs dat de incidentiegrafen $G(H)$ en $G(H^T)$ isomorf zijn.

Uitwerking. (i) \Rightarrow Alle kolommen van de incidentiematrix A van H bestaan uit k enen en voor de rest nullen, als hypergraaf H k -uniform is. Dit komt omdat de kolommen van de incidentiematrix de hyperkanten van de hypergraaf voorstellen en alle hyperkanten in de hypergraaf bestaan uit k knopen als de hypergraaf k -uniform is. In de getransponeerde matrix A^T bestaan alle rijen uit k enen en voor de rest nullen, omdat de kolommen van de matrix A de rijen van de matrix A^T zijn. De rijen van de incidentiematrix A^T van H^T stellen de knopen van de hypergraaf H^T voor. Dit betekent dat elke knoop graad k heeft, omdat er k enen in elke rij van de incidentiematrix staan. Dus de duale H^T is k -regulier.

\Leftarrow Alle rijen van de incidentiematrix A^T van H bestaan uit k enen en voor de rest nullen, als de duale hypergraaf H^T k -regulier is. Dit komt omdat de rijen van de incidentiematrix de knopen van de hypergraaf voorstellen en alle knopen in de hypergraaf hebben graad k als de hypergraaf k -regulier is. In de getransponeerde matrix A bestaan alle kolommen uit k enen en voor de rest nullen, omdat de rijen van de matrix A^T de kolommen van de matrix A zijn. De kolommen van de incidentiematrix A van H stellen de hyperkanten van de hypergraaf H voor. Dit betekent dat elke hyperkant bestaat uit k knopen, omdat er k enen in elke kolom van de incidentiematrix staan. Dus de hypergraaf H is k -uniform. Dus er geldt dat een hypergraaf $H = (V, X)$ k -uniform is \iff de duale $H^T = (X^T, V^T)$ k -regulier is. \square

(ii) De verzameling knopen van incidentiegraaf $G(H)$ bestaat uit de verzameling knopen V en de verzameling hyperkanten X van hypergraaf H . De verzameling knopen van incidentiegraaf $G(H^T)$ bestaat uit de verzameling knopen X^T en de verzameling hyperkanten V^T van H^T . Met de definitie van de incidentiegraaf volgt er dat $|V \cup X| = |X^T \cup V^T|$. De incidentiegrafen $G(H)$ en $G(H^T)$ zijn isomorf, omdat er een bijectie $f : V \cup X \rightarrow X^T \cup V^T$ tussen de knopen bestaat gegeven door $f(v_i) = x_i^T$ voor alle $v_i \in V$ en $f(x_j) = v_j^T$ voor alle $x_j \in X$. Als twee knopen v_i en x_j verbonden zijn in de graaf $G(H)$, dan volgt er dat de knopen $f(v_i) = x_i^T$ en $f(x_j) = v_j^T$ verbonden zijn in $G(H^T)$. Aangezien er in hypergraaf H geldt dat de knoop v_i bevat is in de hyperkant $x_i \iff$ in de duale H^T de knoop x_i^T bevat is in de hyperkant v_i^T . Dus er geldt dat $G(H) \cong G(H^T)$. \square

3 Kleurbaarheid van hypergrafen

We kunnen ook de kleurbaarheid van hypergrafen beschouwen, net zoals in de grafentheorie. In de grafentheorie bestaan er knoop- en kantkleuringen. In dit hoofdstuk bekijken we verschillende kleuringen van hypergrafen. Vaak komen belangrijke combinatorische optimalisatieproblemen overeen met het kleuren van grafen of hypergrafen. Voor het modelleren en visualiseren van deze problemen kunnen we gebruik maken van grafen of hypergrafen. Het toewijzen van frequenties aan radiostations en mobiele telefoons wordt bijvoorbeeld ook gezien als een hypergraafkleuring.

Zij $H = (V, X)$ een hypergraaf zonder geïsoleerde knopen. Een verzameling $W \subseteq V$ heet *stabiel* als er geen hyperkant $x_j \in X$ is die bevat is in W , dus als voor alle $x_j \in X$ geldt dat $x_j \not\subseteq W \subseteq V$. Het *stabiliteitsgetal* $\alpha(H)$ is de grootste cardinaliteit van een stabiele verzameling in hypergraaf H .

Definitie 3.1. Zij $H = (V, X)$ een hypergraaf en $k \geq 2$ een geheel getal. Een *k-kleuring* van de knopen in hypergraaf H is het toekennen van kleuren aan de knopen, zodat:

- Elke knoop $v_i \in V$ in hypergraaf H precies één kleur krijgt.
- Er k verschillende kleuren worden gebruikt voor de knopen in hypergraaf H .
- Er geen enkele monochrome hyperkant is in hypergraaf H , dat wil zeggen dat er in hypergraaf H geen hyperkant is waarin alle knopen dezelfde kleur hebben.

Het *chromatisch getal* $\chi(H)$ is het minimale aantal kleuren k , zodat hypergraaf H een k -kleuring heeft.

Stelling 3.2. *Voor elke hyperboom geldt $\chi(H) = 2$.*

Bewijs. Zij $H = (V, X)$ een hyperboom. Als een hyperboom H uit één hyperkant bestaat, dan geldt er dat $\chi(H) = 2$. We nemen aan dat voor elke hyperboom met $|X| = \#X < n$ geldt dat $\chi(H) = 2$. Zij H een hyperboom waarvoor geldt dat $|X| = \#X = n \geq 2$ en $x_j \in X$. De componenten H_1, \dots, H_m van hypergraaf $H = (V, X \setminus x_j)$ zijn hyperbomen of geïsoleerde knopen. Dus voor elke H_i met $i = \{1, \dots, m\}$ geldt dat $\chi(H_i) \leq 2$. Als de knopen in de componenten H_1, \dots, H_m van hyperkant x_j allemaal dezelfde kleur hebben, dan veranderen we de kleuring van één component. Stel dat we de kleuring van de component H_1 aanpassen door elke knoop in H_1 de tegenovergestelde kleur te geven. Dan geldt er voor de hyperboom H dat $\chi(H) = 2$ dit zien we door de kleuringen van de componenten H_1, \dots, H_m . Dus voor elke hyperboom geldt $\chi(H) = 2$. \square

Een k -kleuring van een hypergraaf $H = (V, X)$ wordt gezien als een partitie van de verzameling knopen in k deelverzamelingen. Een partitie van een verzameling is een verdeling van die verzameling, zodat alle deelverzamelingen niet-leeg en paarsgewijs disjunct zijn. Een partitie van de verzameling V is (C_1, \dots, C_k) , zodat alle C_i met $i = \{1, \dots, k\}$ niet-leeg zijn en geen gemeenschappelijke knopen bevatten. Verder geldt er dat $\bigcup_{i=1}^k C_i = V$, oftewel de vereniging van alle C_i met $i = \{1, \dots, k\}$ is gelijk aan de verzameling knopen van hypergraaf H . In de partitie die overeenkomt met een k -kleuring van een hypergraaf $H = (V, X)$ geldt bovendien dat $x_j \not\subseteq C_i$ voor elke hyperkant $x_j \in X$ en voor alle deelverzamelingen C_i met $i = \{1, \dots, k\}$.

Definitie 3.3. Zij $H = (V, X)$ een hypergraaf en $k \geq 2$ een geheel getal. Een k -regenboogkleuring van de knopen in hypergraaf H is het toekennen van kleuren aan de knopen, zodat:

- Elke knoop $v_i \in V$ precies één kleur krijgt en er k verschillende kleuren worden gebruikt voor de knopen in hypergraaf H .
- Alle knopen die bevat zijn in een hyperkant in hypergraaf H een andere kleur hebben, dus er is in hypergraaf H geen hyperkant waarin twee of meer knopen dezelfde kleur hebben.

Het *regenboog chromatisch getal* $\chi'(H)$ is het minimale aantal kleuren k , zodat hypergraaf H een k -regenboogkleuring heeft. De rang van een hypergraaf is de maximale cardinaliteit van de hyperkanten. Het is duidelijk dat het regenboog chromatisch getal van hypergraaf H gelijk is aan of groter is dan de rang van H . Dus voor hypergraaf H geldt er dat $\chi'(H) \geq r(H)$.

Ook een k -regenboogkleuring van een hypergraaf $H = (V, X)$ wordt gezien als een partitie van de verzameling V in k deelverzamelingen. Voor de partitie, die overeenkomt met een k -regenboogkleuring van een hypergraaf $H = (V, X)$, geldt er dat $|x_j \cap C_i| \leq 1$ voor elke hyperkant $x_j \in X$ en voor alle deelverzamelingen C_i met $i = \{1, \dots, k\}$, oftewel alle kleuren van de knopen komen maximaal één keer voor in een hyperkant van hypergraaf H .

Lemma 3.4. Een k -regenboogkleuring van hypergraaf H is ook een k -kleuring van hypergraaf H . Dus er geldt voor elke hypergraaf H dat $\chi'(H) \geq \chi(H)$.

Bewijs. Zij $H = (V, X)$ een hypergraaf met een k -regenboogkleuring. Dan geldt er dat elke knoop $v_i \in V$ in hypergraaf H precies één kleur heeft. Verder geldt er dat er k verschillende kleuren worden gebruikt voor de knopen in hypergraaf H . Bovendien is er geen enkele monochrome hyperkant in een k -regenboogkleuring van hypergraaf H , want de kleuren van de knopen komen in een k -regenboogkleuring van hypergraaf H maximaal één keer voor in elke hyperkant. In een k -regenboogkleuring van hypergraaf H is er dus geen enkele hyperkant waarin alle knopen dezelfde kleur hebben. Dus een k -regenboogkleuring van hypergraaf H is ook een k -kleuring van hypergraaf H en hieruit volgt dat $\chi'(H) \geq \chi(H)$. \square

Definitie 3.5. Zij $H = (V, X)$ een hypergraaf met $|V| = \#V = n$ en $k \geq 2$ een geheel getal. Een *uniforme k -kleuring* van de knopen in hypergraaf H is het toekennen van kleuren aan de knopen, zodat:

- Er een k -kleuring van de knopen in hypergraaf H ontstaat.
- Het aantal knopen met dezelfde kleur in hypergraaf H steeds gelijk is.

Een uniforme k -kleuring van een hypergraaf $H = (V, X)$ met $|V| = \#V = n$ komt overeen met een partitie van de verzameling V in k deelverzamelingen. Voor deze partitie (C_1, \dots, C_k) van de verzameling knopen van hypergraaf $H = (V, X)$ geldt bovendien dat de cardinaliteit van alle deelverzamelingen C_i met $i = \{1, \dots, k\}$ gelijk is, dus er geldt dat $|C_i| = \frac{n}{k}$ waarbij $\frac{n}{k}$ een geheel getal is. Het aantal knopen in een deelverzameling C_i met $i = \{1, \dots, k\}$ is gelijk aan het aantal knopen met dezelfde kleur, dit is steeds hetzelfde in een hypergraaf H met een uniforme k -kleuring.

Definitie 3.6. Zij $H = (V, X)$ een hypergraaf en $k \geq 2$ een geheel getal. Een *conflictvrije k -kleuring* van de knopen in hypergraaf H is het toekennen van kleuren aan de knopen, zodat:

- Er een k -kleuring van de knopen in hypergraaf H ontstaat.
- Elke hyperkant minimaal één uniek gekleurde knoop bevat.
- Elke hyperkant het maximale aantal verschillende kleuren bevat.

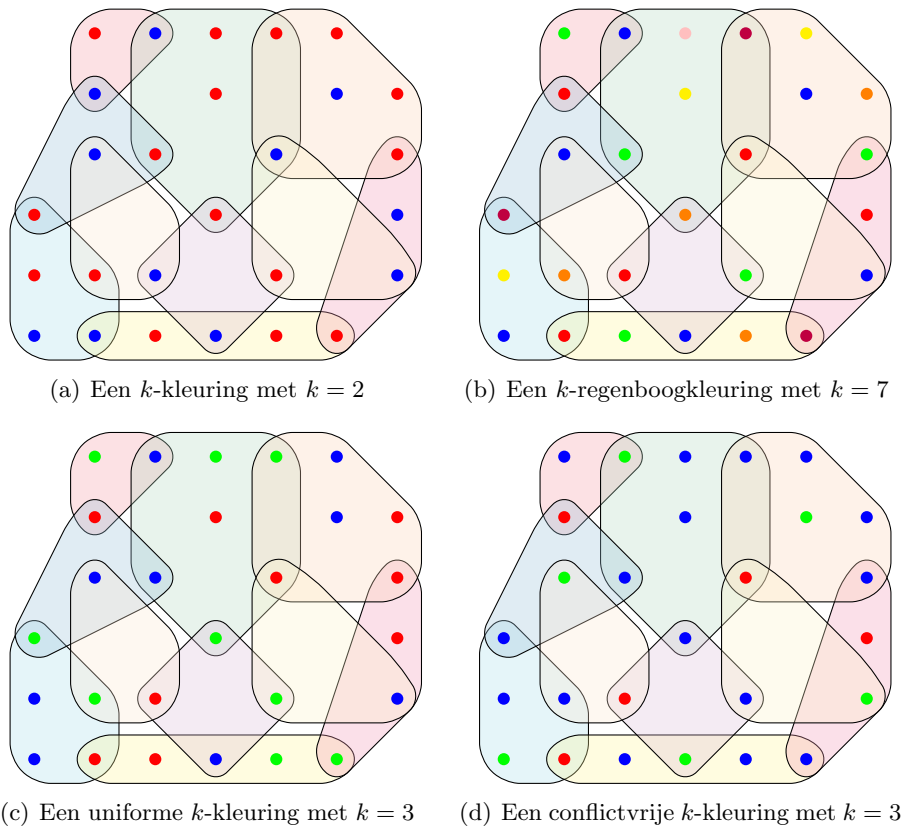
Een conflictvrije k -kleuring van een hypergraaf $H = (V, X)$ wordt gezien ook als een partitie van de verzameling V in k deelverzamelingen. In deze partitie (C_1, \dots, C_k) van de verzameling knopen van hypergraaf $H = (V, X)$ geldt bovendien voor elke hyperkant $x_j \in X$ van hypergraaf H dat het aantal verschillende kleuren in een hyperkant gelijk is aan $\min\{|x_j|, k\}$. Dus elke hyperkant in hypergraaf H bevat het maximale aantal verschillende kleuren.

Lemma 3.7. Zij $H = (V, X)$ een hypergraaf. Een conflictvrije k -kleuring van hypergraaf H is een k -regenboogkleuring $\iff k \geq r(H)$.

Bewijs. \Rightarrow Stel dat een conflictvrije k -kleuring van hypergraaf H overeenkomt met een k -regenboogkleuring van hypergraaf H . Dan zijn er minimaal $k \geq r(H)$ kleuren gebruikt, omdat alle knopen die bevat zijn in een hyperkant van hypergraaf H een andere kleur hebben.

\Leftarrow Stel dat er voor een conflictvrije k -kleuring van hypergraaf H geldt dat $k \geq r(H)$. Dan hebben alle knopen die bevat zijn in een hyperkant van hypergraaf H een andere kleur, omdat er in een conflictvrije k -kleuring geldt dat het aantal verschillende kleuren in een hyperkant gelijk is aan $\min\{|x_j|, k\}$. Dus in dit geval komt een conflictvrije k -kleuring van hypergraaf H overeen met een k -regenboogkleuring van hypergraaf H . \square

Een toepassing van een conflictvrije k -kleuring is het frequentietoewijzing probleem in mobiele netwerken. Een mobiel netwerk bestaat uit zendmasten, deze worden weergegeven door de knopen van een hypergraaf. Als een gebruiker binnen bereik is van meerdere zendmasten, dan zijn er meer zendmasten beschikbaar voor de communicatie, dit wordt weergegeven door de hyperkanten in de hypergraaf. Als meerdere zendmasten dezelfde frequentie gebruiken, dan kan de communicatie verstoord worden door interferentie. We kunnen interferentie voorkomen door elke zendmast een eigen frequentie te geven, maar we willen het aantal frequenties minimaliseren. We kunnen interferentie ook voorkomen door zendmasten met een unieke frequentie te gebruiken, de uniek gekleurde knopen in elke hyperkant van een hypergraaf met een conflictvrije k -kleuring zijn een voorstelling van deze zendmasten.

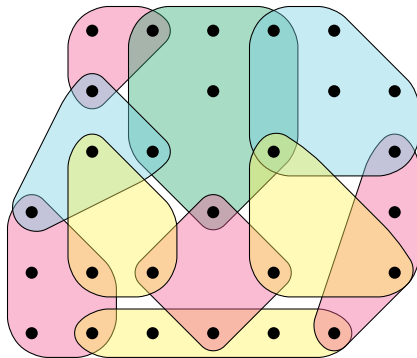


Figuur 3.1: Een voorbeeld van een k -kleuring, een k -regenboogkleuring, een uniforme k -kleuring en een conflictvrije k -kleuring van de knopen van een hypergraaf $H = (V, X)$. Deze hypergraaf heeft 27 knopen en 10 hyperkanten. Deze kleuringen zijn allemaal voorbeelden van een k -kleuring met een verschillende waarde voor k . Bovendien zijn de kleuringen in Figuur (b), (c) en (d) voorbeelden van een conflictvrije k -kleuring.

Definitie 3.8. Zij $H = (V, X)$ een hypergraaf en $k \geq 2$ een geheel getal. Een k -kleuring van de hyperkanten in hypergraaf H is het toekennen van kleuren aan de hyperkanten, zodat:

- Elke hyperkant $x_j \in X$ in hypergraaf H precies één kleur krijgt.
- Er k verschillende kleuren worden gebruikt voor de hyperkanten in hypergraaf H .
- Twee verschillende hyperkanten met een niet-lege doorsnede krijgen verschillende kleuren.

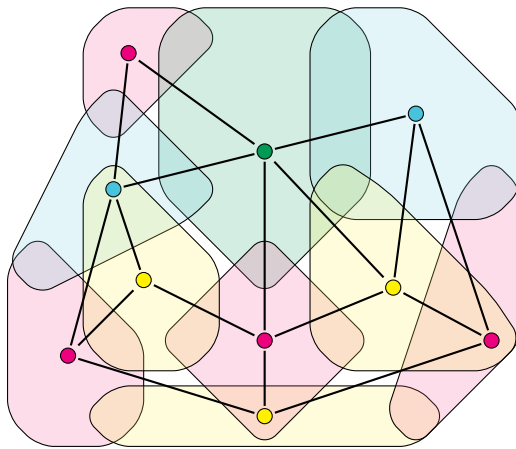
De *chromatische index* $q(H)$ is het minimale aantal kleuren k zodat hypergraaf H een hyperkant k -kleuring heeft.



Figuur 3.2: Een voorbeeld van een k -kleuring van hyperkanten van hypergraaf $H = (V, X)$. Deze hypergraaf heeft 27 knopen en 10 hyperkanten. Er zijn 4 verschillende kleuren gebruikt in deze hyperkant k -kleuring van hypergraaf H , dus er geldt dat $k = 4$.

Lemma 3.9. De chromatische index $q(H)$ van hypergraaf H is gelijk aan het chromatisch getal $\chi(L(H))$ van de lijngraaf $L(H)$.

Bewijs. Zij $H = (V, X)$ een hypergraaf, waarvoor geldt dat $q(H) = k$, met een k -kleuring van de hyperkanten. Elke hyperkant in hypergraaf H krijgt precies één kleur, dus elke knoop in de lijngraaf $L(H)$ krijgt ook precies één kleur. Er worden k verschillende kleuren gebruikt voor de hyperkanten in hypergraaf H , hieruit volgt dat k verschillende kleuren worden gebruikt voor de knopen in de lijngraaf $L(H)$. Verder krijgen twee verschillende hyperkanten met een niet-lege doorsnede een andere kleur, dit heeft als gevolg dat er geen monochrome kanten zijn in de lijngraaf $L(H)$. Dus een k -kleuring van de hyperkanten in een hypergraaf komt overeen met een k -kleuring van de knopen in de lijngraaf $L(H)$. Er zijn k kleuren nodig om de hyperkanten met gemeenschappelijke knopen in hypergraaf H een andere kleur te kunnen geven, hieruit volgt dat er ook k kleuren nodig zijn om de knopen die verbonden zijn in de lijngraaf $L(H)$ een andere kleur te kunnen geven. Dus de chromatische index $q(H)$ van hypergraaf H is gelijk aan het chromatisch getal $\chi(L(H))$ van de lijngraaf $L(H)$. \square



Figuur 3.3: De gelijkwaardige k -kleuring van de knopen in de lijngraaf $L(H)$ van de hypergraaf in Figuur 3.2. Deze graaf bestaat uit 10 knopen en 17 kanten. Er zijn 4 verschillende kleuren gebruikt in de k -kleuring van de lijngraaf $L(H)$, dus $k = 4$.

Opgaves:

Opgave 3.1. Bekijk de hypergraaf in Figuur 1.4

(i) Geef een k -kleuring met $k = \chi(H)$ van het Fano-vlak.

(ii) Geef een k -regenboogkleuring met $k = \chi'(H)$ van het Fano-vlak.

Uitwerking. (i) Er geldt dat $k = \chi(H) = 3$ voor een k -kleuring van het Fano-vlak. Voorbeeld: geef de knopen v_1, v_3, v_5, v_6 de kleur rood, de knopen v_4, v_7 de kleur blauw en de knoop v_2 de kleur groen.

(ii) Er geldt dat $k = \chi'(H) = 7 \geq r(H)$ voor een k -regenboogkleuring van het Fano-vlak, dus elke knoop v_i met $i \in \{1, \dots, 7\}$ krijgt een andere kleur.

Opgave 3.2. (i) Bewijs dat er voor een hypergraaf $H = (V, X)$ met $|V| = \#V = n$, geldt dat $\chi(H) \cdot \alpha(H) \geq n$.

(ii) Bewijs dat er voor een hypergraaf $H = (V, X)$ met $|V| = \#V = n$, geldt dat $\chi(H) + \alpha(H) \geq n + 1$.

Uitwerking. (i) Zij $H = (V, X)$ een hypergraaf met chomatisch getal $\chi(H) = k$ en (C_1, \dots, C_k) een k -kleuring. We weten dat voor deze partitie geldt dat $x_j \not\subseteq C_i$ voor elke hyperkant $x_j \in X$ en voor alle deelverzamelingen C_i met $i = \{1, \dots, k\}$. Dus alle deelverzamelingen C_i met $i = \{1, \dots, k\}$ zijn stabiele verzamelingen. Hieruit volgt voor alle deelverzamelingen C_i met $i = \{1, \dots, k\}$ dat $|C_i| \leq \alpha(H)$. Dus voor elke hypergraaf H geldt er dat $n = \sum_{i=1}^k |C_i| \leq k \cdot \alpha(H) = \chi(H) \cdot \alpha(H)$. \square

(ii) We nemen aan dat S een stabiele verzameling is, waarvoor geldt dat $|S| = \alpha(H)$. We kunnen alle knopen in de verzameling S dezelfde kleur geven. We gebruiken $n - \alpha(H)$ andere kleuren om de overige knopen in de verzameling $V \setminus S$ allemaal een verschillende kleur te kunnen geven. Hieruit volgt dat $\chi(H) \leq n - \alpha(H) + 1$. Dus voor elke hypergraaf H geldt er dat $\chi(H) + \alpha(H) \leq n + 1$. \square

Opgave 3.3. Bekijk de hypergraaf in Figuur 3.1.

(i) Geef een k -kleuring met $k = 3$ van deze hypergraaf. Deze k -kleuring mag niet gelijk zijn aan de uniforme k -kleuring in Figuur 3.1(c) of aan de conflictvrije k -kleuring in Figuur 3.1(d).

(ii) Geef een uniforme k -regenboogkleuring met $k = 9$ van deze hypergraaf.

(iii) Geef een conflictvrije k -kleuring met $k = 4$ van deze hypergraaf.

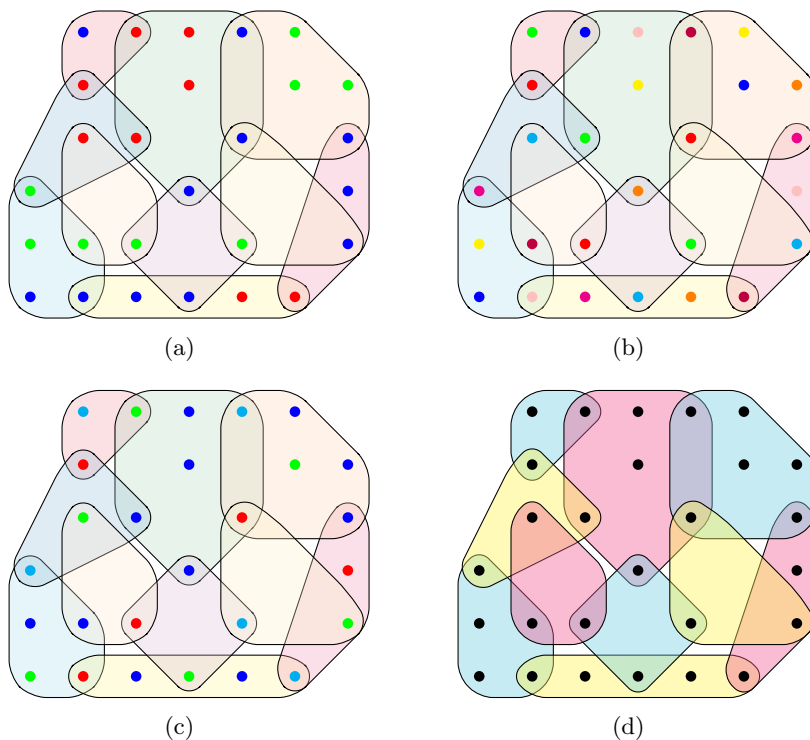
Uitwerking. (i) Figuur 3.4(a) is een voorbeeld van een k -kleuring met $k = 3$ van de hypergraaf in Figuur 3.1. Deze kleuring is niet gelijk aan de uniforme k -kleuring in Figuur 3.1(c) en aan de conflictvrije k -kleuring in Figuur 3.1(d).

(ii) Figuur 3.4(b) is een voorbeeld van een uniforme k -regenboogkleuring met $k = 9$ van de hypergraaf in Figuur 3.1.

(iii) Figuur 3.4(c) is een voorbeeld van een conflictvrije k -kleuring met $k = 4$ van de hypergraaf in Figuur 3.1.

Opgave 3.4. Bewijs voor de hypergraaf in Figuur 3.2 dat $q(H) = 3$.

Uitwerking. In Figuur 3.2 is er k -kleuring van de hyperkanten met $k = 4$ gegeven van deze hypergraaf, dus er volgt dat $q(H) \leq 4$. Er bestaat een k -kleuring van de hyperkanten met $k = 3$, deze is gegeven in Figuur 3.4(d), dus er volgt dat $q(H) \leq 3$. Met **Lemma 3.9**. volgt er dat $q(H) = 3$, omdat de K_3 bevat is in de lijngraaf $G(H)$ van deze hypergraaf.



Figuur 3.4

4 Referenties

- Amin Bahmanian, M. & Šajna, M. (2015). *Hypergraphs: connection and separation*. University of Ottawa, Ottawa.
- Berge, C. (1976). *Graphs and Hypergraphs*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company
- Bretto, A. (2013). *Hypergraph Theory An Introduction*. Cham: Springer.
- Bujtás, C., Tuza, Z. & Voloshin, V. (2015). Hypergraph colouring. *Topics in Chromatic Graph Theory*, (Hoofdstuk 11). Cambridge: Cambridge University Press.
- Kostochka, A., Kumbhat, M. & Luczak, T. (2012). *Conflict-free Colorings of Uniform Hypergraphs with few Edges*.
- Li, K., Pan, Y. & Zheng, S. Q. (1998). *Parallel Computing Using Optical Interconnections*. Boston: Kluwer Academic Publishers.
- Nieminen, J. & Peltola, M. (1999). *Hypertrees*. University of Oulu, Oulu.
- Schrijver, A. (2015). *Grafen: Kleuren en Routeren*.
- Smorodinsky, S. (2018). *Conflict-Free Coloring and its Applications*.
- Verstraëte, J. (2015). *Introduction to hypergraphs*.

5 Reflectie

Ik zag het als een uitdaging om mijn bachelorscriptie te schrijven in de vorm van een module die geschikt is voor een lessenreeks over hypergrafen aan leerlingen op de middelbare school. Er zijn verschillende niet-wiskundige aspecten waar ik over heb moeten nadenken tijdens het uitwerken van mijn scriptie, doordat ik mijn bachelorscriptie heb gekoppeld aan het onderwijs. Ik zie deze koppeling nog steeds als een interessante toevoeging aan mijn bachelorscriptie, omdat het wiskundeonderwijs mij erg aan spreekt.

Een van de niet-wiskundige aspecten waar ik aandacht aan heb besteed is het bepalen van een doelgroep voor deze module. Ik heb de doelgroep 5 of 6 vwo van de middelbare school gekozen, omdat deze doelgroep de meeste mogelijkheden biedt binnen de wiskunde in mijn bachelorscriptie. Verder is het belangrijk om de vereiste voorkennis voor deze module vast te stellen. Voorkennis over grafentheorie is onmisbaar bij het gebruik van deze module, aangezien er verschillende modules over grafentheorie bestaan heb ik er voor gekozen om dit onderdeel niet gedetailleerd te verwerken in mijn scriptie.

Er zijn verschillende opgaves verspreid over de hoofdstukken, zodat de leerlingen de leerstof over hypergrafen eigen kunnen maken. Voor het maken van enkele opgaves kan kennis over kansberekening van pas komen, daarnaast is affiniteit met wiskundige bewijzen gewenst bij bepaalde opgaven. Ook is er een toepassing van hypergrafen toegevoegd, zodat het onderwerp aansluit bij de belevingswereld van de leerlingen. Het is van belang dat het aantal opgaves verder wordt uitgebreid bij het gebruik van deze module voor een betere opname van de leerstof. Bovendien kunnen er meerdere toepassingen van hypergrafen worden verwerkt in een uitbreiding van het aantal opgaves.

Er zijn diverse voorbeelden van voorstellingen van zowel grafen als hypergrafen toegevoegd, omdat het belangrijk is om de ingewikkelde leerstof te visualiseren voor leerlingen. Op deze manier kunnen leerlingen zelf een voorstelling maken van de leerstof en daardoor is de leerstof eenvoudiger om te begrijpen. In deze module wilde ik leerlingen ook graag kennis laten maken met de academische wiskunde, hiervoor was een geschikt onderwerp vereist. Er is een bijlage toegevoegd met de betekenis van de gebruikte wiskundige symbolen met een simpel voorbeeld, om de leerlingen kennis te laten maken met de academische notatie.

Het was lastig om de wiskunde in deze module eenvoudig te houden voor de doelgroep en tegelijkertijd de academische notatie te gebruiken. Dus het was belangrijk om alles duidelijk, maar ook wiskundig gezien correct te noteren. Om het eenvoudig te houden heb ik er voor gekozen om bepaalde complexe definities, zoals de planariteit van hypergrafen, niet aan bod te laten komen.

Bijlage: Betekenis van wiskundige symbolen

- $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

We gebruiken accolades $\{\dots\}$ om een verzameling aan te geven.

- $|X| = \#X = 5$

We gebruiken deze notatie voor de cardinaliteit of de grootte van een verzameling, oftewel het aantal elementen in een verzameling.

- $2 \in X$

Met het symbool \in bedoelen we ‘is een element van’.

- \emptyset

Met het symbool \emptyset bedoelen we de lege verzameling, oftewel de verzameling zonder elementen.

- $\{2, 4\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Met het symbool \subseteq bedoelen we ‘is gelijk aan of een deelverzameling van’.

- $\{2, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Met het symbool \subset bedoelen we ‘is een deelverzameling van’.

- $\{2, 6\} \not\subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Met het symbool $\not\subseteq$ bedoelen we ‘is niet gelijk aan en geen deelverzameling van’.

- $\{2, 6\} \not\subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Met het symbool $\not\subset$ bedoelen we ‘is geen deelverzameling van’.

- $X \setminus \{1, 3, 5\} = \{2, 4\}$

Met het symbool \setminus bedoelen we het complement. Het complement van de verzameling $\{1, 3, 5\}$ is de verzameling die bestaat uit alle elementen van X die niet bevat zijn in de verzameling $\{1, 3, 5\}$.

- $\{1, 3, 5\} \cup \{2, 4\} = X$ en $\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5\} = X$

Met het symbool \cup bedoelen we de vereniging. De vereniging van twee of meer verzamelingen is de verzameling die bestaat uit elementen in de samenstelling van deze verzamelingen.

- $X \cap \{2, 4, 6\} = \{2, 4\}$

Met het symbool \cap bedoelen we de doorsnede. De doorsnede van twee of meer verzamelingen is de verzameling die bestaat uit de gemeenschappelijke elementen in de samenstelling van deze verzamelingen.

- $A \iff B$

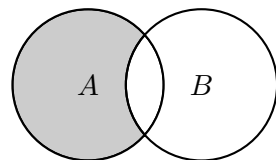
Met het symbool \iff bedoelen we ‘dan en slechts dan als’, oftewel A en B gelden allebei of allebei niet.

- \nmid

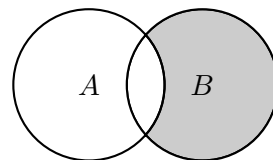
Het symbool \nmid gebruiken we voor een tegenspraak, oftewel als de voorlopige conclusie niet overeenkomt met eerdere aannames.

- $\{x \in X : 2 \leq x \leq 4\} = \{2, 3, 4\}$

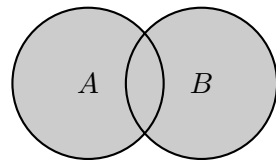
We gebruiken een dubbele punt in een verzameling om aan te geven dat de elementen in deze verzameling aan bepaalde eigenschappen voldoen.



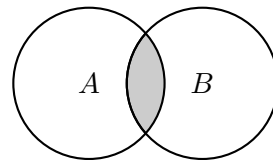
Het complement $A \setminus B$



Het complement $B \setminus A$



De vereniging $A \cup B$



De doorsnede $A \cap B$