De Stelling van Vizing

en het totale kleuring-vermoeden

Maartje Roks

s4490282

7 juli 2019

Bachelor Wiskunde
Radboud Universiteit Nijmegen
Begeleider: Wieb Bosma
2e lezer: Arne Smeets

Inhoudsopgave

1 Inleiding

Voor deze scriptie toveren we onze kleurpotlodendoos weer tevoorschijn, want we gaan het kleuren van grafen analyseren. Van punten tot lijnen tot zelfs allebei tegelijk. We gaan er hierbij vanuit dat we het over enkelvoudige grafen hebben, tenzij aangegeven dat we inderdaad over multigrafen praten. We zullen veelvuldig gebruik maken van het begrip $\Delta(G)$, de maximale graad van een graaf G. Dit is het maximale aantal lijnen dat grenst aan een punt van G. Het kleuren van de lijnen van een graaf, zodanig dat aangrenzende lijnen niet gekleurd mogen worden met dezelfde kleur, is in eerste instantie de drijfveer achter deze scriptie. Het lijnkleurgetal, $\chi'(G)$, is het minimaal aantal kleuren dat we nodig hebben om de lijnen van een graaf te kleuren. De eerste helft van deze scriptie zal dan ook met name gaan over het zoeken van de grenzen voor $\chi'(G)$. Er is namelijk een Stelling van Vizing die zegt dat voor alle grafen G geldt dat $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$. Dit bewijs gaan we in Hoofdstuk 2 bekijken, waarbij de stelling en het bewijs gebaseerd zijn op kennis uit [5].

Het kleuren van de punten van een graaf, zodanig dat aangrenzende punten niet gekleurd mogen worden met dezelfde kleur, zal niet op zichzelf staand aan bod komen. Echter, gaan we in de tweede helft van deze scriptie wel in op het maken van totale kleuringen van grafen, waarbij we zowel punten als lijnen kleuren, en de kennis van het kleuren van punten dus toch belangrijk wordt. Over $\chi(G)$, het puntkleuringsgetal van de graaf G, gedefinieerd door het minimaal aantal kleuren die we nodig hebben om de punten van een graaf te kleuren, is al het volgende bekend met de Stelling van Brooks. (Zie [2] voor het bewijs.)

Stelling 1.1 (Stelling van Brooks)**.** *Voor alle grafen G geldt dat $\chi(G) \leq \Delta(G)$, uitgezonderd alle volledige grafen K_n, en cykelgrafen C_n op een oneven aantal punten. Hiervoor geldt dat $\chi(K_n) = \Delta(K_n) + 1$ en dat $\chi(C_n) = \Delta(C_n) + 1$ als n oneven.*

Voor totale kleuringen gaan we nog de bovengrenzen onderzoeken voor zulke typische grafen en ook voor volledig bipartiete grafen $K_{m,n}$.

Voor lijnkleuringen nemen we ook aan dat we over bepaalde typen grafen al weten wat het lijnkleuringsgetal is. Zo kunnen we eenvoudig zien dat voor cykelgrafen geldt dat $\chi'(C_n) = \Delta(C_n) = 2$ als n (het aantal punten) even is en dat $\chi'(C_n) = \Delta(C_n) + 1$ als n oneven is. Verder weten we ook dat volledige grafen K_n (waarbij alle punten met alle andere punten verbonden zijn), geldt dat $\chi'(K_n) = \Delta(K_n)$ als n even en dat $\chi'(K_n) = \Delta(K_n) + 1 = n$ als n oneven is (zie [1]). Ten slotte, weten we met de Stelling van König ook voor bipartiete grafen wat het lijnkleurgetal is. (Zie paragraaf 4.4 voor meer uitleg of zie het bewijs in [4].)

Stelling 1.2 (Stelling van König)**.** *Voor alle bipartiete grafen $G = K_{m,n}$ geldt dat $\chi'(G) = \Delta(G)$.*

Deze 3 typen grafen gaan we voor totale kleuringen uitgebreid verder analyseren. Ook zullen we in Hoofdstuk 4 zien dat we in het algemeen voor alle grafen G vermoeden dat voor het totale kleuringsgetal $\chi''(G)$ geldt dat $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$.

2 De Stelling van Vizing

In dit hoofdstuk analyseren we de hoofdstelling van deze scriptie, namelijk de Stelling van Vizing. Deze stelling is als volgt.

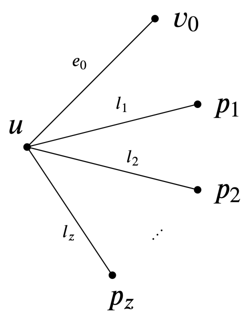
Stelling 2.1 (Stelling van Vizing)**.** *Als G een niet-lege graaf is, dan is $\chi'(G) \leq \Delta(G)+1$.*

De stelling heeft een intrigerend bewijs en daarom wordt deze dan ook uitvoerig besproken in paragraaf 2.1. Merk op dat, omdat $\Delta(G)$ een ondergrens is voor $\chi'(G)$, er uit de Stelling van Vizing volgt dat geldt dat $\chi'(G)$ dus altijd gelijk is aan $\Delta(G)$ of $\Delta(G)+1$.

2.1 Het bewijs van de Stelling van Vizing

Bewijs. Hier ga ik het bewijs van de stelling geven. Voordat we het daadwerkelijke bewijs gaan bekijken, gaan we eerst nog even onderzoekend te werk.

We gaan de stelling bewijzen door middel van tegenspraak. Dus stel de ongelijkheid is niet waar. Dit betekent dat, voor de grafen die niet voldoen aan de ongelijkheid, nu geldt dat $\chi'(G) > \Delta(G)+1$. Laten we nu een graaf G bekijken waarvoor geldt dat G het kleinste aantal lijnen heeft zodanig dat de ongelijkheid uit de stelling niet geldt. Dit wil zeggen, dat G niet $\Delta(G)+1$ lijnkleurbaar is, maar dat de graaf $G' \subset G$, gemaakt door het verwijderen van een lijn e van G, wel $(\Delta(G')+1)$-lijnkleurbaar is. Omdat $\Delta(G') \leq \Delta(G)$ geldt dat G' ook $(\Delta(G)+1)$-lijnkleurbaar is. Dus nu hebben we een constructie gemaakt waarin G' lijnkleurbaar is met $\Delta(G)+1$ kleuren, ofwel alle lijnen van G, behalve de lijn $e = uv_0$, is kleurbaar met $\Delta(G)+1$ kleuren. Neem nu aan dat we een concrete $(\Delta(G)+1)$ lijnkleuring voor G' hebben. Alle lijnen van G zijn dus gekleurd, behalve de lijn $e = uv_0$. Deze lijn is nu kleurloos en het doel van het bewijs is dat we gaan laten zien dat ook deze lijn toch met een van de $\Delta(G)+1$ kleuren gekleurd kan worden.



Figuur 1

Opmerking. De benamingen van de lijnen l_i en de punten p_i zijn hier niet van belang en dienen enkel als impressie van de omgeving van het punt u in deze beginsituatie van de graaf en dat er naast $e = e_0 (= uv_0)$ nog z andere lijnen aangrenzend aan het punt u zijn.

In deze volgende stap gaan we een rijtje construeren van verschillende lijnen $e_0, e_1, ..., e_k$ (die we zo gaan noemen) die allemaal samenkomen in het punt u. Allereerst zullen we gebruik maken van het begrip duale kleur, dat we als volgt definiëren.

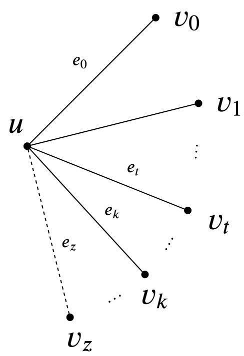
Voor elke lijn $e' = uv'$ van een graaf G die aan het punt u grenst, definiëren we zijn 'duale kleur', als een van de $\Delta(G)+1$ kleuren die niet gebruikt is om de lijnen te kleuren die aan het punt v' grenzen.

Opmerking. Iedere lijn in de graaf G heeft altijd een duale kleur, want het punt v' heeft maximaal $\Delta(G)$ lijnen, dus er blijft minstens 1 kleur uit de verzameling $\Delta(G)+1$ kleuren over om als duale kleur voor de lijn e' te kiezen.

Onze 'speciale' lijn $e = uv_0$ noemen we hier $e_0 = uv_0$ en deze heeft duale kleur α_1. Dan moet er een lijn zijn, noem deze e_1, die de kleur α_1 heeft en aan het punt u grenst. Dit is waar, want stel er bestaat geen lijn vanuit het punt u met de kleur α_1. We weten dat vanuit het punt v_0 ook geen lijn is met de kleur α_1, omdat dit juist de duale kleur was van de lijn e_0. Nu zouden we dus de lijn e_0 met de kleur α_1 kunnen kleuren, wat er voor zou zorgen dat de graaf G wel met $\Delta(G) + 1$ kleuren te kleuren is. Dit geeft een tegenspraak, dus er bestaat zo'n lijn e_1 die de kleur α_1 heeft.

Laat nu α_2 de duale kleur van de lijn e_1 zijn. Als er een lijn bestaat met kleur α_2, aangrenzend aan u, die niet de lijn e_0 of e_1 is, dan noemen we deze lijn e_2. (de lijn e_1 is in dit rijtje al gekleurd met α_1 en de lijn e_0 kan vanwege de aanname niet met een van de $\Delta(G) + 1$ kleuren gekleurd worden.)

De lijn e_2 heeft duale kleur α_3 etc. Op deze manier construeren we een maximale rij $e_0, e_1, ..., e_k$, met $k \geq 1$. De laatste lijn e_k wordt met kleur α_k gekleurd en heeft de duale kleur α_{k+1}. Er is geen nu geen nieuwe lijn meer vanuit het punt u die van zichzelf gekleurd is met α_{k+1} en daarom is e_k dus de laatste lijn in de zojuist geconstrueerde rij.



Figuur 2

Opmerking. Het kan best zijn dat er nog meer lijnen vanuit het punt u bestaan, e_{k+1} t/m e_z, maar deze hebben dus geen van allen de kleur α_{k+1}.

De maximale rij kan dus variëren, afhankelijk van welke duale kleur we kiezen voor een lijn. De duale kleur is namelijk niet uniek bepaald, dus bijvoorbeeld, hadden we voor e_0 duale kleur α_3 gekozen dan hadden we een andere rij van lijnen gekregen en wellicht eerder (of later) de maximale lengte van die specifieke rij bereikt.

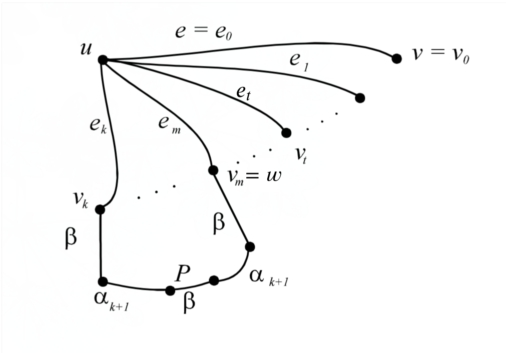
Omdat de laatste lijn de duale kleur α_{k+1} heeft, moeten we ons afvragen of er vanuit het punt u een lijn is die met deze kleur is gekleurd. Stel er is geen lijn met de kleur α_{k+1} aangrenzend aan het punt u, dan zouden we iedere lijn uit onze rij $e_0, e_1, ..., e_k$ kunnen herkleuren naar zijn duale kleur. Dit zou kunnen omdat, per definitie van de duale kleur, voor alle lijnen e_i geldt dat er vanuit v_i geen lijn is met die kleur en per constructie van onze maximale rij is er geen andere lijn vanuit u die, deze 'duale' (en nu dus nieuwe) kleur heeft. Dus de lijnen vanuit u kunnen allemaal met de toegekende duale kleur gekleurd worden. De aanname was al dat G' met $\Delta(G')+1$ kleuren gekleurd kan worden. Nu met de lijn $e = uv_0$ toegevoegd, hebben we een $\Delta(G) + 1$ lijnkleuring van G gekregen, want de lijn $e = e_0$ is nu gekleurd met zijn duale kleur, die uit de verzameling van $\Delta(G) + 1$ kleuren kwam. Dit geeft nu echter een tegenspraak met onze aanname dat de graaf G niet met $\Delta(G) + 1$ kleuren te kleuren is.

Dus er is wel een lijn e_{k+1} met kleur α_{k+1} aangrenzend aan het punt u. We hadden echter al een maximale rij van verschillende lijnen geproduceerd en dus bestaat er nu een i, waarvoor geldt dat $e_{k+1} = e_i$ voor zekere $1 \leq i \leq k$. (De lijn e_0 is nog kleurloos, dus die lijn kan het niet zijn.) Dit houdt in dat ook de kleuren overlappen en dus dat $\alpha_{k+1} = \alpha_i$. Omdat de kleur α_k van de lijn e_k niet hetzelfde kan zijn als zijn duale kleur α_{k+1}, betekent dit dat $\alpha_{k+1} = \alpha_i$ voor zekere $1 \leq i < k$. Laat $t = i - 1$, dan vinden we door middel van omschrijven dat $\alpha_{k+1} = \alpha_{t+1}$ voor $0 \leq t < k - 1$ en dus hebben de lijnen e_k en e_t dezelfde duale kleur. Dit gaan we later in het bewijs gebruiken.

We gaan bijna beginnen aan het daadwerkelijke bewijs van de stelling. Onthoud, we hebben aangenomen dat de lijn $e = uv_0$ niet met een van de $\Delta(G)+1$ kleuren te kleuren is. Dat wil dus ook zeggen dat voor iedere kleur α uit de verzameling $\Delta(G)+1$ kleuren, er een lijn met kleur α aangrenzend aan $e = uv_0$ moet zijn. Er zijn hoogstens $\Delta(G)$ lijnen die grenzen aan het punt u en dus bestaat er een kleur β die niet gebruikt is om een lijn vanuit het punt u te kleuren. De kleur β moet daarom wel gebruikt zijn om een lijn aangrenzend aan het punt v_0 te kleuren (anders konden we $e = uv_0$ de kleur β geven). Dan moet er vervolgens ook gelden dat aan alle v_i met $1 \leq i \leq k$ (plus $v_i = v_0$ nog steeds) er een lijn grenst met die kleur β. Als dit namelijk niet zo was voor bijvoorbeeld een punt v_m dan zouden we de lijn e_m met β kunnen kleuren (want er zijn vanuit het punt u ook geen andere lijnen met de kleur β) en daarna iedere lijn e_i voor $0 \leq i < m$ met zijn duale kleur kunnen herkleuren. Hierdoor vinden we dan een $\Delta(G)+1$ lijnkleuring van G.

We gaan nu het bewijs hard maken. Definieer twee paden P en R als volgt: Het pad P heeft beginpunt v_k en het pad R heeft beginpunt v_t. Beide paden bestaan vervolgens, met de maximale lengte, uit lijnen die afwisselend met β en $\alpha_{k+1} = \alpha_{t+1}$ gekleurd zijn. De kleur β heeft hier de eigenschap die we in voorgaande alinea hebben beschreven. Dus geen enkele lijn vanuit het punt u is gekleurd met β en β moet daarom wel toegekend zijn aan een lijn vanuit iedere punt v_i voor $0 \leq i \leq k$. Het pad P heeft nu eindpunt w en het pad R heeft eindpunt w'. We onderscheiden nu vijf mogelijke gevallen aan de hand van de eindpunten van de paden.

Geval 1 We bekijken het pad P en vinden dat $w = v_m$ voor een $0 \leq m < k$. Merk op dat het eindpunt sowieso niet bij (het beginpunt) v_k zal zijn, aangezien we al weten dat ook het punt v_k een aangrenzende lijn gekleurd met β heeft.



Figuur 3

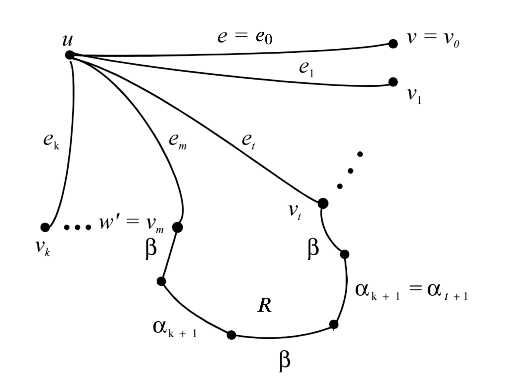
Het pad P begint, vanaf het punt v_k, dus met een lijn met kleur β. Dit ook omdat, de lijn e_k de duale kleur α_{k+1} heeft en er dus geen enkele lijn met kleur α_{k+1} aangrenzend aan het punt v_k kan zijn. Het eindpunt van P is v_m en de laatste lijn van ons pad P zal ook met de kleur β gekleurd zijn. Stel namelijk dat de laatste lijn kleur α_{k+1} zou hebben. Dan zouden we P met nog een lijn langer kunnen maken, omdat er vanuit v_m nog een lijn met kleur β bestaat (vanwege de eigenschap die we aan β hebben toegekend). Dit geeft dan een tegenspraak met onze gevalsaanname dat $w = v_m$.

De eerste en de laatste lijn van P staan in dit geval dus al vast. Verder is ook zeker dat het punt v_t niet op P ligt (tenzij $v_t = v_m$). Stel namelijk dat v_t wel op P ligt, dan zijn er twee lijnen aangrenzend aan v_t, waarvan een lijn kleur β en de andere lijn kleur α_{k+1} heeft. De duale kleur van e_t is echter $\alpha_{t+1} = \alpha_{k+1}$, dus een lijn met kleur α_{k+1} aangrenzend aan v_t geeft een tegenspraak. Dus v_t ligt niet op het pad P. (Tenzij $v_t = v_m$, er is tenslotte alleen een lijn met kleur β aangrenzend aan v_m.)

Als we nu de kleuren β en α_{k+1} verwisselen op P, hebben we aangrenzend aan v_k en aan v_m een lijn met kleur α_{k+1}. Nu kunnen we de kleur van de lijn e_m naar β veranderen en $\forall e_i$ met $0 \leq i < m$ de kleur naar zijn (onveranderde) duale kleur veranderen. Nu heeft de lijn $e = e_0$ een van de $\Delta(G)+1$ kleuren gekregen en hebben we dus een $\Delta(G)+1$ lijnkleuring voor G. Dit geeft een tegenspraak met onze oorspronkelijke aanname en dus is $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Opmerking. De duale kleur van iedere lijn e_i voor $0 \leq i < m$ verandert niet als we de kleuren β en α_{k+1} op het pad verwisselen. Namelijk, stel dat v_i niet op het pad voorkomt, dan verandert er niets, dus blijft de duale kleur van e_i sowieso gelijk. Stel dat v_i wel op het pad voorkomt. Dan betekent dit dat v_i zowel een aangrenzende lijn met kleur β als met kleur α_{k+1} heeft. Als we deze verwisselen beïnvloedt dit dus ook niet de keuze voor de duale kleur van e_i.

Geval 2 We bekijken het pad R en vinden dat $w' = v_m$ voor een $0 \leq m \leq k$ (en net zoals in Geval 1 is ook hier zeker dat $w' \neq v_t$, gezien dit het beginpunt is van R).



Figuur 4

Voor de eerste en de laatste lijn van het pad R (met beginpunt v_t) geldt hier, met dezelfde redenatie als in geval 1, dat deze lijnen van R gekleurd zijn met β. Net zo, geldt dat ook v_k niet op het pad R ligt, behalve als $v_m = v_k$.

Stel nu dat $m < t$, dan kunnen we op dezelfde manier verdergaan als in Geval 1. We verwisselen de kleuren β en α_{k+1} op het pad R. Hierdoor veranderen de duale kleuren van alle lijnen e_i met $0 \leq i < m$ niet en nu hebben we aangrenzend aan v_t en v_m een lijn met kleur α_{k+1} in plaats van β. Nu kunnen we de lijn e_m met β kleuren en $\forall e_i$ met $0 \leq i < m$ de kleur naar zijn duale kleur veranderen. Voor alle e_i met $m < i \leq k$ geldt nog altijd dat we deze kleuren met de duale kleur van zijn voorgaande lijn e_{i-1}. Nu heeft de lijn $e = e_0$ ook een van de $\Delta(G) + 1$ kleuren gekregen, terwijl de rest van de graaf ook nog altijd gekleurd is met alleen kleuren uit de verzameling $\Delta(G)+1$ kleuren. Nu hebben we dus een tegenspraak en dus ook hier vinden we nu dat $\chi'(G) \leq \Delta(G)+1$.

Stel nu dat $m > t$. We verwisselen weer de kleuren β en α_{k+1} op het pad R. Hierdoor veranderen de duale kleuren van de lijnen e_i met $0 \leq i < m$, uitgezonderd $e_i = e_t$, niet. (De punten v_m en v_t hebben nu een aangrenzende lijn met kleur α_{k+1} in plaats van β.) We kunnen nu dus iedere kleur van alle lijnen e_i met $0 \leq i < m$ veranderen naar zijn duale kleur en de kleur van de lijn e_t veranderen naar β. Nu heeft onze speciale lijn $e = e_0$ weer een van de $\Delta(G) + 1$ kleuren gekregen, terwijl de rest van de graaf ook nog altijd gekleurd is met alleen kleuren uit de verzameling $\Delta(G)+1$ kleuren. Dus ook voor $m > t$ vinden we een tegenspraak.

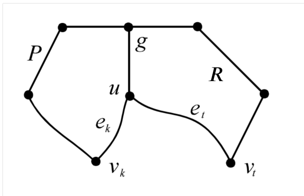
Geval 3 We bekijken het pad P en vinden $w \neq v_m$, $\forall\, 0 \leq m < k$ en ook $w \neq u$. Het beginpunt van P is v_k en dus is de eerste lijn van het pad, net als in Geval 1, gekleurd met β. We verwisselen weer de kleuren β en α_{k+1} van het pad P. De duale kleuren van de lijnen e_i voor $0 \leq i < k$ veranderen niet, zoals we in Geval 1 ook zagen. Aangrenzend aan het punt v_k is er geen lijn meer met kleur β, dus we kunnen nu de lijn e_k met β kleuren en alle andere e_i met $0 \leq i < k$ kleuren met zijn duale kleur. Ook hier hebben we nu een $\Delta(G) + 1$ lijnkleuring voor G gevonden.

Geval 4 We bekijken het pad R en vinden $w' \neq v_m$, $\forall\, 0 \leq m \leq k$ en ook $w' \neq u$. Het beginpunt van R is v_t en dus is de eerste lijn van het pad, net als in Geval 2, gekleurd met β. We verwisselen weer de kleuren β en α_{k+1} op het pad R. Ook nu veranderen de duale kleuren van alle lijnen e_i met $0 \leq i \leq k$ niet, behalve voor $i = t$. We kunnen de lijn e_t nu kleuren met β (omdat de kleuren β en α_{k+1} zijn verwisseld) en de rest van de lijnen e_i kleuren met zijn duale kleur. Ook hier hebben we nu een $\Delta(G)+1$ lijnkleuring voor G gevonden.

Geval 5 De overgebleven optie is dat P en R hetzelfde eindpunt hebben, namelijk het punt u en dus $w = w' = u$. De laatste lijn van beide paden moet gekleurd zijn met α_{k+1}, aangezien we β zodanig gedefinieerd hadden dat β niet de kleur was voor een lijn aangrenzend aan u.

Stel nu dat P en R geen gemeenschappelijke lijnen hebben. Dan zouden er twee lijnen (de laatste lijnen van de paden) met kleur α_{k+1} aangrenzend aan u zijn. Dit geeft meteen een tegenspraak.

Stel nu dat P en R wel een gemeenschappelijke lijn hebben. Dan bestaat er dus een punt met (tenminste) drie aangrenzende lijnen van P of R. Zie Figuur 5 hieronder. De paden bestaan echter alleen uit de kleuren β of α_{k+1}, dus ook nu zijn er tenminste twee lijnen van dezelfde kleur en dit geeft ook een tegenspraak.



Figuur 5

Dit geval kan dus überhaupt niet voorkomen tijdens het kleuren van grafen, maar nu hebben we alle mogelijkheden voor de eindpunten van P en R bekeken.

$\square$

2.2 Multigrafen

De Stelling van Vizing in de vorige paragraaf betreft alleen enkelvoudige grafen. Vizing heeft echter ook een stelling gepubliceerd voor multigrafen. Bij een multigraaf mogen er meerdere lijnen lopen tussen dezelfde paar punten. Hierbij nemen we in deze scriptie aan dat 'loops', lijnen van een punt naar zichzelf, niet voorkomen. Het maximale aantal lijnen die er in een graaf G tussen een van de paren punten zijn, noemen we $\mu(G)$. Voor enkelvoudige grafen geldt dus gewoon dat $\mu(G) = 1$, omdat er maar maximaal één lijn is tussen ieder paar punten. De Stelling van Vizing voor multigrafen (uit [6]) is nu als volgt,

Stelling 2.2. *Voor een (niet-lege) graaf G geldt dat $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + \mu(G)$.*

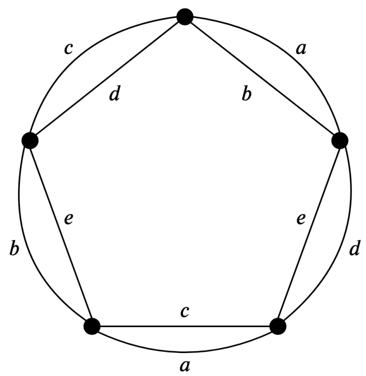
Het bewijs voor deze stelling gaan we nu niet verder op in (zie bv [7]). Uit deze stelling voor multigrafen kunnen we ook de originele Stelling van Vizing afleiden als $\mu = 1$.

Het is lastig om in het algemeen iets te zeggen over allerlei typen grafen, maar we bekijken nu het lijnkleurgetal van multicykels $C_{n,\mu}$. Een multicykel $C_{n,\mu}$ is een cykelgraaf op n punten, waarbij er nu μ lijnen lopen tussen de punten in de cykel, waar er voorheen maar een enkele lijn tussen liep.

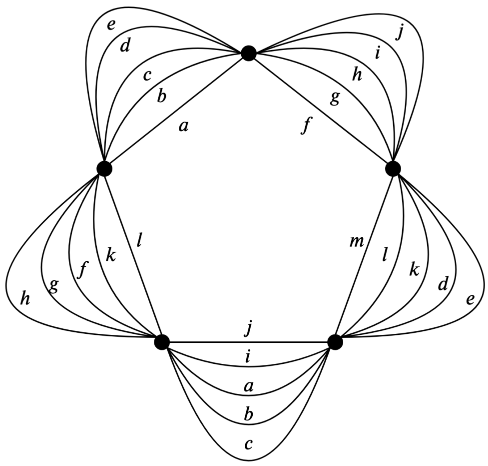
Voor de (multi)cykel $C_{3,1} = C_3$ weten we al dat $\chi'(G) = \Delta(G) + 1 = 3$. Voor $C_{3,2}$, de multicykel op 3 punten en 2 lijnen tussen ieder van de aangrenzende punten, is ook meteen duidelijk dat $\chi' = \Delta + \mu = 4 + 2 = 6$. Alle 6 lijnen in de graaf grenzen aan elkaar en zullen dus inderdaad allemaal een verschillende kleur moeten krijgen. Ongeacht μ, gaat dit op voor alle multicykels op $n = 3$ punten. Dus er geldt dat $\chi'(C_{3,\mu}) = \Delta + \mu$ voor alle μ. De multicykels op $n = 3$ punten zijn dus allemaal voorbeelden van grafen die de bovengrens van de Stelling van Vizing voor multigrafen aannemen.

Voor de multicykel $C_{4,1} = C_4$ weten we al dat $\chi' = \Delta = 2$. Voor $C_{4,2}$ gaan we ook precies Δ kleuren nodig hebben. We kunnen namelijk het volgende doen. Het lijnkleurgetal van $C_{4,2}$ kan nooit hoger zijn dan twee keer het lijnkleurgetal van $C_{4,1}$. We kunnen de twee cykels van $C_{4,2}$ namelijk opsplitsen in twee onafhankelijke enkelvoudige cykels. We weten al van $C_{4,1}$ dat deze twee enkelvoudige cykels ieder te kleuren zijn met Δ_1, waarbij de index 1 aangeeft dat we hier spreken over de maximale graad in de graaf met $\mu = 1$. Vervolgens kunnen we dus deze twee cykels als het ware bij elkaar optellen en zo krijgen we de multicykel $C_{4,2}$. Dan kunnen we $C_{4,2}$ dus ook zeker kleuren door de gebruikte kleuren voor de twee enkelvoudige cykels bij elkaar op te tellen. (Hierbij heeft iedere enkelvoudige cykel dus geen overlappende kleuren gebruikt.) Er geldt dus dat $\chi'(C_{4,2}) \leq \Delta_1 + \Delta_1$. Omdat door de ophoging met μ de graad van zichzelf ook ophoogt, geldt er precies dat $\Delta_1 + \Delta_1 = \Delta_2$, de maximale graad voor $C_{4,2}$. Dit wil dus zeggen dat $\chi'(C_{4,2})$ maximaal Δ_2 kleuren nodig heeft. Omdat Δ_2 in dit geval ook de ondergrens is, geldt nu dat $\chi'(C_{4,2}) = \Delta_2$. Het resultaat op deze manier verkregen, geldt voor alle multicykels op $n = 4$ punten en dus geldt dat $\chi'(C_{4,\mu}) = \Delta_\mu$ voor alle μ. Deze multicykels zijn dus allemaal voorbeelden van grafen die de ondergrens van de Stelling van Vizing voor multigrafen aannemen.

Voor de multicykel $C_{5,1} = C_5$ weten we al dat $\chi'_1 = \Delta_1 + 1 = 3$, omdat $n = 5$ oneven is. Wellicht verwachten we nu dat we voor $C_{5,2}$ ook het maximale aantal kleuren $\Delta + \mu$ nodig gaan hebben om deze graaf te kleuren, wat in dit geval 6 kleuren betreft. Echter, zien we in Figuur 6 dat we de lijnen van $C_{5,2}$ kunnen kleuren met 5 verschillende kleuren. We kunnen er dus, door slim te kleuren, een kleur afsnoepen. Dit kunnen we ook doen voor $C_{5,3}$, waardoor $\chi'(C_{5,3}) = \Delta_3 + \mu - 1 = 8$. Vervolgens kunnen we $C_{5,4}$ zelfs met 2 kleuren minder kleuren dan de bovengrens $\Delta_4 + \mu$ en ook voor de multigraaf $C_{5,5}$ hebben we slechts $\Delta_5 + \mu - 2 = 13$ kleuren nodig om de lijnen van de graaf te kleuren, zoals geïllustreerd in Figuur 7. Omdat er in dit laatste geval in het totaal 25 lijnen zijn en we iedere kleur zeker niet meer dan 2 keer kunnen gebruiken om de lijnen te kleuren, weten we tevens zeker dat we minstens 13 kleuren nodig en dat de gegeven kleuring dus inderdaad optimaal is.



Figuur 6



Figuur 7

Voor de multicykel $C_{6,1} = C_6$ weten we al dat $\chi'_1 = \Delta_1 = 2$, omdat $n = 6$ even is. Net als voor het geval $n = 4$, kunnen we nu ook voor alle multigrafen op $n = 6$, alle lijnkleuringen voor iedere cykel bij elkaar optellen om op deze manier een (optimale) kleuring voor $C_{6,\mu}$ te verkrijgen. Er geldt dus altijd dat $\chi'(C_{6,\mu}) \leq \mu * \chi'(C_{6,1}) = \mu * \Delta_1 = \Delta_\mu$. Omdat dit tevens de ondergrens is voor het lijnkleurgetal, geldt dus dat $\chi'(C_{6,\mu}) = \Delta_\mu$ voor alle μ.

Er geldt, om dezelfde redenen als voor $n = 4$ en $n = 6$, dat $\chi'(C_{n,\mu}) = \Delta_\mu$ voor alle multicykels op een even aantal punten n. Verder weten we dat voor $n = 3$, voor alle μ geldt dat $\chi'(C_{3,\mu}) = \Delta_\mu + \mu$ en dus de bovengrens van het lijnkleurgetal altijd wordt aangenomen. Na ook nog testen gedaan te hebben op $n = 7$ en $n = 9$, blijft het voor de andere oneven n (dus uitgezonderd $n = 3$) nog een beetje een raadsel om in het algemeen iets over het lijnkleurgetal van deze grafen te zeggen. Zoals we al weten nemen ze voor $\mu = 1$ natuurlijk allemaal hun bovengrens aan, maar voor hogere μ verschilt het per geval wanneer we een kleur van de bovengrens af kunnen halen. In Hoofdstuk 4 zullen we verder ingaan op alle multicykels om ook iets over de totale kleuring van deze grafen te zeggen.

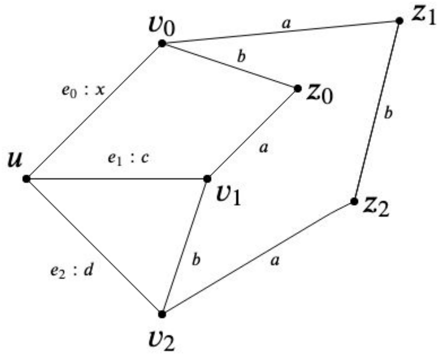
3 Algoritme voor een $\Delta(G) + 1$ kleuring

Door de stelling van Vizing weten we nu dat we voor iedere graaf de lijnen kunnen kleuren met hoogstens $\Delta(G) + 1$ kleuren. Ook is het zeker dat we hiervoor minstens $\Delta(G)$ kleuren nodig zullen hebben. Door deze twee uitkomsten kunnen we nu voor iedere graaf G stellen dat het lijnkleurgetal $\chi'(G)$ gelijk is aan $\Delta(G)$ of $\Delta(G)+1$. Dit verdeelt vervolgens alle grafen in klasse 1 als $\chi'(G) = \Delta(G)$ en klasse 2 als $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$. Cykelgrafen C_n met n een even aantal punten (en $n \geq 3$) behoren tot klasse 1 en als n oneven dan behoort de cykelgraaf juist tot klasse 2. Hetzelfde geldt voor bijvoorbeeld complete grafen met even en oneven n. Het zou mooi zijn als we voor iedere graaf zouden weten of we hem kunnen classificeren als graaf van klasse 1 of klasse 2. Kunnen we hier het antwoord op vinden met behulp van een algoritme? Om te beginnen willen we dan van een $\Delta(G) + x$ (met $x > 1$) kleuring van een graaf, een $\Delta(G) + 1$ kleuring maken, aangezien zo'n kleuring zeker moet bestaan. Vervolgens willen we met behulp van een algoritme bepalen of de graaf met de geconstrueerde $\Delta(G)+1$ kleuring ook met $\Delta(G)$ kleuren kan worden gekleurd. We gaan dit in de volgende paragraaf onderzoeken.

Door de Stelling van Vizing weten we dus dat als we een willekeurige kleuring van een graaf hebben met meer dan $\Delta(G) + 1$ kleuren, dan moeten we dit kunnen terugbrengen naar $\Delta(G)+1$ kleuren. Een manier om vervolgens zo'n kleuring te maken voor een graaf zou met de 'Brute Force' manier kunnen zijn. We kunnen alle mogelijke combinaties van kleuren op lijnen proberen en dan vinden we sowieso een keer een oplossing. Zijn we hier echter niet overbodig veel tijd mee kwijt? Het bewijs van de stelling van Vizing geeft al een impressie van hoe een handig algoritme om dit te versnellen er uit zou zien.

3.1 Constructie algoritme aan de hand van een voorbeeld

Om uiteindelijk een algemeen algoritme te geven, bekijken we eerst de stappen die we willen ondernemen aan de hand van een klein voorbeeld. We bekijken hieronder de graaf G met de gegeven kleuring.



Figuur 8

Er zijn nu 5 kleuren gebruikt om de graaf te kleuren en deze verzameling kleuren noemen we $K' = \{a, b, c, d, x\}$. Echter, $\Delta(G) = 3$ en dus zouden we de graaf ook met maximaal 4 kleuren moeten kunnen kleuren. We kiezen de lijn $e_0 = uv_0$ nu als de lijn waarvan we de gegeven kleur willen elimineren. Dit omdat, de kleur x alleen maar voor deze lijn gebruikt is en dit dus precies de overbodige kleur betreft. De verzameling van de 4 kleuren waar we naar toe willen werken, noemen we $K = \{a, b, c, d\}$.

We behouden dus de gegeven kleuring voor G, behalve dat de lijn e_0 nu geen kleur meer heeft. We gaan nu net als in Vizing een maximale rij construeren. Voor de duale kleur α_1 van e_0 hebben we de volgende mogelijkheden (en eventueel snelle gevolgen):

$$\alpha_1 = \begin{cases} a. & \textit{Dit kan niet, vanwege de definitie van de duale kleur en de} \\ & \textit{lijn } v_0 \to z_1 \textit{ is al gekleurd met } a. \\ b. & \textit{Dit kan niet, vanwege de definitie van de duale kleur en de} \\ & \textit{lijn } v_0 \to z_0 \textit{ is al gekleurd met } b. \\ c. & \\ d. & \end{cases} \tag{1}$$

Stel we kiezen nu $\alpha_1 = c$ als de duale kleur voor de lijn e_0. We hebben vervolgens inderdaad een lijn vanuit u, namelijk e_1, gekleurd met $\alpha_1 = c$ en dus bepalen we vervolgens de duale kleur van e_1. Hiervoor kiezen we $\alpha_2 = d$, aangezien dit de enigste optie is als duale kleur voor de lijn e_1. Ook nu hebben we nog de lijn e_2 die gekleurd is met $\alpha_2 = d$. Vervolgens hebben we voor de duale kleur α_3 van de lijn e_2 nog enkel de mogelijkheid om $\alpha_3 = c$ te kiezen. Hier eindigt nu onze maximale rij, want er is geen nieuwe lijn meer vanuit het punt u die gekleurd is met de kleur c.

Nu hebben we 2 lijnen e_0 en e_2 met dezelfde duale kleur, namelijk $\alpha_1 = \alpha_3 = c$. Dit willen we gaan gebruiken om een correcte herkleuring te geven voor de graaf.

We moeten ons eerst afvragen wat de kleur voor β, zoals geïntroduceerd in het bewijs van Vizing, in deze graaf is. Dit moet een kleur zijn, uit de verzameling K, die nog niet gebruikt is om een lijn vanuit u te kleuren, maar die wel aan alle v_i grenst. Mocht deze β bijvoorbeeld niet bestaan omdat er een punt v_i is waar hij niet aan grenst, dan zouden we e_i met β kunnen kleuren en alle voorgaande e_i met hun duale kleur. Dit geeft ons meteen een herkleuring voor de graaf G, zodanig dat we 1 kleur minder hebben gebruikt. In ons voorbeeld bestaat β echter wel en we laten nu $\beta = b$.

We construeren nu de paden P en R met beginpunten v_2 en v_0 (de twee v_i punten waarbij de bijbehorende lijnen e_i dezelfde duale kleur hebben) en met eindpunten w en w' respectievelijk. De paden bestaan uit lijnen afwisselend gekleurd met $\beta = b$ en met $\alpha_1 = \alpha_3 = c$.

We hebben dus de paden $P : v_2 \to v_1 \to u = w$ en $R : v_0 \to z_0 = w'$. Nu kunnen we aan de hand van de gevalsonderscheiding zoals in Vizing de herkleuring afmaken. In dit voorbeeld zitten we in geval 4, $w' \neq v_m$ voor $0 \leq m \leq k$ en $w' \neq u$. Nu verwisselen we de kleuren b en c op het pad van R, wat in dit voorbeeld inhoud dat alleen de lijn $v_0 \to z_0$ de kleur c krijgt in plaats van b. Nu geeft dit de ruimte zodat we de lijn e_0 met $\beta = b$ kunnen kleuren en de rest van de lijnen e_i (behalve dus voor $i = 0$) met hun duale kleuren kunnen herkleuren, al is dat in dit voorbeeld niet eens meer nodig. We hebben nu een $\Delta(G) + 1$ kleuring voor de graaf G gemaakt.

Dit hadden we, in dit voorbeeld, wellicht door even te kijken ook kunnen zien, maar we hebben nu een idee gekregen over hoe we dit zouden kunnen bereiken met een algemeen algoritme voor iedere graaf. In ons voorbeeld kunnen we daarnaast ook zien, door nog wat meer te puzzelen, dat we de graaf zelfs met $\Delta(G) = 3$ kleuren kunnen kleuren. Dit zorgt er voor dat deze graaf tot klasse 1 behoort. Echter maken we in het algoritme (in zijn algemeen uitgelegd in de volgende paragraaf) gebruik van de eigenschap van de duale kleur en over deze duale kleur hebben we gezegd dat deze uit de verzameling K van $\Delta(G)+1$ kleuren komt. Omdat we in dit geval nu zouden streven om de graaf met $\Delta(G)$ kleuren te kleuren, kunnen we niet langer gebruik maken van het begrip duale kleur op de manier waarop we deze gedefinieerd hadden.

Stel we willen dit bijvoorbeeld in het voorbeeld proberen, omdat we de kleur d van de lijn $u \to v_2$ willen elimineren. Nu pakken we dit op dezelfde manier aan als hiervoor, alleen mogen de duale kleuren nu enkel nog uit de verzameling $K'' = \{a, b, c\}$ komen. Dan moeten we voor e_2 wel duale kleur c kiezen, waarna we vervolgende de lijn e_1 moeten bekijken. Hier lopen we vervolgens vast, omdat er voor de lijn e_1 geen kleur meer over blijft om als duale kleur van e_1 te worden gedefinieerd. Het punt v_1 heeft namelijk zelf de maximale graad die voorkomt in de graaf en daarom grenzen er al 3 lijnen met alle drie de mogelijke kleuren a, b, en c.

We kunnen het algoritme dus niet nog een keer toepassen om antwoord te krijgen op de vraag of de graaf ook met $\Delta(G)$ kleuren te kleuren is als hij dat al wel met $\Delta(G)+1$ kleuren is. Terwijl we dus weten dat een graaf wel degelijk, zoals in het voorbeeld, te kleuren kan zijn met $\Delta(G)$ kleuren. Met de methode, zoals we die kennen uit het bewijs van Vizing, gaan we dus zeker niet een dergelijk algoritme kunnen maken.

Het bepalen van een concrete $\Delta(G)+1$ kleuring voor een graaf kunnen we dus doen aan de hand van het algoritme, gegeven in de volgende paragraaf. Hoewel we over sommige type grafen wel degelijk iets kunnen zeggen over zijn klasse, bijvoorbeeld bij de grafen genoemd aan het begin van dit hoofdstuk, blijkt echter het bepalen van de klasse van een graaf over het algemeen een NP-volledig probleem. Dat is dan ook in 1981 bewezen door Ian Holyer [3]. Dit betekent dat het zeer onwaarschijnlijk is dat er nog een algoritme gevonden gaat worden om de klasse van alle grafen te bepalen.

3.2 Algoritme in het algemeen

In het vorige voorbeeld konden we wellicht zelf ook nog wel een $\Delta(G)+1$ kleuring geven voor de graaf na even kijken. We hebben echter, door gebruik te maken van 2 lijnen vanuit u met dezelfde duale kleur, een overbodige kleur geëlimineerd. De eigenschap van de overlappende duale kleuren is uiteindelijk datgene dat ruimte creëert om kleuren zodanig te gaan verwisselen dat we de kleur van 1 specifieke lijn, namelijk e_0, kunnen elimineren. Nu kunnen we er in het algemeen niet vanuit gaan dat we maar één enkele lijn hebben met één kleur te veel. In sommige grafen met meer dan $\Delta(G)+1$ kleuren komt het misschien ook voor dat alle kleuren al meer dan 1 keer voorkomen. Nog steeds zijn ook deze grafen, volgens de Stelling van Vizing, te kleuren met $\Delta(G)+1$ kleuren. Een ander voorbeeld is een graaf waarvan iedere lijn een andere kleur heeft. Hoe groter deze graaf wordt, hoe meer kleuren we zouden kunnen elimineren, want ook die graaf kan natuurlijk met $\Delta(G)+1$ kleuren gekleurd worden. Het algoritme dat we gaan bekijken geeft een herkleuring voor maar 1 lijn, maar we zullen later nog zien dat dit eventueel vaker toegepast kan worden. In principe kun je bij een gegeven kleuring iedere kleur bij een lijn kiezen om die te elimineren, maar het is wel handig om de kleur alvast zodanig kiezen, dat deze kleur al het minst vaak voorkomt. Dit geldt vervolgens ook voor alle volgende kleuren die nog geëlimineerd kunnen worden.

Stel we hebben een graaf G met een gegeven kleuring, K' de verzameling van alle kleuren die gebruikt zijn, maar ook $K' > \Delta(G)+1$. Nu willen we dus de overbodige kleuren uit de verzameling K' halen en een concrete $\Delta(G)+1$ kleuring voor de graaf G geven, waarbij we de gekozen $\Delta(G)+1$ kleuren de verzameling K noemen. We hebben oorspronkelijk de lijn $e_0 = uv_0$ gekleurd met kleur x en nu hebben we er voor gekozen dat we (onder andere) deze lijn willen herkleuren. Daarom verwijderen we nu deze kleur x voor de lijn e_0 zodat deze lijn nu kleurloos is geworden. Het doel van het algoritme is nu om de lijn e_0 met een kleur uit K te kleuren. Dit kunnen we doen met het algoritme bestaande uit de volgende 9 stappen.

Stap 1. Bepaal de duale kleur $\alpha_1 \in K$ van de lijn e_0. Is er een nieuwe lijn vanuit het punt u gekleurd met α_1?
Zo nee, dan kleur e_0 met α_1. Klaar.
Zo ja, dan noem deze gevonden lijn e_1 en neem $i = 1$.

Stap 2. Bepaal de duale kleur α_{i+1} van de lijn e_i. Hierbij is e_i de lijn die het punt u verbindt met het punt v_i. Is er een nieuwe lijn vanuit het punt u gekleurd met α_{i+1}?
Zo ja, dan noem deze gevonden lijn e_{i+1} en herhaal Stap 2 voor $i+1$ in plaats van i.
Zo nee, dan geldt hier nu dat $e_i = e_k$ is de laatste lijn van de rij.

Stap 3. Is er al eerder in de rij een lijn e_i met $1 \leq i < k$ geweest zodanig dat deze lijn gekleurd is met α_{k+1}?
Zo nee, dan herkleur alle lijnen e_i voor $0 \leq i \leq k$ naar zijn duale kleur. Klaar.
Zo ja, dan $\exists\ 0 \leq t < k-1$ zodanig dat e_t dezelfde duale kleur heeft als de lijn e_k en dus $\alpha_{t+1} = \alpha_{k+1}$.

Stap 4. Bepaal de kleur $\beta \in K$, zodanig dat β de kleur is die aan geen enkele lijn e_i vanuit het punt u is toegekend, maar wel aan een lijn aangrenzend aan v_i voor iedere $0 \leq i \leq k$.
Bestaat zo'n kleur β niet, omdat er een punt v_i is waar geen lijn met kleur β aan grenst. Dan herkleur de lijn e_i met kleur β en herkleur de lijnen e_0 t/m e_{i-1} met hun duale kleur. Klaar.
Bestaat zo'n kleur β wel, dan door met Stap 5.

Stap 5. Construeer 2 paden P en R met beginpunten v_k en v_t en eindpunten w en w' respectievelijk, waarbij de eindpunten worden gedefinieerd door de paden die volledig bestaan uit lijnen afwisselend met kleur $\alpha_{k+1} = \alpha_{t+1}$ en kleur β.

Stap 6. Bekijk het pad P. Geldt $w = v_m$ voor een $0 \leq m < k$?
Zo nee, dan ga naar Stap 7.
Zo ja, dan verwissel de kleuren β en α_{k+1} op het pad P en herkleur vervolgens de lijn e_m naar β en (her)kleur alle lijnen e_i voor $0 \leq i < m$ naar hun duale kleur. Klaar.

Stap 7. Bekijk het pad R. Geldt $w' = v_m$ voor een $0 \leq m \leq k$?
Zo nee, dan ga naar Stap 8.
Zo ja, dan verwissel de kleuren β en α_{k+1} op het pad R. Als $m < t$, dan herkleur de lijn e_m met β en herkleur alle lijnen e_i voor $0 \leq i < m$ naar hun duale kleur. Als $m > t$, dan herkleur de lijn e_t naar de kleur β en herkleur de overige lijnen e_i met $0 \leq i < m$ (dus uitgezonderd $i = t$) naar hun duale kleur. Voor beide gevallen zijn we nu klaar.

Stap 8. Bekijk het pad P. Geldt $w \neq v_m$, $\forall\ 0 \leq m < k$ en ook $w \neq u$?
Zo nee, dan ga naar Stap 9.
Zo ja, dan verwissel de kleuren β en α_{k+1} op het het pad P en herkleur vervolgens de lijn e_k naar β en herkleur alle lijnen e_i voor $0 \leq i < k$ naar zijn duale kleur. Klaar.

Stap 9. Bekijk het pad R. Er geldt $w' \neq v_m, \forall\ 0 \leq m \leq k$ en ook $w' \neq u$. Verwissel de kleuren β en α_{k+1} op het pad R. Herkleur vervolgens de lijn e_t naar de kleur β en herkleur de overige lijnen e_i met $0 \leq i < m$ (dus uitgezonderd $i = t$), naar hun duale kleur. Klaar.

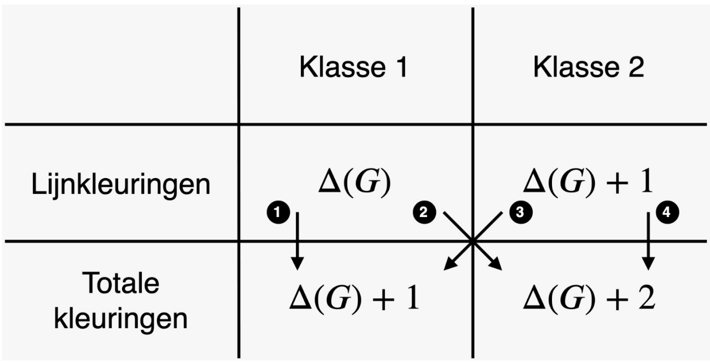
Alles wat we in de 9 stappen hebben gedaan is mogelijk om dezelfde redenen zoals besproken in het bewijs van Vizing. Ergens in een van die stappen heeft de lijn e_0 een kleur uit K gekregen. De oorspronkelijke kleur $x \in K' \setminus K$ is nu dus voor één lijn uit de graaf G minder gebruikt of zelfs geëlimineerd. We willen echter uiteindelijk een concrete $\Delta(G) + 1$ kleuring voor de graaf G vinden en het algoritme is tot nu toe op 1 lijn gericht. Maar, stel we hebben nog een lijn, of meerdere, met kleur x in de graaf, dan kunnen we het algoritme gewoon opnieuw volgen en zo ook deze lijn(en) een kleur uit K geven. Hetzelfde geldt voor de overige kleuren $x' \in K' \setminus K$ (of combinaties van deze twee 'problemen'). Lijn voor lijn kunnen we met het algoritme de kleuren verminderen en de graaf aanpassen om een $\Delta(G) + 1$ kleuring te vinden.

4 Totale kleuringen

We hebben het, tot hier, nog enkel over lijnkleuringen gehad. Nu is het ook interessant om te zien wat er gebeurt als we zowel de punten als de lijnen van een graaf kleuren. Dit geeft ons dan een totale kleuring van een graaf, waarbij aangrenzende punten, net als aangrenzende lijnen niet dezelfde kleur mogen hebben en tevens ook ieder punt niet dezelfde kleur mag hebben als zijn aangrenzende lijnen. Het minste aantal kleuren dat we nodig hebben voor een totale kleuring van de graaf, noemen we $\chi''(G)$, het totale kleuringsgetal. Het is duidelijk dat $\chi''(G) \geq \Delta(G) + 1$, aangezien het punt met de hoogste graad en ook alle aangrenzende lijnen aan dat punt een verschillende kleur moeten krijgen. Net zoals voor lijnkleuringen zouden we nu ook graag een bovengrens geven voor $\chi''(G)$. Echter is de hiervoor bekende bovengrens enkel een vermoeden en heeft nog niemand de uitspraak kunnen bewijzen. (Zie [5] voor meer info.)

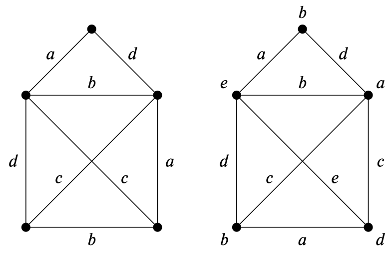
Vermoeden 4.1 (Vermoeden van Behzad-Vizing)**.** $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$.

Ook de hypothetische bovengrens van het totale kleuringsgetal van een graaf is dus precies 1 hoger dan voor lijnkleuringen. Het vermoeden van Vizing geeft ons ook hier 2 klassen waarin we grafen kunnen onderverdelen. Een graaf G zit in klasse 1 als er een totale kleuring bestaat met $\Delta(G)+1$ kleuren en in klasse 2 als er $\Delta(G)+2$ kleuren nodig zijn voor de totale kleuring van de graaf. Nu kan het bijvoorbeeld zo zijn dat voor een graaf G geldt dat $\chi'(G)$ tot klasse 1 behoort, maar $\chi''(G)$ tot klasse 2, waardoor er een verschuiving van klasse plaatsvindt. In het volgende schema zien we dat 4 verschillende situaties zich kunnen voordoen, afhankelijk van $\chi'(G)$ en $\chi''(G)$.



Figuur 9

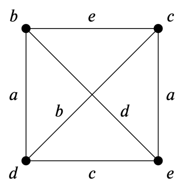
Situatie 1. Als $\chi'(G) = \Delta(G)$ en $\chi''(G) = \Delta(G)+1$, dan zitten we in beide gevallen in klasse 1. Deze situatie doet zich bijvoorbeeld voor, voor de de graaf G in Figuur 10. Hier is $\Delta(G) = 4$, $\chi'(G) = 4$ en $\chi''(G) = 5$.



(a) (b)

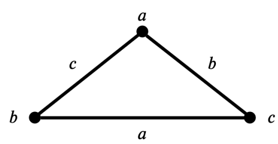
Figuur 10

Situatie 2. Als $\chi'(G) = \Delta(G)$ en $\chi''(G) = \Delta(G) + 2$, dan verschuiven we van klasse 1 naar klasse 2. Een voorbeeld van een graaf in deze situatie is K_4, de volledige graaf op 4 punten, waarbij dus $\Delta(K_4) = 3$. We weten al dat $\chi'(K_4) = \Delta(K_4) = 3$, omdat dit geldt voor alle volledige grafen op een even aantal punten. Na even puzzelen, blijken we voor $\chi''(K_4)$ toch echt 5 kleuren nodig te hebben en dus behoort K_4 voor totale kleuringen in klasse 2.



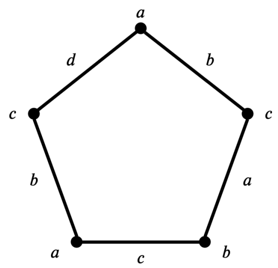
Figuur 11

Situatie 3. Als $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ en ook $\chi''(G) = \Delta(G) + 1$, dan verschuiven we juist van klasse 2 naar klasse 1, wat op het eerste gezicht wellicht wat minder logisch aanvoelt. Echter is een simpel voorbeeld voor deze situatie de cykelgraaf op 3 punten (ook wel de volledige graaf op 3 punten).



Figuur 12

Situatie 4. Als $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ en $\chi''(G) = \Delta(G) + 2$, dan zit de graaf G voor beide kleuringen in klasse 2. Ook deze situatie doet zich voor, zoals bijvoorbeeld bij C_5, de cykelgraaf op 5 punten.



Figuur 13

Nu zouden we voor totale kleuringen natuurlijk ook graag voor bepaalde typen grafen zeggen in welke klasse de graaf hoort. Daarom gaan we in de volgende paragrafen cykelgrafen, volledige grafen en bipartiete grafen onderzoeken.

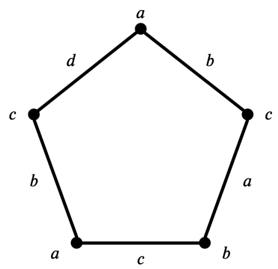
4.1 Cykelgrafen

Alle cykelgrafen $G = C_n$ hebben iets belangrijks gemeenschappelijk, namelijk $\Delta(G) = 2$. Verder weten we dat als n is even, dan is $\chi'(G) = \Delta(G) = 2$ en zit de graaf in klasse 1 en als n is oneven, dan is $\chi'(G) = \Delta(G) + 1 = 3$, waardoor de graaf in klasse 2 zit. Voor totale kleuringen van cykelgrafen gaat vervolgens gelden dat G in klasse 1 zit als $\chi''(G) = 3$ en in klasse 2 zit als $\chi''(G) = 4$. Tot nu toe, hebben we voor totale kleuringen van cykelgrafen al gezien dat C_3 gekleurd kan worden met 3 kleuren, terwijl C_5, die ook oneven n heeft, 4 kleuren nodig heeft. We kunnen de cykelgrafen dus zeker niet in dezelfde klasse verdelen afhankelijk van een oneven of even aantal punten n, zoals voor lijnkleuringen. Het is echter niet gek om te denken dat er wel nog steeds een patroon in zou kunnen zitten voor het totale kleuringsgetal van de cykelgrafen.

De beginvraag voor alle cykels is dus, kan deze een totale kleuring hebben met 3 kleuren. Stel namelijk dat dit voor een bepaalde cykel kan, dan zou je de cykel met de kleuren a, b en c in een rondje af kunnen gaan. Dit omdat, stel we kleuren een (begin)punt van de cykel met kleur a. Vervolgens kleuren we een van de 2 aangrenzende lijnen met kleur b. We gaan nu het rondje afmaken in deze richting. Omdat aangrenzende punten niet dezelfde kleur mogen hebben en ook punten niet dezelfde kleur mogen hebben als zijn aangrenzende lijnen, moet het punt aangrenzend aan de andere kant van de lijn gekleurd met b nu wel met kleur c gekleurd worden. De volgende lijn zouden we nu weer met kleur a kunnen kleuren, maar niet met b of c. Omdat we hebben aangenomen dat de graaf met 3 kleuren te kleuren was, kleuren we de lijn dus inderdaad met a. Op deze manier gaat het verder en als de cykelgraaf inderdaad met 3 kleuren is te kleuren, dan moet dit op het einde uitkomen. In dat geval zou dan de laatste lijn gekleurd zijn met c.

Als we een cykelgraaf dus wel met 3 kleuren kunnen kleuren, dan worden al deze 3 kleuren ook precies even vaak gebruikt. Omdat we een totale kleuring maken, moet dus gelden dat $|V| + |E|$ is deelbaar door 3, met V is de verzameling punten en E is de verzameling lijnen van G. Omdat in cykelgrafen geldt dat $|V| = |E|$, betekent dit dat $2|V|$ deelbaar moet zijn door 3, ofwel 2 keer het aantal punten n moet deelbaar zijn door 3. Dit betekent precies dat $|V|$, het aantal punten n van de graaf C_n, deelbaar moet zijn door 3.

Wanneer we echter het rondje met de kleuren a, b en c maken voor bijvoorbeeld de cykelgraaf op 5 punten, zoals in Figuur 14, dan zien we aan het einde van dit rondje dat dit inderdaad niet uitkomt, waardoor we dus zeker weten dat C_5 niet met 3 kleuren te kleuren is en hij met zijn totale kleuring dus niet in klasse 1 valt.



Figuur 14

Nu willen we nog definitief maken dat alle cykelgrafen op n punten, waarbij n niet deelbaar is door 3, wel zeker te kleuren zijn met maximaal $\Delta(G) + 2 = 4$ kleuren. We zagen al dat voor deze grafen geldt dat $\chi''(G) > \Delta(G) + 1 = 3$ en dus geldt dat $\chi''(G) \geq \Delta(G)+2$. Het vermoeden van Vizing is echter slechts een vermoeden en daarom willen we voor deze grafen ook nog expliciet laten zien dat er inderdaad ook geldt dat $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 2 = 4$.

Stel nu dat C_n een cykelgraaf is en dat n niet deelbaar is door 3, maar dat $n-1$ wel deelbaar is door 3. We gaan C_n kleuren zodanig dat we beginnen bij het punt v_1 en zo het rondje verder maken tot en met het punt v_{n-1}, de lijn $v_{n-1} \to v_n$, het punt v_n en ten slotte nog de laatste lijn van v_n naar v_1. De cykelgraaf C_{n-1} is wel te kleuren met 3 kleuren, omdat $n-1$ deelbaar is door 3. Daarom kunnen we de lijnen en punten van de graaf C_n vanaf het punt v_1 nu zodanig kleuren in een rondje met a, b en c, dat het punt v_{n-1} nog gekleurd is met b en de lijn $v_{n-1} \to v_n$ gekleurd is met c, aangezien dit de laatste lijn zou zijn in C_{n-1}, waar het dus wel uitkwam om deze lijn met c te kleuren. Nu hebben we dus enkel nog de lijn $v_n \to v_1$ en het punt v_n over die we nog moeten kleuren. Nu kunnen we v_n met onze benodigde vierde kleur d kleuren, maar voor de lijn $v_n \to v_1$ blijft nu geen enkele van de vier kleuren meer over als optie om deze lijn te kleuren. Daarom moeten we nu een kleur gaan verwisselen. De kleur d geeft nu sowieso een mogelijkheid, dus we herkleuren de lijn $v_1 \to v_2$ van b naar kleur d en nu kunnen we mooi onze laatste lijn $v_n \to v_1$ kleuren met de kleur b. Deze methode kunnen we dus gebruiken voor alle grafen waarbij n niet deelbaar is door 3, maar $n-1$ wel.

Stel nu dat C_n een cykelgraaf en dat n niet deelbaar is door 3, maar dat $n-2$ wel deelbaar is door 3. Dan kleuren we ook hier, net als in de vorige alinea, de punten en lijnen van v_1 tot en met de lijn $v_{n-2} \to v_{n-1}$ afwisselend met de kleuren a, b en c. Nu hebben we nog 2 punten en 2 lijnen over die gekleurd moeten worden. Hiervoor kunnen we nog op dezelfde manier a, b en c erbij kleuren voor respectievelijk het punt v_{n-1}, de lijn $v_{n-1} \to v_n$ en het punt v_n. Nu blijft er alleen nog de lijn $v_n \to v_1$ over om gekleurd te worden en hiervoor kunnen we precies nog onze benodigde vierde kleur d voor gebruiken. Deze methode kunnen we dus gebruiken voor alle grafen waarbij n niet deelbaar is door 3, maar $n-2$ wel deelbaar is door 3.

Het resultaat is nu dus dat,

$$\chi''(C_n) = \begin{cases} \Delta(C_n) + 1 & \textit{als } n \textit{ is deelbaar door 3.} \\ \Delta(C_n) + 2 & \textit{als } n \textit{ is niet deelbaar door 3.} \end{cases} \tag{2}$$

4.2 Multicykels

In Hoofdstuk 2 zagen we al dat voor het lijnkleurgetal van multigrafen ook een bovengrens bestaat, waarna we inzoomden op, de typische graaf, de multicykel. Nu we weten hoe het totale kleuringsgetal zich verhoudt voor enkelvoudige cykels, kunnen we ook voor multicykels het totale kleuringsgetal analyseren.

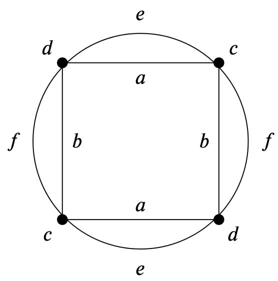
Voor het lijnkleurgetal van multigrafen zagen we met de Stelling van Vizing dat geldt dat $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + \mu(G)$. Dit geeft als het ware een sterkere versie van de enkelvoudige versie van de Stelling van Vizing voor $\mu = 1$. Voor het totale kleuringsgetal zullen we zeker niet zo'n soort stelling kunnen formuleren voor multigrafen. Als we dit namelijk wel zouden kunnen, dan zou deze stelling ook sterker zijn dan de enkele versie met $\mu = 1$. Voor $\mu = 1$ weten we echter al dat deze 'stelling' slechts een vermoeden geeft, dus zo'n stelling voor het totale kleuringsgetal van multigrafen kan nog zeker niet bewezen worden. We kunnen wellicht wel een gok doen naar een vermoeden voor totale kleuringen van multigrafen, zoals er voor enkelvoudige grafen ook een vermoeden bestaat. De ondergrens blijft, net als voor enkelvoudige grafen, op $\Delta(G) + 1$ staan. Voor de bovengrens telt het enkelvoudige vermoeden er slechts 1 bij op ten opzichte van de bovengrens van lijnkleuringen. Hierbij kunnen we die 1 zien als het punt dat we er nu bij moeten kleuren naast de lijnen. Voor multigrafen komen er wel lijnen bij om te kleuren, maar geen punten. Dit doet vermoeden dat we ook voor de totale kleuring van multigrafen er dus slechts 1 bij op hoeven te tellen ten opzichte van de grenzen voor lijnkleuringen van multigrafen. We hebben nu dus het volgende vermoeden.

Vermoeden 4.2. *Het totale kleuringsgetal $\chi''(G)$ voor een multigraaf G voldoet aan, $\Delta(G) + 1 \leq \chi''(G) \leq \Delta(G) + \mu(G) + 1$.*

Omdat het lastig is in het algemeen iets over bepaalde typen multigrafen te zeggen, gaan we nu, net als in Hoofdstuk 2, multicykels $C_{n,\mu}$ op n punten analyseren.

Voor de (multi)cykel $C_{3,1} = C_3$ hebben we zojuist gezien dat $\chi'' = \Delta_1 + 1 = 3$. Voor de multicykel $C_{3,2}$ kunnen we snel zien dat we niet meer kleuren nodig hebben dan voor de lijnkleuring van deze graaf en dus geldt dat $\chi''(C_{3,2}) = \Delta_2 + \mu = 6$. Voor alle multicykels op $n = 3$ punten kunnen we na het kleuren van de lijnen, de punten van de cykel kleuren met een van de μ verschillende kleuren gebruikt voor de overstaande lijnen. Daarom geldt dat $\chi''(C_{3,\mu}) = \Delta_\mu + \mu$ voor alle μ.

Voor de (multi)cykel $C_{4,1} = C_4$ hebben we zojuist gezien dat $\chi'' = \Delta_1 + 2 = 4$. Voor $C_{4,2}$ kunnen we beredeneren, op dezelfde manier zoals we in Hoofdstuk 2 deden, dat het totale kleuringsgetal in ieder geval nooit meer zal zijn dan $\Delta_2 + 2$. Dit omdat, we ook nu weer de rondjes bij elkaar op kunnen tellen. Het verschil is nu echter, dat we voor het eerste rondje de totale kleuring nemen (dus inclusief de punten) en voor ieder volgend rondje, in dit geval nog 1 extra rondje, tellen we het lijnkleuringsgetal van de enkelvoudige versie er bij op. Voor ieder nieuw rondje, gebruiken we weer alleen nieuwe kleuren ten opzichte van alle voorgaande rondjes. Zie Figuur 15. Op deze manier hebben we zeker een correcte kleuring van de graaf gemaakt. Dit betekent in dit geval dus dat $\chi''_2 \leq \chi''_1 + \chi'_1 = (\Delta_1 + 2) + \Delta_1 = \Delta_2 + 2 = 6$. Dit is niet gelijk aan de ondergrens voor $C_{4,2}$, welke gelijk is aan 5, en daarom controleren we of we toch met nog een kleur minder hadden kunnen kleuren. Echter, we moeten in het totaal 8 lijnen en 4 punten kleuren. We kunnen iedere kleur maar maximaal 2 keer gebruiken in deze graaf en daarom hebben we minstens $\frac{8+4}{2} = 6$ kleuren nodig. Het totale kleuringsgetal voor $C_{4,2}$ is dus inderdaad 6. Voor de cykelgraaf $C_{4,3}$ kunnen we het opteltrucje op dezelfde manier toepassen. Alleen het eerste rondje, inclusief de punten, neemt de bovengrens Δ_1+2 aan die een totale kleuring kan hebben. Ieder volgend rondje waarbij we de lijnkleuring van dat rondje bekijken geeft ons Δ_1, de ondergrens voor lijnkleuringen, om er bij op te tellen. We gaan dus ook voor $C_{4,3}$ uiteindelijk krijgen dat $\chi''(C_{4,3}) = (\Delta_1+2)+\Delta_1+\Delta_1 = \Delta_3+2$, omdat alle maximale graden bij elkaar opgeteld altijd de nieuwe maximale graad geeft. Merk op dat we voor $C_{4,2}$ hadden gezien dat $\chi''_2 = \Delta_2 + 2 = \Delta_2 + \mu$ en nu voor $C_{4,3}$ hebben gevonden dat $\chi''_3 = \Delta_3 + 2 = \Delta_3 + \mu - 1$. Dit patroon zet zich voort voor alle volgende μ voor $C_{4,\mu}$. Zo geldt bijvoorbeeld voor $C_{4,4}$ inderdaad dat $\chi''_4 = \Delta_4 + 2 = \Delta_4 + \mu - 2$.



Figuur 15

Voor de (multi)cykel $C_{5,1} = C_5$ hebben we gezien dat $\chi''_1 = \Delta_1 + 2 = 4$, omdat 5 niet deelbaar is door 3. We zagen al dat het vanaf $C_{5,2}$ lastiger werd om iets over het lijnkleurgetal van de graaf te zeggen, omdat we soms een (extra) kleur van de bovengrens af konden snoepen, zoals we voor $C_{5,2}$ inderdaad zagen dat $\chi'_2 = 5$ in plaats van de verwachte bovengrens van 6. We kunnen nu voor de totale kleuring van deze graaf ook nog de punten kleuren met de al gebruikte 5 kleuren voor de lijnen, waardoor er dus geldt dat $\chi''_2 = 5 = \Delta_2$. Als we vervolgens de graaf $C_{5,3}$ onderzoeken dan vinden we dat er voor deze graaf geldt dat $\chi''_3 = 8$. Als we deze resultaten vergelijken met de resultaten voor de lijnkleuringen van multicykels op $n = 5$ punten, dan vinden we dat $\chi'_\mu = \chi''_\mu$, uitgezonderd als $\mu = 1$. Als we de graaf $C_{5,5}$ analyseren vinden we inderdaad ook dat $\chi'_5 = \chi''_5 = 13$. We zagen dit verschijnsel natuurlijk ook al bij de multicykels voor $n = 3$ en het vermoeden rijst dat er altijd geldt dat $\chi'(C_{n,\mu}) = \chi''(C_{n,\mu})$ (als $\mu \neq 1$) en n is oneven. Echter, als we bijvoorbeeld de multicykel $C_{7,2}$ bekijken, dan vinden we dat geldt dat $\chi'_2 = 5$ en dat $\chi''_2 = 6$, waardoor het vermoeden toch ontkracht wordt. Het kan natuurlijk zo zijn dat er alsnog een patroon in zit verweven, maar dit is tot zo ver nog onbekend.

Voor de (multi)cykel $C_{6,1} = C_6$ hebben we gezien dat $\chi''_1 = \Delta_1 + 1 = 3$, omdat 6 deelbaar is door 3. Hiernaast weten we ook dat $\chi'(C_{6,1}) = \Delta_1 = 2$. Voor zowel de lijnkleuring als de totale kleuring geldt dus dat deze beide hun ondergrens aannemen voor de graaf $C_{6,1}$. Dit komt natuurlijk omdat 6 zowel deelbaar is door 3 als door 2. Op het eerste gezicht zouden we bijvoorbeeld voor $C_{6,2}$ misschien zeggen dat $\chi''_2 = \Delta_2 + 2$, zoals voor het andere even getal $n = 4$ het geval was. Echter, zien we door het optellen van het eerste rondje van de totale kleuring plus het tweede rondje van de lijnkleuring, dat er zeker geldt dat $\chi''_2 \leq \Delta_1 + 1 + \Delta_1 = \Delta_2 + 1$. Dit is meteen ook de ondergrens voor de totale kleuring voor deze graaf en daarom geldt dat $\chi''_2 = \Delta_2 + 1$. Omdat we ook voor hogere μ altijd rondjes van lijnkleuringen met de ondergrens van het lijnkleuringsgetal er bij op kunnen tellen, geldt er dus voor alle μ dat $\chi''_\mu = \Delta_\mu + 1$. Dit gaat dus op voor alle multicykels op n punten, waarbij n zowel deelbaar is door 3 als door 2, omdat in dit geval voor de totale kleuring van C_n en ook voor de lijnkleuring van C_n geldt dat hier voor beide de ondergrens wordt aangenomen.

4.3 Volledige grafen

We zagen al aan het begin van dit hoofdstuk dat K_4, de volledige graaf op 4 punten, in klasse 2 valt voor zijn totale kleuring, terwijl K_3 juist in klasse 1 valt. Dit is beide anders dan de klasse van de lijnkleuringen van deze grafen. Hetzelfde geldt ook voor de (flauwe) gevallen als $n = 1$ en $n = 2$.

Stelling 4.3. *Voor $G = K_n$, de volledige graaf op n punten, geldt*

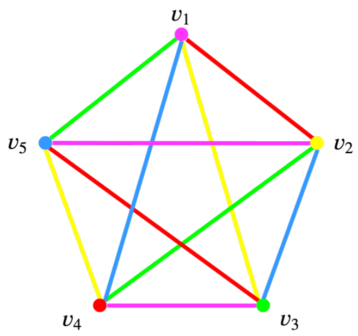
$$\chi''(K_n) = \begin{cases} \Delta(K_n) + 1 & \textit{als } n \textit{ is oneven.} \\ \Delta(K_n) + 2 & \textit{als } n \textit{ is even.} \end{cases} \tag{3}$$

Bewijs. Omdat G volledig is en alle aangrenzende punten een verschillende kleur moeten hebben, weten we daarom zeker dat alle n punten een verschillende kleur moeten krijgen. Dit is precies ook de ondergrens voor het aantal kleuren dat we nodig hebben, doordat $n = \Delta(G) + 1$.

Stel n is oneven. We willen uiteindelijk dat we de hele graaf met maar n kleuren kunnen kleuren. Dit zou betekenen dat we met die n kleuren waarmee we alle punten hebben gekleurd, in dit geval dus ook alle lijnen moeten kleuren.

Er zijn in het totaal $\frac{n(n-1)}{2}$ lijnen. Stel punt $v_1 \in V$, met V de verzameling punten van G, is gekleurd met kleur $\alpha \in K$, met K de verzameling kleuren die we gebruiken om de graaf G totaal kleuren. Omdat v_1 gekleurd is met α kunnen alle andere $v_i \in V$ en alle aangrenzende lijnen aan v_1 dus niet meer met α worden gekleurd. Omdat n oneven is, blijven er nog $n-1$, ofwel een even aantal punten over waartussen we eventuele lijnen kunnen kleuren met α. Omdat een lijn altijd twee aangrenzende punten heeft, kunnen we dus nog maximaal $\frac{n-1}{2}$ lijnen met α kleuren. Dit kunnen we vervolgens doen voor alle n kleuren die we al hebben gebruikt om de n punten te kleuren. Dat betekent dat we precies alle lijnen kunnen kleuren met deze n kleuren, omdat $\frac{n(n-1)}{2}$ ook het aantal lijnen in de graaf is. De vraag is echter nog of dit met het kleuren van de lijnen altijd zodanig goed uitkomt, dat er uiteindelijk geen aangrenzende lijnen met dezelfde kleur worden gekleurd. Daarom moeten we, nadat we een punt met α hebben gekleurd, nog exact maken welke lijnen tussen de overgebleven $(n-1)$ punten we precies met α gaan kleuren.

Om dit te onderzoeken, bekijken we de volledige graaf K_5. Zie Figuur 16 hieronder. Stel we kleuren hier het punt v_1 met $\alpha =$ roze. Dan blijven de 4 punten v_2, v_3, v_4 en v_5 nog over om daartussen lijnen met roze te kleuren en daarom kunnen we nog maximaal 2 lijnen met roze kleuren. Dit geldt ook zo voor de overige 4 kleuren, geel, groen, rood en blauw. Omdat we met al deze kleuren nog 2 lijnen willen kleuren, maar die lijnen niet mogen overlappen en de lijnen niet aangrenzend mogen zijn aan andere lijnen met dezelfde kleur, kunnen we het beste een handig patroon maken om de 5 kleuren toe te kennen aan de lijnen. Voor de kleur roze, die we ook al hebben toegekend aan het punt v_1, kunnen we deze toekennen aan de lijn tussen v_2 en v_5 (dus de lijn tussen de punten direct links en direct rechts van het punt v_1) en aan de lijn tussen de punten v_3 en v_4. Dat zijn dan weer de punten direct links van het vorige 'linkse punt' en direct rechts van het vorige 'rechtse punt'. Op deze manier kunnen we nu ook de andere 4 kleuren, die al gegeven waren aan de punten, toekennen aan lijnen tussen de punten telkens direct links en direct rechts van het oorspronkelijke punt. Nu hebben we de graaf een totale kleuring gegeven met precies $\Delta(G) + 1$ =5 kleuren.



Figuur 16

Het patroon dat we bij de graaf K_5 hebben gebruikt, kunnen we ook voor alle andere oneven n gebruiken. Dat houdt in dat als we het punt $v_i \in V$ van een volledige graaf met kleur α kleuren, dan kleuren we vervolgens ook de verzameling lijnen van $S_i = \{(i - q, i + q) : \text{met } q = 1, 2, ..., \frac{n-1}{2}\}$ met α (met S_i uit [1]).Dit zijn namelijk precies de lijnen zoals we die ook bij het voorbeeld K_5 beschreven. Een lijn tussen de punten direct links en direct rechts in de cykel ten opzichte van het punt v_i. (In de cykel, omdat $C_5 \subseteq K_5$.) Om vervolgens in die cykel één punt verder te wandelen naar links, vanaf het punt dat ook direct links van v_i lag en één punt verder te wandelen naar rechts, vanaf het punt dat direct rechts van v_i lag. Om dus vervolgens de lijn tussen die 2 punten weer met α te kleuren. Dit doen we tot alle punten, uitgezonderd v_i zelf (want die hadden we al met α gekleurd), een aangrenzende lijn gekleurd met α hebben. Nu hebben we in de graaf K_n de deelverzameling $S'_i = S_i \cup \{v_i\} \subseteq (V \cup E)$ gemaakt van alle punten (1 punt) en lijnen die gekleurd zijn met α (de kleur waar het punt v_i mee is gekleurd). Dit kunnen we nu net zo doen voor alle punten in V en omdat K_n n punten heeft, hebben we daarom nu de verzamelingen $S'_i = S_i \cup \{v_i\}$ voor $1 \leq i \leq n$. Omdat iedere lijn uit E en ieder punt uit V precies 1 keer in één van de verzamelingen S'_i voorkomen, geldt dat $\bigcup S'_i = (V \cup E)$ en er geldt dat alle verzamelingen S'_i onafhankelijk zijn van elkaar. Er zijn n verzamelingen S'_i en dus hebben we ook precies n kleuren nodig voor een totale kleuring van de graaf K_n, en dat betekent dat $\chi''(G) = \Delta(G) + 1$. Als gevolg zit daarom de totale kleuring van een graaf K_n, met n oneven, in klasse 1.

Stel nu dat n is even. We bekijken hoe vaak we een willekeurige kleur α maximaal kunnen gebruiken in onze totale kleuring voor de graaf K_n.

Stel de kleur α is gebruikt om een punt te kleuren. We zagen al dat, omdat G volledig is, geldt dat we alle andere punten dan zeker niet meer met α kunnen kleuren. Omdat n even is en we al 1 punt gekleurd hebben met α, blijven er nog $(n - 1)$ punten over waartussen we lijnen kunnen kleuren met α. Hierbij is $(n - 1)$ dus oneven en omdat een lijn altijd grenst aan 2 punten (en eenzelfde punt niet 2 aangrenzende lijnen met kleur α mag hebben), heeft dit als gevolg dat we nog maximaal $\frac{n-2}{2}$ lijnen kunnen kleuren met α. Het aantal kleuren dat we gaan gebruiken in deze vorm is minstens n, omdat we n punten hebben en dus al zeker deze n kleuren nodig hebben. Het is dan ook het gunstigste om deze n kleuren optimaal te benutten, door naast het punt nog ieder kleur voor $\frac{n-2}{2}$ lijnen te gebruiken. Omdat de graaf maar n punten heeft, kan deze vorm ook niet meer dan n keer gebruikt worden.

Opmerking. Stel dat de kleur α niet is gebruikt om een punt te kleuren. Omdat n is even, kan α nu gebruikt worden om maximaal $\frac{n}{2}$ lijnen te kleuren.

In het totaal zijn er n punten en $\frac{n(n-1)}{2}$ lijnen die gekleurd moeten worden. Stel we kunnen K_n (met n even) kleuren met $\Delta(G) + 1 = n$ kleuren. Dan zouden de n kleuren die gegeven zijn aan de n verschillende punten genoeg moeten zijn om daarmee ook alle lijnen te kleuren. We weten dat we met die n kleuren, maar maximaal $\frac{n-2}{2}$ lijnen kunnen kleuren per kleur. Dus de vraag is, of dit überhaupt genoeg is. We zien dat

$$\frac{\textit{totaal aantal lijnen}}{\textit{aantal lijnen per kleur}} = \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{n-2}{2}} = \frac{n(n-1)}{n-2} = \frac{n^2-n}{n-2} = \frac{(n-2)(n+1)+2}{n-2} = (n+1) + \frac{2}{n-2}.$$

Deze uitkomst geeft aan dat we het niet gaan redden om de graaf met n kleuren te kleuren en dat we dus minstens $n+1$ kleuren nodig hebben. De rest $\frac{2}{n-2}$ is verder niet belangrijk, aangezien het al gebleken is dat deze situatie zich dus niet voor kan doen. Daarbij geldt dat we de $(n-1)$-de kleur, die we nu er bij gaan gebruiken om de lijnen van de graaf te kleuren, maximaal $\frac{n}{2}$ keer kunnen gaan gebruiken. Dit in plaats van de $\frac{n-2}{2}$ keer dat we de eerste n kleuren konden gebruiken, zorgt er voor dat we de hele situatie opnieuw moeten bekijken, maar nu met de aanname dat we minstens $n+1$ kleuren nodig hebben om de graaf te kleuren.

Neem aan dat $\chi''(K_n) \geq n+1$ (en n nog steeds even is). We weten al, door het eerste gedeelte van het bewijs voor oneven n, dat er geldt dat $\chi''(K_{n+1}) = n+1$. Omdat sowieso geldt dat $K_n \subseteq K_{n+1}$ geldt nu ook dat $\chi''(K_n) \leq \chi''(K_{n+1}) = n+1$. Daarom is $n+1 \leq \chi''(K_n) \leq n+1$ en dit geeft nu het resultaat dat $\chi''(K_n) = n+1 = \Delta(K_n)+2$. Voor K_n een volledige graaf op n punten, met n is even, geldt dus dat K_n in klasse 2 zit voor zijn totale kleuring.

$\square$

4.4 Bipartiete grafen

Voor alle volledig bipartiete grafen $G = K_{m,n}$ weten we als vanzelfsprekend dat $\chi(G) = 2$ en dat met de Stelling van König (zie Stelling 1.2) geldt dat $\chi'(G) = \Delta(G)$ voor alle grafen G. Nu vragen we ons natuurlijk ook voor totale kleuringen af wat we over $\chi''(G)$ kunnen zeggen.

Stelling 4.4. *Voor $K_{m,n}$, de volledige bipartiete graaf op $n+m$ punten, geldt*

$$\chi''(K_{m,n}) = \begin{cases} \Delta(K_{m,n}) + 1 & \textit{als } m \neq n. \\ \Delta(K_{m,n}) + 2 & \textit{als } m = n. \end{cases} \tag{4}$$

Bewijs. Stel $m \neq n$. Neem aan dat $m < n$ en $G = K_{m,n}$. We weten natuurlijk al dat $\chi''(G) \geq \Delta(G) + 1 = n+1$. Nu is het doel om de graaf ook met maximaal $n+1$ kleuren te kleuren. Daarom gaan we proberen om alle punten en alle lijnen in $n+1$ onafhankelijke verzamelingen te verdelen, zodat we uiteindelijk iedere verzameling met een van de $n+1$ kleuren kunnen kleuren.

Om te beginnen willen we de lijnen van G zodanig verdelen over de n verzamelingen A_p (met $1 \leq p \leq n$), dat alle aangrenzende lijnen niet in dezelfde verzameling zitten.

Daarom gaan we voor iedere verzameling A_p de lijnen exact definiëren van de punten vanuit $V_1 = \{u_1, ..., u_m\}$ naar $V_2 = \{v_1, ..., v_n\}$, waarbij V_1 en V_2 de 2 partities van de punten van G zijn. Voor $p = 1, ..., n$ laten we nu $A_p = \{(u_i, v_{i+p}) | met\ i = 1, ..., m\}$ met de indices modulo n genomen (met A_p uit [1]). Dus bijvoorbeeld bestaat de verzameling van alle lijnen met kleur $p = 1$ uit $A_1 = \{(u_i, v_{i+1}) | i = 1, ..., m\}$ met de indices modulo n genomen. Op deze manier kleuren we dus alle lijnen met kleur $p = 1$ weer parallel aan elkaar (op de modulo n gevallen na, maar deze zou je hier denkbeeldig door moeten zetten), zoals dat bij de volledige grafen ook het geval was. Zo kunnen we dus de verzamelingen $A_1, ..., A_n$ maken en weten we ook zeker dat voor al deze A_i geldt dat deze onafhankelijk zijn, omdat we de lijnen zo verdeeld hebben dat aangrenzende lijnen niet in dezelfde verzameling zitten.

Nu moeten we enkel nog alle punten er bij betrekken zodanig dat we nog maar 1 extra kleur $p = n + 1$ nodig hebben om in het totaal te gebruiken. Hiervoor breiden we alle verzamelingen A_p uit door het punt v_p hier aan toe te voegen. Het punt v_p is met geen enkele lijn uit A_p verbonden, omdat $m \neq n$. Dus nu hebben we de verzameling $B_p = A_p \cup v_p$, die bestaat uit alle lijnen zoals gedefinieerd in de vorige alinea en ook het enkele punt v_p. Dit doen we voor alle $1 \leq p \leq n$, dus we hebben nu n verzamelingen B_p die allemaal onafhankelijk zijn van elkaar en alle lijnen zijn daar in bevat en alle punten van V_2 zijn er ook in bevat. Nu kunnen we nog precies de verzameling $B_{p+1} = \{u_1, ..., u_m\}$ maken die bestaat uit alle punten van V_1. Nu hebben we precies $n + 1$ onafhankelijke verzamelingen van alle lijnen en ook punten gemaakt en dus kan iedere verzameling zijn eigen kleur krijgen, waardoor we dus met succes een $\Delta(G) + 1$ kleuring voor de volledig bipartiete graaf $G = K_{m,n}$ hebben gemaakt.

Stel $m = n$. We kunnen iedere kleur maximaal n keer gebruiken. Dit omdat, vanuit de bovenste rij bekeken, stel we kleuren een punt met α, dan kunnen we vervolgens alle overstaande punten niet meer met α kleuren. Wel kunnen we vanuit alle andere $n - 1$ punten in de bovenste rij nog ofwel een punt ofwel een lijn vanuit ieder punt met α kleuren. Dit geeft dus n keer de mogelijkheid om α te gebruiken. Stel we kleuren een lijn met α vanuit een punt uit de bovenste rij. Vervolgens geldt hiervoor het zelfde. We kunnen alle naastliggende punten met α kleuren ofwel lijnen vanuit die punten die niet grenzen aan de oorspronkelijke of volgende lijnen met α. Stel er is ergens een punt met α gekleurd in de bovenste rij, dan kan deze kleur zeker niet meer worden gebruikt om punten uit de onderste lijn te kleuren. Stel er is geen enkele keer een punt uit de bovenste rij gekleurd met α, maar wel vanuit ieder punt een lijn, ook dan is α dus n keer gebruikt en omdat aangrenzende lijnen nooit dezelfde kleur mogen hebben en de graaf volledig is, zullen er ook geen lijnen meer vanuit de onderste rij punten met α mogen worden gekleurd. Tenslotte kan α nog gebruikt worden om enkel alle punten vanuit de onderste rij te kleuren en ook dit is dus n keer. Dus iedere willekeurige kleur kan maximaal n keer gebruikt worden om een volledig bipartiete graaf totaal te kleuren.

In totaal hebben we $2n$ punten en $n * n = n^2$ lijnen die gekleurd moeten worden. Samen is dit $n(n + 2)$. We kunnen iedere kleur maximaal n keer gebruiken en daarom hebben we minstens $\frac{n(n+2)}{n} = n+2 = \Delta(K_{n,n})+2$ kleuren nodig voor een totale kleuring van $K_{n,n}$.

Nu moeten we nog laten zien dat we niet meer dan $\Delta(K_{n,n}) + 2$ kleuren nodig hebben om $K_{n,n}$ te kleuren. Omdat we iedere kleur n keer kunnen gebruiken, kunnen we alle lijnen van $K_{n,n}$ in n verschillende deelverzamelingen opdelen. Hierbij gebruiken we precies de verzamelingen $A_p = \{(u_i, v_{i+p}) | met\ i = 1, ..., n\}$ voor $1 \leq p \leq n$, zoals we A_p ook in het geval van $m \neq n$ hadden gedefinieerd. Alle verzamelingen A_p zijn dan ook nu weer onafhankelijk van elkaar. Nu hebben we echter iedere kleur die we gebruikt hebben om een lijn van $K_{n,n}$ te kleuren meteen ook n keer gebruikt en daarom kunnen we al deze n kleuren niet meer gebruiken om een punt te kleuren. Wel kunnen we nu beide verzamelingen punten V_1 en V_2 ieder met een eigen kleur kleuren. Op deze manier hebben we de volledig bipartiete graaf $K_{n,n}$ nu met $n+2 = \Delta(K_{n,n})+2$ kleuren gekleurd en dus geldt dat $\chi''(K_{n,n}) = \Delta(K_{n,n}) + 2$.

$\square$

Referenties

[1] M. Behzad, G. Chartrand and J.K. Cooper, Jr. *The Colour Numbers of Complete Graphs*. Journal of the London Math. Soc., s1-42, **1**, 1967.

[2] R. L. Brooks. *On colouring the nodes of a network*. In Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., volume 37, pages 194–197. Cambridge Univ. Press (1941).

[3] I. Holyer. *The NP-Completeness of Some Edge-Partition Problems*. SIAM J. Comput., **10** (1981), pp. 713-717.

[4] D. König. *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen (Leipzig, 1936).*

[5] A. Soifer. *The Mathematical Coloring Book*. Springer-Verlag, (2008).

[6] V.G. Vizing. *On an estimate of the chromatic class of a ρ-graph*. Diskret. Analiz., **3** (1964), pp. 25-30.

[7] D.B. West. *Introduction to Graph Theory (second ed.)*. Prentice Hall (2001).