Strong Edge Coloring

Marleen Kock

December 11, 2012

1 Probleem

Gegeven een graaf $G = (V, E)$ een sterke zijde-kleuring van graaf G is een toekenning van kleuren aan de zijden van de graaf zodanig dat zijde u en v niet dezelfde kleur krijgen toegekend als $d(u, v) \leq 1$ waarbij $d(u, v) = min\{d(w, y), d(w, z), d(x, y), d(x, z)\}$. Je wilt de zijden van een graaf kleuren. Zijden die naast elkaar of op één zijde na naast elkaar liggen, mogen niet de zelfde kleur krijgen. We zoeken naar het minimum aantal kleuren om een graaf op deze manier te kleuren. In dit document zullen we in het vervolg steeds een zijde-kleuring bedoelen als het woord kleuring gebruikt wordt.
Er is een functie afhankelijk van de graad van een graaf die een bovengrens is voor dit probleem voor $2K_2$-vrije grafen. Men vermoed dat deze bovengrens opgaat voor alle grafen. Dat is echter pas bewezen voor grafen met een maximale graad kleiner of gelijk aan 3. Voor grafen met graad 4 heeft Horák aangetoond dat er 22 kleuren altijd voldoende zijn voor een sterke kleuring. De grens die echter wordt gegeven door de functie is 20. Hij/zij heeft dit bewezen in het artikel : 'The strong chromatic index of graphs with maximum degree four' dat verschenen is in 'Contemporary methods in graph theory'.

1.1 Notaties en definities

- $E(G)$ is de verzameling van zijden van graaf G.
- $V(G)$ is de verzameling van punten van graaf G.
- Een onafhankelijke verzameling punten binnen een graaf G is een deelverzameling van $V(G)$ zodanig dat er tussen geen van deze punten een zijde bestaat in G. Voor dit begrip wordt ook soms de term stabiele verzameling gebruikt.
- $s'(G)$ is het minimum aantal kleuren nodig voor een 2-sterke kleuring met.
- $\chi'(G)$ is het minum aantal kleuren nodig voor een 2-naburig sterke kleuring.
- Onder $[A, B]$ verstaan we de bipartite graaf met zijden tussen de puntenverzamelingen A en B die zich ook in een graaf G bevinden.
- $N(x)$ is de verzameling van buren van x. Als het niet voor zich spreekt dat we kijken in een graaf G noteren we $N_G(x)$
- $N_2(e)$ is de verzameling van zijden die een afstand kleiner of gelijk aan 1 hebben van zijde e.
- $\omega(G)$ is gelijk aan de grootte van een maximale kliek in een graaf.
- $Dom(K)$ is de verzameling van alle punten die verbonden zijn met een punt in de verzameling K.
- Met $K = \{x_1, ...x_p\}$ bedoelen we de dominante kliek bestaande uit p elementen.
- $Y = V(G) - K$
- Als $y_1, y_2 \in Y$ en $y_1y_2 \in E(G)$ dan definieren we het gewicht $w(y_1y_2) = |N(y_1) \cap K| + |N(y_2) \cap K|$
- Zij S een deel verzameling uit $\{1, ...p\}$, $A(S) = \{y \in Y | yx_i \in E(G) \iff i \in S\}$

- $A(i)$ en $A(j)$ zijn gelinkt als er een $x \in A(i)$ bestaat die een buur is van alle punten in $A(j)$ en een $y \in A(j)$ die een buur is van alle punten in $A(i)$.
- $L(G)$ is de lijngraaf die de zijden van G als punten heeft en twee punten verbind als de bijbehorende zijden naburig zijn.
- $E_G(A)$ duidt op de zijden van de graaf geïnduceerd door puntendeelverzameling A.
- $E_G(A, B)$ duidt op de zijden van de graaf met één uiteinde in A en één in B.
- $h : \Omega \to \mathbb{R}$ is Lipschitz als $|h(x) - h(y)| \leq 1$ als x en y maar één coördinaat verschillen.
- f is certificeerbaar als $h(x) \geq s$ wordt veroorzaakt door maximaal $f(s)$ coördinaten van x.

2 Bovengrens in $2K_2$-vrije grafen

Voor grafen met de maximale graad kleiner of gelijk aan 3, bestaat er een bovengrens die afhankelijk is van de graad. Het vermoeden is dat deze bovengrens ook opgaat voor grotere graden, dit is echter nog een open probleem. Wel geldt deze bovengrens voor $2K_2$-vrije grafen. Dit is bewezen door Chung, Gyarfas, Tuza en Trotter in het artikel 'The maximum number of edges in $2K_2$-free graphs of bounded degree'. $2K_2$-vrije grafen zijn grafen die $2K_2$ niet als geïnduceerde deelgraaf hebben. Dat wil zeggen dat er geen twee zijden zijn die door meer dan één zijde van elkaar gescheiden zijn. In dergelijke grafen is het aantal zijden dus gelijk aan het aantal kleuren bij een sterke kleuring.
De bovengrens is als volgt:
$s'(G) \leq f(D)$ met $f(D) = \frac{5}{4}D^2$ als D even is en $f(D) = \frac{5D^2-2D+1}{4}$ als D oneven is.

2.1 Lemma's

Om te bewijzen dat $f(D)$ een bovengrens geeft, bewijzen we eerst een aantal lemma's.

Lemma 2.1. *Als een graaf G $2K_2$-vrij is en A is onafhankelijk, $B = V(G) - A$ dan is er een x waarbij $N(x)$ alle zijden van $[A, B]$ ontmoet.*

Proof. Kies $x \in B$ zodat x maximale graad heeft in $[A, B]$.
Neem aan dat $N(x) \cap \{p, q\} = \emptyset$ voor $pq \in E(G)$, $p \in A$ en $q \in B$.
$\forall \tau \in A : \tau p \notin E(G)$ omdat A onafhaneklijk is.
Omdat $xp, xq \notin E(G)$ en G $2K_2$-vrij is, moet $\tau q \in E(G)$.
Maar omdat die voor alle τ geldt, betekent dat dat de graad van q groter is dan de graag van x in $[A, B]$ en dat is in tegenspraak met onze aanname.
Dus: $\exists x$ zodat $N(x)$ alle zijden van $[A, B]$ ontmoet. □

Lemma 2.2. *Als G niet bipartiet en wel $2K_2$-vrij en $\omega(G) = 2$ dan kan G worden verkegen door puntvermenigvuldiging in een 5-cykel.*

Proof. Omdat $\omega(G) = 2$ weten we dat de minimale lengte van een oneven cykel in G gelijk is aan 5.
Bekijk de 5-cykel: $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ en $A_i = \{u | u \text{ grenst aan } x_i \text{ en } x_{i+2} \ i \bmod 5\}$.
A_i is onafhankelijk omdat er anders 3-cykels zouden zijn.
De verzameling $\{A_i\}_i$ vormt een partitie op $V(G)$, anders zou G niet $2K_2$-vrij zijn.
Hierdoor zien we dat G verkregen kan worden uit C_5 door x_i te vermenigvuldigen met $|A_i|$. □

Lemma 2.3. *Als $\omega(G) = p \geq 3$ dan is er een dominante kliek $K = \{x_1, ..., x_p\}$. Dat betekent dat elk punt in G een buur is van een punt in K.*

Proof. Kies een kliek Kmet p punten, zodanig dat $t = |V(G) - Dom(K)|$ minimaal is.
Als $t = 0$ zijn we klaar, we nemen dus aan dat dit niet het geval is.
Definieer $Z = V(G) - Dom(K)$, Z is onafhankelijk want G is $2K_2$-vrij.
Voor $i = 1, ..., p$ definieer $Y_i = \{y \in Dom(K) | yx_j \in E(G) \iff i = j\}$ Y_i is ook onafhankelijk want G is $2K_2$-vrij.

Kies $z_0 \in Z$, $y_0 \in Dom(K)$, $z_0y_0 \in E(G)$.
Dan is er een unieke $i \leq p$ zodat $y_0x_j \in E(G) \iff i \neq j$ Dit omdat y_0 niet met heel K en met z_0 verbonden kan zijn en deze i is uniek omdat G anders niet $2K_2$-vrij.
Definieer $K' = (K - \{x_i\}) \cup y_0$ een kliek van grootte p.
Elk punt in K wordt bereikt door K' behalve $Y_i' = \{y \in Y_i | y_0y \in E(G)\}$.
Omdat $z_0 \in Dom(K')$ en t minimaal is, weten we dat Y_i' niet leeg is.
Kies $y_1 \in Y_i'$, z_0y_o en x_iy_1 zorgen ervoor dat ook $z_0y_1 \in E(G)$.
Kies verschillende $j, k \in \{1, ..., p\} - \{i\}$, dan zijn z_0y_1 en x_jx_k onafhankelijk, maar dat is in tegenspraak met het feit dat G $2K_2$-vrij is.
Dus mogen we stellen dat $t = 0$ en het lemma volgt. □

2.2 Het bewijs

We zullen stap voor stap bewijzen dat $f(x)$ een bovengrens is voor het aantal kleuren in een sterke kleuring in een $2K_2$vrije graaf.

Theorem 2.4. *Als een graaf G bipartiet is en $2K_2$-vrij, dan $|E(G)| \leq D^2$ en daarmee $s'(G) \leq f(D)$.*

Proof. Dit is een gevolg van lemma 1. Als G bipartiet en $2K_2$-vrij is dan zijn er in beide klassen punten wiens buren alle punten uit de andere klassen bereiken. Er zijn dus maximaal D^2 zijden. □

Theorem 2.5. *Als G $2K_2$-vrij is, niet bipartiet en $\omega(G) = 2$ dan $|E(G)| \leq f(D)$.*

Proof. Lemma 2 laat zien dat G verkregen kan worden uit eeh 5-cykel door puntvermenigvuldiging. We gebruiken de constructie van A_i uit het bewijs van lemma 2.
$|E(G)| = \sum_{i=1}^{5} |A_i||A_{i+1|} \leq f(D)$ met $|A_i| + |A_{i+2}| \leq D$. □

Theorem 2.6. *Als G $2K_2$-vrij is, niet bipartiet en $\omega(G) \geq 5$ dan $|E(G)| \leq \frac{5D^2-5D-20}{4} < f(D)$.*

Proof. Lemma 3 laat zien dat er een dominanite kliek $K = \{x_1, ..., x_p\}$ is van grootte $p \geq 5$.
Als $y_1, y_2 \in Y$ en $y_1y_2 \in E(G)$ dan is $w(y_1y_0) \geq p - 1$ omdat G anders niet $2K_2$-vrij is.
Er zijn maximaal $\binom{p}{2} + p(D - p + 1)$ zijdes die beginnen in K, $\binom{p}{2}$ in K en $p(D - p + 1)$ vanuit K in Y.
Het totale gewicht van de zijden in Y is kleiner of gelijk aan $p(D - p + 1)(D - 1)$, $p(D - p + 1)$ is het maximale aantal punten in Y en $D - 1$ het maximale gewicht van een zijde.
Omdat $w(e) \geq p - 1$ hebben we nu:

$$|E(G)| \leq \binom{p}{2} + p(D-p+1) + \frac{p}{p-1}(D-p+1)(D-1) = \frac{p}{p-1}D^2 - \frac{p}{p-1}D - \frac{p(p-3)}{2}$$

voor $p \geq 5$ is dit een dalende functie en deze is kleiner dan $\frac{5D^2-5D-20}{4} \leq f(D)$. □

Theorem 2.7. *Als G $2K_2$-vrij is, niet bipartiet en $\omega(G) = 4$ dan $|E(G)| \leq \frac{5D^2-3D-10}{4} < f(D)$.*

Proof. Uit de stelling over het totale gewicht van de zijdes in Y kunnen we het volgende afleiden: $|E(G)| \leq 4D - 6 + (D-1)(D-3) + \frac{1}{4}|E_3| = \frac{1}{4}|E_3| + D^2 - 3$ met $E_3 = \{xy \in Y | w(xy) = 3\}$
Definieer $A^j = \{y \in Y || N(y)| = j\}$. Als $e = uv$ en $e \in E_3$ dan moet gelden dat $u \in A^1$ en $v \in A^2$ of andersom.
A^1 is onafhankelijk anders zou G niet $2K_2$-vrij zijn.
Volgens lemma 1 is er een $y \in A^2$ zodat $N(y)$ alle zijden in $E_3 = [A^1, A^2]$ ontmoet.
y heeft maximaal $D - 2$ buren in Y, zij ontmoeten maximaal $D - 1$ zijden in E_3.
Dus $|E_3| \leq (D-1)(D-3)$.
Dit geeft $|E(G)| \leq (D-1)(D-3) + D^2 - 3 = \frac{5D^2-3D-10}{4} < f(D)$. □

Theorem 2.8. *Als G $2K_2$-vrij is, niet bipartiet en $\omega(G) = 3$ dan $|E(G)| \leq f(D)$.*

Het bewijs voor deze stelling is wat ingewikkelder dan de bewijzen voor de vorige stellingen. We zullen de stelling bewijzen aan de hand van een aantal claims.

Proof. Neem aan dat $|E(G)| \geq f(D)$.

Claim 1 $|Y| > \frac{(5D-8)}{2}$

Proof. Neem aan dat het niet zo is. Als D even is dan vinden we $|E(G)| \leq |Y|\frac{(D-1)}{2} + 3 + 3(D-2) \leq (5D-8)\frac{(D-1)}{4} + 3D - 3 = \frac{5D^2-D-4}{4} < \frac{5D^2}{4} = f(D)$
Als D oneven is dan hebben we $|Y| \leq \frac{5D-9}{2}$ en vinden we $|E(G)| \leq \frac{5D^2-2D-3}{4} < f(D)$.
Als claim 1 dus niet geldt, dan hebben we de stelling bewezen. We zullen verder aannemen dat claim 1 dus geldt. □

Claim 2 $|A(1)| > |A(23)| + \frac{D}{2}$, $|A(3)| > |A(12)| + \frac{D}{2}$ en $|A(3)| > |A(12)| + \frac{D}{2}$.

Proof. $|Y| = |N(x_2) \cap Y| + |N(x_3) \cap Y| + |A(1)| - |A(23)| \leq 2(D-2) + |A(1)| - |A(23)|$
$\frac{5D-8}{2} \leq 2(D-2) + |A(1)| - |A(23)|$ hieruit volgt dat $||A(1)| - |A(23)|| \geq \frac{D}{2}$
en hieruit volgt dat$|A(1)| > |A(23)| + \frac{D}{2}$.
De rest werkt op een analoge manier. □

Definieer $\lambda_1 = |A(1)| + |A(2)| + |A(3)|$ en $\lambda_2 = |A(12)| + |A(13)| + |A(23)|$. $|Y| = \lambda_1 + \lambda_2$, $3D - 6 \geq \lambda_1 + \lambda_2$ en hieruit volgt dat $\lambda_1 > \lambda_2 + \frac{3D}{2}$

Claim 3 $\lambda_2 < \frac{D-4}{2}$

Proof. Neem aan dat $\lambda_2 \geq \frac{D-4}{2}$ dan $3D - 6 \geq \lambda_1 + 2\lambda_2 \geq |Y| + \frac{D-4}{2}$ en hieruit volgt dat $|Y| \leq \frac{5D-8}{2}$ en dat is in tegenspraak met claim 1. □

Claim 4 $A(1) \cup A(2) \cup A(3)$ is geen onafhankelijke verzameling

Proof. Neem aan dat het wel een onafhankelijke verzameling is, dan hebben we: $|E(G)| \leq 3D - 3 + \lambda_2(D-2) < 3D - 3 + \frac{(D-4)(D-2)}{2} \leq f(D)$. Als claim 4 dus niet geldt, dan hebben we de stelling bewezen. We zullen verder aannemen dat claim 1 dus geldt. □

Claim 5 $A(1) \cup A(2)$, $A(1) \cup A(3)$ en $A(2) \cup A(3)$ zijn geen onafhankelijke verzamelingen.

Proof. Neem aan dat $A(1) \cup A(2)$ een onafhankelijke verzameling is. Door claim 4 weten we dat er een zijde is in $A(1) \cup A(2) \cup A(3)$. Neem xz met $x \in A(1)$ en $z \in A(3)$. Neem $y \in A(2)$. xz en x_2y impliceren dat $yz \in E(G)$ omdat we anders in de problemen komen met de $2K_2$-vrijheid.
$\forall x' \in A(1)$ geldt dat $x'x_1, zy \in E(G)$, dus z is een buur van elk punt in $A(1) \cup A(2)$ maar $|A(1) \cup A(2)| > D$ en dat is met elkaar in tegenspraak. Dus is $A(1) \cup A(2)$ geen onafhanekelijke verzameling. De rest gaat op een analoge manier. □

Claim 6 Neem $i, j \in 1, 2, 3$ dan geldt één van de volgende uitspraken:

1. $\exists x \in A(i), xy \in E(G) \forall y \in A(j)$
2. $\exists y \in A(j), xy \notin E(G) \forall y \in A(i)$

Proof. Neem aan dat uitspraak 2 niet geldt. Kies $x \in A(i)$ zodat $|N(x) \cap A(j)|$ maximaal is. Stel dat $y \in A(j)$ geen buur van x is, kies een buurt x^* van y in $A(i)$. Maar dan heeft x^* meer buren in $A(j)$ dan x omdat G $2K_2$-vrij is. Dit is in tegenspraak met de maximaliteit van $|N(x) \cap A(j)|$. Dus kunnen we stellen dat één van bovenstaande uitspraken altijd geldt. □

Claim 7 Er bestaan $i, j \in \{1, 2, 3\}$ met ij zodat $A(i)$ en $A(j)$ gelinkt zijn.

Proof. Neem aan dat $A(1)$ en $A(2)$ niet gelinkt zijn. Zonder verlies van algemeenheid mogen we aannemen dat $\exists y_0 \in A(2)$ zodat $xy_0 \notin E(G)$ $\forall x \in A(1)$. Door claim 5 weten we dat er een zijde x_0z_0 is met $x_0 \in A(1)$ en $z_0 \in A(3)$. Hieruit volgt dat $y_0z_0 \in E(G)$ anders is G niet $2K_2$-vrij. Met dit zelfde argument vinden we ook dat $z_0x \in E(G)$ $\forall x \in A(1)$.
Met behulp van claim 2 kiezen we $y_i \in A(2)$ zodat $z_0y_1 \notin E(G)$ hieruit volgt dat $y_1x \in E(G)$ $\forall x \in A(1)$
Als A(1) en A(3) niet gelinkt zijn, dan is er een $z_i \in A(3)$ met $z_1x \notin E(G)$ $\forall x \in A(1)$.
Het bestaan van x_0y_1 impliceert het bestaan van y_1z_1 en het bestaan van y_0z_0 en y_1z_1 impliceert het

bestaat van y_0z_1, in verband met het argument van de $2K_2$-vrijheid. Maar dan induceren y_0z_1 en x_1x_0 een $2K_2$-deelgraaf en dat is ten strengste verboden. Dus de claim geldt. □

Nu kunnen we zonder verlies van algemeenheid aannemen dat $A(1)$ en $A(2)$ gelinkt zijn. Kies $a_0 \in A(1), b_0 \in A(2)$ zodat $a_0b, ab_0 \in E(G)\ \forall a \in A(1), b \in A(2)$.
Dus elk punt in Y is een buurt van a_0 of b_0 (i.v.m. $2K_2$-vrijheid), behalve misschien de punten in $A(12)$. We zien dus dat $|Y| \leq 2(D-1) + |A(12)|$, maar $|Y| > \frac{5D-8}{2}$ impliceert dat $|A(12)| > \frac{D-4}{2}$ en dat is in tegenspraak met claim 3.
De beginaanname leidt dus tot een tegenspraak en we kunnen stellen dat de stelling waar is.

Theorem 2.9. *Het aantal kleuren in een $2K_2$-vrije graaf is van boven begrenst met $f(D)$.*

Proof. Dit volgt uit alle hierboven bewezen stellingen. □

3 Bovengrens voor grafen met een graad kleiner of gelijk aan 3

Voor $D = 3$, $f(D) = 10$. Andersen heeft in het artikel: 'The strong chromatic index of a cubic graph is at most 10' bewezen dat het aantal kleuren nodig voor een sterke kleuring in een graaf met $D \leq 3$ kleiner of gelijk is aan 10. Voor grafen met maximale graad 1 of 2 is dit duidelijk. Grafen met maximale graad 1 kunnen sterk gekleurd worden met één kleur. Grafen met maximale graad 2 zijn lijnen of cykels. Deze kunnen sterk gekleurd worden met maximaal drie verschillende kleuren.
Andersen heeft bewezen dat grafen met maximale graad 3, sterk gekleurd kunnen worden met 10 kleuren door een soort gretig algoritme te geven. Het algoritme maakt een partiële kleuring met maximaal 10 kleuren, vervolgens worden de overige zijdes gekleurd. Het algoritme start vanuit een punt v_0. We maken de klassenindeling: $D_i = \{v|d(v_0, v) = i\}$. Stel $e = xy$ dan $d(e) = min\{d(v_0, x), d(v_0, y)\}$. $\{D_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ vormt een klassenordening. De kleuring vindt plaats in volgorde van deze klassen. Dit algoritme werkt in lineaire tijd.
Om te bewijzen dat dit algoritme werkt, bewijst Andersen eerst 10 lemma's over speciale grafen. Vervolgens bewijst hij 5 lemma's over de manier waarop je een partiële sterke kleuring kunt uitbreiden tot een sterke kleuring. Voor nu laat ik deze lemma's en hun bewijzen even voor wat ze zijn in verband met tijdgebrek. Hieronder vindt u het algoritme dat uitgaat van de bewezen lemma's. Het schetst dus slechts het bewijs, het gehele bewijs telt 22 pagina's en kunt u vinden in het eerder genoemde artikel.

Theorem 3.1. *Er bestaat een algoritme dat in lineaire tijd een sterke kleuring maakt voor grafen met $D \leq 3$ met maximaal 10 kleuren. Op elk samenhangend component van de graaf, is het algoritme bigreetig, op 21 zijden na.*

Proof. Lemma's 2 tot en met 14 laten zien dat er een sterke kleuring met maximaal 10 kleuren bestaat. We orderen alle punten van de graaf in een lijst met de relevante informatie, dit kan gebeuren in $O(n)$ tijd. De samenhangende componenten van de graaf kunnen ook in $O(n)$ tijd vastgesteld worden.
Uitgaande van een samenhangende graaf checken we of de graaf een 1-, 2-, 3-, 4-, of 5-gon bevat. Als dat het geval is dan geven de lemma's 2 tot en met 7 een bewijs voor het bestaan en functioneren van het algoritme.
We kijken nu dus enkel naar cubische grafen met 'girth' minstens 6. We bekijken ene punt x de buren van x zijn u, v, w. De buren van u zijn x, u_1, u_2 analoog voor de buren van v en w. uu_1, vv_1 en ww_1 kleuren we met kleur a en uu_2 en vv_1 met kleur b. s is een rij van ongekleurde zijden. We kunnen een dergelijke rij door een eerst-breedte-zoektocht in lineaire tijd construeren. Daarna kunnen we in lineaire tijd controleren of s alle zijden bevat. Als dat het geval is dan bewijst lemma 11 het bestaan en functioneren van het algoritme.
Als dit niet het geval is, dan hebben we een snede F gevonden van maximaal 5 zijdes. Als $|F| \leq 3$ dan bewijzen lemma 8 tot en met 10 het betaan en functioneren van het algoritme. Als $|F| = 4$ or 5 dan hebben óf een kleine snede óf een geval uit figuur 4. Een kleine snede is een snede met 1 of 2 zijden of 3 zijden **die niet triviaal zijn.** Figuur 4 geeft 15 mogelijke afwijkingen van een snede. In het geval van een kleine snede kunnen we algoritme op een bigretige manier beindigen. Bigretig betekent dat er op een gretige manier in twee grafen tegelijkertijd gekleurd wordt. In een geval van figuur 4 proberen we het bewijs van lemma 15 te volgen. We kleuren in dit geval H_g en G_g. H is de deelgraaf van G geïnduceerd door de ongekleurde zijden van G. H_g is H met een aantal zijden er aan toegevoegd. Als

één van H_g en G_g niet samenhangend is dan vinden we een kleine snede en de kleuring kan worden gecompleteerd met behulp van de lemma's 8 tot en met 10.
Dit alles kan gedaan worden in tijd $O(n)$. $\square$

4 Scherpheid

De grens die $f(D)$ weergeeft is scherp. Dit zullen we laten zien door klassen van grafen te construeren die precies $f(D)$ kleuren behoeven voor een sterke kleuring.

4.1 D even

Als D even is, vermenigvuldig je ieder punt van de 5-cykel met $\frac{D}{2}$. De nieuwe punten behorende bij eenzelfde punt in de 5-cykel verbind je niet met elkaar. Tussen de verzameling punten die hoort bij x_i en de verzameling punten die hoort bij x_{i+1} vorm je een volledige bipartiete graaf, voor $i = 1, 2, 3, 4, 5$. De graaf die je nu vindt is $2K_2$-vrij.
Het aantal zijden in deze graaf is: $5 * \frac{D}{2} * \frac{D}{2} = \frac{5}{4}D^2 = f(D)$.

4.2 D oneven

Als D oneven is, vermenigvuldig je twee naast elkaar liggende punten in de 5-cykel met $\frac{D+1}{2}$ en de rest met $\frac{D-1}{2}$. De nieuwe punten behorende bij eenzelfde punt in de 5-cykel verbind je niet met elkaar. Tussen de verzameling punten die hoort bij x_i en de verzameling punten die hoort bij x_{i+1} vorm je een volledige bipartiete graaf, voor $i = 1, 2, 3, 4, 5$. De graaf die je nu vindt is $2K_2$-vrij.
Het aantal zijden in deze graaf is: $(\frac{D+1}{2})^2 + 2 * (\frac{D+1}{2}\frac{D-1}{2}) + 2 * (\frac{D-1}{2})^2 = \frac{5D^2-2D+1}{4} = f(D)$.

4.3 D oneven en G niet $2K_2$-vrij

Er is een eenvoudige constructie om een graaf G met maximale oneven graad D te maken met sterke kleuringsindex $f(D)$. Neem een volgens bovenstaande constructie. Deze graaf heeft $\frac{D-1}{2}$ punten met graad $D-1$. Creëer een zijde aan tenminste één van deze punten. Deze zijde kan tussen twee van de punten met graad $\frac{D-1}{2}$ gecreëerd worden of tussen één dergelijk punt en een nieuw punt. Aan deze zijde kun je alles plakken, zolang er geen punten zijn met graad groter dan D. Nu hebben we een graaf gevonden die niet $2K_2$-vrij is en wel $f(D)$ kleuren nodig heeft voor een sterke kleuring.

5 Grafen met maximale graad 4

Cranston geeft in zijn artikel: 'Strong edge-coloring of graphs with maximum degree 4 using 22 colors' een algoritme om grafen met maximale graad 4 te kleuren met maximaal 22 kleuren. Het algoritme werkt op een gretige manier. Men kiest een punt. Vervolgens begint men met het kleuren van de edges die het verst van dit punt af liggen. We ordenen de kleuren $[1, ..., 22]$. We geven de zijde de eerste kleur die voor die zijde nog beschikbaar is; er zijn nog geen zijden op afstand kleiner of gelijk aan 1 die dezelfde kleur hebben. Het artikel bewijst eerst dat het mogelijk is om op deze manier een partiële sterke kleuring te maken die alleen de zijden grenzend aan het gekozen punt ongekleurd laat. Vervolgens geeft het artikel zes gevalsonderscheidingen met daarin de manier waarop de gemaakte partiële sterke kleuring kan worden uitgebreid tot een volledige sterke kleuring. De bewijzen bij de specifieke gevallen werken vaak op een volgende manier: men toont aan dat $|N_2(e)| \leq 21$ voor de ongekleurde zijden. Oftewel er zijn minder dan 22 kleuren die zijde e niet mag hebben en er is dus nog minstens n kleur die we kunnen toekennen aan de zijde.
We zullen hier bewijzen dat het mogelijk is een partiële sterke kleuring te maken met maximaal 21 kleuren waarbij alleen de zijden naburig aan één gekozen punt ongekleurd blijven. De specifieke gevalsonderscheiding zullen we hier (nog) niet nagaan.

Theorem 5.1. *1. Zij G een graaf met maximale graad 4, dan kent G een sterke kleuring met maximaal 21 kleuren waarbij enkel zijden naburig aan één punt ongekleurd blijven.*

2. *Zij C een cykel in G, dan kent G een sterke kleuring met maximaal 21 kleuren waarbij enkel de zijden in C ongekleurd blijven.*

Proof. 1. Zij $v \in V(G)$, we kleuren gretig en kleuren eerst de zijden die het verst van v af liggen. Zij $e = xy$ een zijde die niet grenst aan v. We kiezen een u zodanig dat $ux \in E(G)$ en u ligt op een kortste route van e naar v.
We weten dat de zijden waar u deel van uitmaakt nog niet gekleurd zijn. Dit zijn 4 zijden die in $N_2(e)$ liggen. Het aantal gekleurde zijden in $N_2(e)$ is dus kleiner of gelijk aan $24 - 4 = 20$ en we kunnen een kleur aan zijde e toekennen. Dit geldt voor alle zijden e die niet aan v grenzen. Dus we kunnen de hele graaf kleuren met maximaal 22 kleuren, waarbij enkel de buren van v ongekleurd blijven.

2. Zij $C \in V(G)$, we kleuren gretig en kleuren eerst de zijden die het verst van C af liggen.
Het argument uit 1 gaat ook op voor alle zijden die niet grenzen aan C.
Neem dus aan dat e grenst aan C, met $|C| \geq 4$ dan zien we dat $|N_2(e)| \leq 24 - 4 = 20$ en dus is een kleur om e te kleuren.
Stel $|C| = 3$ dan zien we dat $|N_2(e)| \leq 23 - 3 = 20$ en dus is er een kleur om e te kleuren. □

6 De grens 22

Het algoritme dat we hier behandelen geeft ten alle tijden een kleuring met maximaal 22 kleuren bij invoer van een graaf met graad kleiner of gelijk aan 4. Dit wordt aangetoond door te bewijzen dat het aantal gekleurde zijden in $|N_2(e)|$ altijd kleiner of gelijk aan 22 is. We kunnen hier echter niet gemakkelijk een geval uithalen waarbij het aantal kleuren 22 is. Binnen die gekleurde zijden kunnen verschillende zijden namelijk wel dezelfde kleur hebben en daardoor is de kans groot dat het aantal kleuren nodig voor de sterke kleuring toch kleiner uitvalt dan 22. Ik heb een paar grafen geconstrueerd waarvan ik hoopte dat het aantal kleuren in de gevonde kleuring groter dan 20 zou zijn, helaas was dat bij alle pogingen niet het geval. Het is ook niet mogelijk magma zelf deze graaf te laten zoeken. Het volgende pikt hij niet:

```
exists(G){G: G in Graphs|#Seqset(OPT(G)) gt 20 and MaximumDegree(G) le 4};
```

.

7 Het algoritme

Het algoritme dat wordt beschreven in het artikel van Cranston hebben we deels geïmplementeerd met behulp van magma. Het algehele idee is geïmplementeerd en de gevalsonderscheidingen zijn hier meegenomen. Het algoritme dat u in deze paragraaf vindt, lijkt te werken. De losse stukjes in de if/elif/else structuur werken. We gaan er maar vanuit dat de if/elif/else structuur zelf ook werkt. Het is moeilijk dit te testen omdat het al moeilijk is om bijvoorbeeld een graaf te bedenken die 4-regulier is en waarvan de girth 5 is.

```
//dw geeft de afstand van zijde e tot punt w
dw := function(H,e,w);
T := {};
for v in EndVertices(Edges(H)!e) do
Include(~T,Distance(Vertices(H)!v,Vertices(H)!w));
end for;
return Minimum(T);
end function;

//dC geeft de afstand van zijde e tot cykel dit werkt.
dC := function(H,e,C);
T := {};
for v in EndVertices(Edges(H)!e) do
```

```
for w in C do
Include(~T,Distance(Vertices(H)!v,Vertices(H)!w));
end for;
end for;
return Minimum(T);
end function;
//dopt geeft soms de afstand van e tot een punt w en soms tot GirthCycle C
dopt:= function(H,e,w);
// if w eq 0 then
if Type(w) ne GrphVert and w eq 0 then
return dC(H,e,GirthCycle(H));
else return dw(H,e,w);
end if;
end function;
// D maakt een rij van zijden op afstand 0,1,... van een cykel C of een punt w.
D:=function(H,w);
S:=[Parent({Random(EdgeSet(H))})|];
for e in Edges(H) do
d:=dopt(H,e,w);
if not IsDefined(S,d+1) then
S[d+1]:={};
end if;

Include(~S[d+1],e);
end for;
return S;
end function;
// F maakt een rij met per zijde e, de zijden die niet dezelfde kleur mogen hebben als e
F:=function(H);
M:= Setseq(Edges(H));
O:=[];
for e in Edges(H) do
Ne := [];
for u in Edges(H) do
N:={};
C:=CartesianProduct(EndVertices(e),EndVertices(u));
for c in C do
Include(~N,Distance(c[1],c[2]));
end for;
if Minimum(N) le 1 then
Include(~Ne,Index(M,u));
end if;
end for;
O := O cat [Ne];
end for;
return M,O;
end function;
//Kleuring maakt een kleuring met referentie punt w
Kleuring:= function(H,w);
Q,R := F(H);
Universe(R);
K := [0 : q in Q];
A := D(H,w);

for n in [#A..1 by -1] do
for i in A[n] do
```

```
ii:=Index(Q,i);
j:=1;
// while j le 22 do
while true do
if j notin K[R[ii]] then
K[ii]:=j;
break;
else
j:=j+1;
end if;
end while;
end for;
end for;
return K,Q;
end function;


// B maakt een rij met per zijde de kleuren die nog beschikbaar zijn voor deze zijde na een
partiele kleuring

B:= function(H,X,M,F);
Q,R:= F(H);
J:=[{Integers()|}:k in [1..#X]];
for i in [1..#X] do
e:=X[i];
ii:=Index(Q,e);
j:=1;
while j le 22 do
if j notin M[R[ii]] then
Include(~J[i],j);
j:=j+1;
else
j:=j+1;
end if;
end while;
end for;
return J;
end function;
//de geeft de afstand van zijde e tot zijde f
de := function(H,e,f);
T := {};
for v in EndVertices(Edges(H)!e) do
for w in EndVertices(Edges(H)!f) do
Include(~T,Distance(Vertices(H)!v,Vertices(H)!w));
end for;
end for;
return Minimum(T);
end function;

//OPT geeft een kleuring die voor elke graaf met graad kleiner of gelijk aan 4 een kleuring met
maximaal 22 kleuren geeft
OPT := function(G);
//Als er geen cykels zijn, is er geen probleem. Dit werkt.
try
g:=Girth(G);
catch e
```

```
g:=0;
end try;
if g eq 0 then
return Kleuring(G,1);
else
girth:= g;
end if;

//Als er een punt met graad kleiner dan 4 bestaat, is er ook geen probleem en dit werkt
if exists(v){x:x in Vertices(G)|Degree(x) le 3} then
return Kleuring(G,v);
/* Als girth 6 is, maken we eerste een gewone gretige kleuring, daarna een verzameling J1
van zijden die afstand 1 van de girthcykel hebben en die onderlinge afstand 2 hebben,
deze herkleuren we met kleur 22, vervolgens herkleuren we de zijden op afstand 2 en
daarna die op afstand 1 van het referentiepunt. Dit werkt.*/
elif girth ge 6 then
Q,R:= F(G);
K,Q := Kleuring(G,1);
E1:={e:e in Edges(G)|dw(G,e,1) eq 0};
E2:={e:e in Edges(G)|dw(G,e,1) eq 1};
J1:={};
for e in E2 do
if forall{f: f in J1| de(G,e,f) eq 2} then
Include(~J1,e);
end if;
end for;
for i in J1 do;
ii:=Index(Q,i);
K[ii]:=22;
end for;
for i in E1 do
ii:=Index(Q,i);
j:=1;
while true do
if j notin K[R[ii]] then
K[ii]:=j;
break;
else
j:=j+1;
end if;
end while;
end for;
return K,Q;

//Bij een dubbele zijde of een loop is er geen probleem. Magma maakt deze grafen echter niet.
elif girth eq 1 or girth eq 2 then
v:=Random(GirthCycle(G));
return Kleuring(G,v);
//Bij girth 3, is er geen probleem. Dit werkt.
elif girth eq 3 then
return Kleuring(G,0);
//Bij girth 4 maken we een hoop gevalsonderscheidingen

elif girth eq 4 then
Q,R:= F(G);
K := [0 : q in Q];
```

```
A := D(G,0);
C:= Seqset(GirthCycle(G));
CE:={Edges(G)!{GirthCycle(G)[1],GirthCycle(G)[2]},Edges(G)!{GirthCycle(G)[2],GirthCycle(G)[3]},
Edges(G)!{GirthCycle(G)[3],GirthCycle(G)[4]},Edges(G)!{GirthCycle(G)[4],GirthCycle(G)[1]}};
P:={};
P1:={};
P2:={};
E1:={e:e in Edges(G)| #(EndVertices(e) meet Seqset(GirthCycle(G))) eq 1};
D1:={e:e in Edges(G)|exists{<g,h>:g,h in P|de(G,g,e) eq 0 and de(G,h,e) eq 0 and g ne h and g ne e
and h ne e}};
/*Als er twee paren zijden in E1 zijn die met elkaar verbonden zijn buiten C, dan is er geen
probleem. Dit werkt.*/
if exists{<e,f,g,h>:e, f, g, h in E1 | de(G,e,f) eq 0 and de(G,g,h) eq 0 and (EndVertices(e) meet
EndVertices(f)) notsubset C and (EndVertices(g) meet EndVertices(h)) notsubset C and e ne f and
g ne h and e ne g and e ne h} then
return Kleuring(G,0);
//Als er n zon paar is, maken we een pack P van zijden uit de andere cykelpunten. Dit werkt.
elif exists(e,f){<e,f>: e, f in E1|de(G,e,f) eq 0 and (EndVertices(e) meet EndVertices(f))
notsubset C and e ne f} then
for i in E1 do
if de(G,e,i) gt 0 and de(G,f,i) gt 0 then
Include(~P,i);
end if;
end for;

//Als er twee zijden in P zijn die we dezelfde kleur kunnen geven, kleuren we die met 22 en
vervolgens kleuren we de rest. Dit werkt.
if exists(k,l){<k,l>: k in P, l in P | de(G,k,l) ge 2} then
kk:=Index(Q,k);
K[kk]:=22;
ll:=Index(Q,l);
K[ll]:=22;
for n in [#A..1 by -1] do
for i in (A[n] diff {k,l}) do
ii:=Index(Q,i);
j:=1;
while true do
if j notin K[R[ii]] then
K[ii]:=j;
break;
else
j:=j+1;
end if;
end while;
end for;
end for;
return K,Q;
/*Als er niet zon zijdepaar in P is, kleuren we eerst alle zijden behalve de zijden in C en de
zijden die twee zijden in P verbinden (D). Daarna kleuren we C en daarna D1, dat werkt */
else
for n in [#A..1 by -1] do
for i in (A[n] diff (CE join D1)) do
ii:=Index(Q,i);
j:=1;
while true do
if j notin K[R[ii]] then
```

```
K[ii]:=j;
break;
else
j:=j+1;
end if;
end while;
end for;
end for;
for i in CE do
ii:=Index(Q,i);
j:=1;
while true do
if j notin K[R[ii]] then
K[ii]:=j;
break;
else
j:=j+1;
end if;
end while;
end for;
for i in D1 do
ii:=Index(Q,i);
j:=1;
while true do
if j notin K[R[ii]] then
K[ii]:=j;
break;
else
j:=j+1;
end if;
end while;
end for;
end if;
return K,Q;

/*Als er geen adjacent zijde paar is, maken we verzamelingenparen P1 en P2 met daarin de zijden uit
een cykelpunt en het cykelpunt dat daartegenover ligt. Dit werkt. */
else
e:=Random(E1);
for f in E1 do;
if de(G,e,f) eq 0 or de(G,e,f) eq 2 then
Include(~P1,f);
else
Include(~P2,f);
end if;
end for;
/*We kijken of we twee zijden in P1 kleur 21 kunnen geven en twee zijden in P2 kleur 22, zo ja dan
doen we dat en kleuren we vervolgens de rest. Dit werkt.*/
if exists(g,h){<g,h>: g, h in P1|de(G,g,h) ge 2} and exists(k,l){<k,l>: k, l in P2|de(G,k,l) ge 2}
then
P11:={g,h};
P22:={k,l};
for i in P11 do
ii:=Index(Q,i);
K[ii]:=21;
end for;
```

```
for i in P22 do
ii:=Index(Q,i);
K[ii]:=22;
end for;
for n in [#A..1 by -1] do
for i in (A[n] diff (P11 join P22)) do
ii:=Index(Q,i);
j:=1;
while true do
if j notin K[R[ii]] then
K[ii]:=j;
break;
else
j:=j+1;
end if;
end while;
end for;
end for;
return K,Q;
//Als dat allemaal niet kan, kleuren we eerst alle zijden Behalve die in C en D, dan die in C
en dan die in D.
else
  for n in [#A..1 by -1] do
for i in (A[n] diff (CE join D))do
ii:=Index(Q,i);
j:=1;
while true do
if j notin K[R[ii]] then
K[ii]:=j;
break;
else
j:=j+1;
end if;
end while;
end for;
end for;
for i in CE do
ii:=Index(Q,i);
j:=1;
while true do
if j notin K[R[ii]] then
K[ii]:=j;
break;
else
j:=j+1;
end if;
end while;
end for;
for i in D1 do
ii:=Index(Q,i);
j:=1;
while true do
if j notin K[R[ii]] then
K[ii]:=j;
break;
else
```

```
j:=j+1;
end if;
end while;
end for;
return K,Q;
end if;
end if;
//Als girth 5, dan zijn er een hoop gevalsonderscheidingen, eerst geven we de cykelzijden en
de naburige zijden hiervan een naam
else
Q,R := F(G);
K := [0 : q in Q];
A := D(G,0);
C:= Seqset(GirthCycle(G));
CE:={Edges(G)!{GirthCycle(G)[1],GirthCycle(G)[2]},Edges(G)!{GirthCycle(G)[2],GirthCycle(G)[3]},
Edges(G)!{GirthCycle(G)[3],GirthCycle(G)[4]},Edges(G)!{GirthCycle(G)[4],GirthCycle(G)[5]},
Edges(G)!{GirthCycle(G)[5],GirthCycle(G)[1]}};
E1:={e:e in Edges(G)|#(EndVertices(e) meet C) eq 1};
c3:= Random({c: c in CE| true});
b1:= Random({b: b in E1 | de(G,c3,b) eq 2});
P21:=({a: a in Edges(G)| a eq c3} join {a: a in Edges(G)| a eq b1});
a5:= Random({a: a in E1 | de(G,a,b1) eq 1 and de(G,a,c3) eq 1});
b2:= Random({b: b in E1 | de(G,b,b1) eq 1 and de(G,b,c3) eq 1 and de(G,b,a5) eq 2});
P22:={a5,b2};
J:= B(G,Setseq((CE join E1)diff(P21 join P22)),K,F);
a1:= Random({a: a in E1 | de(G,a,b1) eq 0 and a ne b1});
b3:= Random({b: b in E1 | de(G,b,c3) eq 0 and de(G,b,b2) eq 1});
a2:= Random({a: a in E1 | de(G,a,b2) eq 0 and a ne b2});
b4:= Random({b: b in E1 | de(G,b,c3) eq 0 and de(G,b,a5) eq 1});
a3:= Random({a: a in E1 | de(G,a,b3) eq 0 and a ne b3});
b5:= Random({b: b in E1 | de(G,b,a5) eq 0 and b ne a5});
c1:= Random({c: c in CE | de(G,c,b1) eq 0 and de(G,c,b2) eq 0});
c2:= Random({c: c in CE | de(G,c,b3) eq 0 and de(G,c,b2) eq 0});
c4:= Random({c: c in CE | de(G,c,b4) eq 0 and de(G,c,b5) eq 0});
c5:= Random({c: c in CE | de(G,c,b1) eq 0 and de(G,c,b5) eq 0});
a4:= Random({a: a in E1 | de(G,a,b4) eq 0 and a ne b4});
//Zijde c3 en b1 kleuren we met kleur 21, a5 en b2 met kleur 22, dan kleuren we de rest behalve C
en E1
for i in P21 do
ii:=Index(Q,i);
K[ii]:=21;
end for;
for i in P22 do
ii:=Index(Q,i);
K[ii]:=22;
end for;
for n in [#A..1 by -1] do
for i in (A[n] diff (CE join E1)) do
ii:=Index(Q,i);
j:=1;
while true do
if j notin K[R[ii]] then
K[ii]:=j;
break;
else
j:=j+1;
```

```
end if;
end while;
end for;
end for;
T:={};
for S in Subsets((CE join E1) diff (P21 join P22)) do
discrepancy := #S - #&join[J[i]:i in [1..#S]];
if discrepancy gt 0 then
Include(~T,discrepancy);
end if;
end for;
//Als er voor iedere overgebleven zijde een andere kleur beschikbaar is, kleuren we de rest
if IsEmpty(T) then
for i in (CE join E1 diff (P21 join P22)) do
ii:=Index(Q,i);
j:=1;
while true do
if j notin K[R[ii]] then
K[ii]:=j;
break;
else
j:=j+1;
end if;
end while;
end for;
return K,Q;
else
exists(S){S: S in Subsets((CE join E1) diff (P21 join P22)) | discrepancy eq Maximum(T)};
//Als twee specifieke zijden in S zitten, geven we die eenzelfde kleur en kleuren we daarna de
rest van E1 en en daarna C op een bepaalde volgorde
if {a1,b3} subset S then
b:= Index(Setseq((CE join E1)diff(P21 join P22)),b3);
a:= Index(Setseq((CE join E1)diff(P21 join P22)),a1);
k:= Random(J[a] meet J[b]);
for i in {a1,b3} do
ii:=Index(Q,i);
K[ii]:=k;
end for;
for i in (E1 diff (P21 join P22 join {a1,b3})) do
ii:=Index(Q,i);
j:=1;
while true do
if j notin K[R[ii]] then
K[ii]:=j;
break;
else
j:=j+1;
end if;
end while;
end for;
for i in [c2,c4,c5,c1] do
ii:=Index(Q,i);
j:=1;
while true do
if j notin K[R[ii]] then
K[ii]:=j;
```

```
break;
else
j:=j+1;
end if;
end while;
end for;
return K,Q;
//Als twee andere specifieke zijden er in zitten doen we hetzelfde met een andere volgorde voor
de Cykel
elif {a2,b4} subset S then
b:= Index(Setseq((CE join E1)diff(P21 join P22)),b4);
a:= Index(Setseq((CE join E1)diff(P21 join P22)),a2);
k:= Random(J[a2] meet J[b4]);
for i in {a2,b4} do
ii:=Index(Q,i);
K[ii]:=k;
end for;
for i in (E1 diff (P21 join P22 join {a2,b4})) do
ii:=Index(Q,i);
j:=1;
while true do
if j notin K[R[ii]] then
K[ii]:=j;
break;
else
j:=j+1;
end if;
end while;
end for;
for i in [c2,c4,c1,c5] do
ii:=Index(Q,i);
j:=1;
while true do
if j notin K[R[ii]] then
K[ii]:=j;
break;
else
j:=j+1;
end if;
end while;
end for;
return K,Q;
//Als twee andere specifieke zijden er in zitten doen we hetzelfde met een andere volgorde voor
de Cykel
elif {a3,b5} subset S then
b:= Index(Setseq((CE join E1)diff(P21 join P22)),b5);
a:= Index(Setseq((CE join E1)diff(P21 join P22)),a3);
k:= Random(J[a3] meet J[b5]);
for i in {a3,b5} do
ii:=Index(Q,i);
K[ii]:=k;
end for;
for i in (E1 diff (P21 join P22 join {a3,b5})) do
ii:=Index(Q,i);
j:=1;
while true do
```

```
if j notin K[R[ii]] then
K[ii]:=j;
break;
else
j:=j+1;
end if;
end while;
end for;
for i in [c2,c4,c5,c1] do
ii:=Index(Q,i);
j:=1;
while true do
if j notin K[R[ii]] then
K[ii]:=j;
break;
else
j:=j+1;
end if;
end while;
end for;
return K,Q;
/*Bij weer twee andere zijden, geven we deze eenzelfde kleur en kleuren daarna alle zijden die
eerder ook die kleur hadden kunnen krijgen, vervolgens kleuren we E1 af en daarna C op een
specifieke volgorde */
else
c:= Index(Setseq((CE join E1)diff(P21 join P22)),c1);
a:= Index(Setseq((CE join E1)diff(P21 join P22)),a4);
k:= Random(J[c] meet J[a]);
U:={};
for e in [a1,b3,a2,b4,a3,b5] do
L:=B(G,[a1,b3,a2,b4,a3,b5],K,F);
ie:= Index([a1,b3,a2,b4,a3,b5],e);
if k in L[ie] then
Include(~U,e);
end if;
end for;
for i in {c1,a4} do
ii:=Index(Q,i);
K[ii]:=k;
end for;
for i in U do
ii:=Index(Q,i);
j:=1;
while true do
if j notin K[R[ii]] then
K[ii]:=j;
break;
else
j:=j+1;
end if;
end while;
end for;
for i in (E1 diff (P21 join P22 join U join {c1,a4})) do
ii:=Index(Q,i);
j:=1;
while true do
```

```
if j notin K[R[ii]] then
K[ii]:=j;
break;
else
j:=j+1;
end if;
end while;
end for;
for i in [c2,c4,c5] do
ii:=Index(Q,i);
j:=1;
while true do
if j notin K[R[ii]] then
K[ii]:=j;
break;
else
j:=j+1;
end if;
end while;
end for;
return K,Q;
end if;
end if;
end if;
end function;
```

8 Het algoritme testen

Magma biedt een manier om grafen te genereren via de functie GenerateGraphs. Het is me nog niet gelukt dit aan de praat te krijgen. Er zijn meerdere databases met grafen, ik heb nog geen database gevonden met grafen met maximumgraad 4 die je in magma kunt gebruiken. Dit wil echter niet zeggen dat deze niet bestaan..
Zelf heb ik getest met onderstaande grafen. Deze grafen zijn niet uitgezocht omdat ze de grens van het aantal kleuren opzoeken, maar zodat ze geen foutmeldingen geven in de code van een bepaalde gevalsonderscheiding. Als je bijvoorbeeld alleen de code voor het geval girth 4 of 5 overneemt, krijg je een foutmelding als je een graaf invoert die een andere girth heeft. Opvallend is een geval dat bij weglaten van een zijde meer kleuren gebruikt. Dit komt omdat de graaf dan onder een ander geval valt. Immers er zijn nu punten met een lagere graad ontstaan waardoor Kleuring(G,v) wordt geretourneerd in plaats van Kleuring(G,0). Het is nog niet gelukt een graaf met maximale graad 4 te vinden waarbij het algoritme een kleuring met meer dan 20 kleuren geeft. De kleuren 21 en 21 worden wel gebruikt, maar dan zijn niet alle kleuren 1 t/m 20 gebruikt.

```
G:=Graph<10|{1,3},{1,4},{1,9},{1,10},{2,3},{2,4},{2,9},{2,10},{3,5},{3,6},{4,5},{4,6},{5,7},{5,8},
{6,7},{6,8},{7,9},{7,10},{8,9},{8,10}>;
// 20 kleuren
G:=Graph<53|{1,4},{2,4},{3,4},{4,9},{5,8},{6,8},{7,8},{8,9},{9,10},{9,53},{10,11},{10,12},{10,13},
{14,49},{15,49},{16,49},{17,48},{18,48},{19,48},{20,47},{21,47},{22,47},{23,46},{23,24},{24,46},
{25,46},{26,45},{27,45},{28,45},{29,44},{30,44},{31,44},{32,43},{33,43},{34,43},{35,42},{36,42},
{37,42},{38,41},{39,41},{40,41},{41,50},{42,50},{43,50},{44,51},{45,51},{46,51},{47,52},{48,52},
{49,52},{50,53},{51,53},{52,53}>;
// 11 kleuren
G:=Graph<53|{1,4},{2,4},{3,4},{4,9},{5,8},{6,8},{7,8},{8,9},{9,10},{9,53},{10,11},{10,12},{10,13},
{14,49},{15,49},{16,49},{17,48},{18,48},{19,48},{20,47},{21,47},{22,47},{23,46},{23,24},{24,46},
{25,46},{26,45},{27,45},{28,45},{29,44},{30,44},{31,44},{32,43},{33,43},{34,43},{35,42},{36,42},
{37,42},{38,41},{39,41},{40,41},{41,50},{42,50},{43,50},{44,51},{45,51},{46,51},{47,52},{48,52},
{49,52},{50,53},{51,53},{52,53},{1,2},{2,3},{3,5},{5,6},{6,7},{7,11},{11,12},{12,13},{13,14},
```

```
{14,15},{15,16},{16,17},{17,18},{18,19},{19,20},{21,22},{22,23},{23,24},{24,25},{25,26},{26,27},
{27,28},{28,29},{29,30},{30,31},{31,32},{32,33},{33,34},{34,35},{35,36},{36,37},{37,38},{38,39},
{39,40},{40,1}>;
// 11 kleuren
G:=Graph<13|{1,2},{1,12},{1,13},{1,6},{2,7},{2,3},{2,11},{3,4},{3,5},{3,10},{4,5},{4,13},{4,8},
{5,10},{5,6},{6,7},{6,11},{7,9},{7,11},{8,9},{8,12},{8,13},{9,10},{9,12},{10,11},{12,13}>;
//11 kleuren
G:=Graph<10|{1,3},{2,4},{3,9},{3,4},{3,6},{4,7},{4,10},{5,6},{6,7},{6,10},{7,8},{7,9}>;
//10 kleuren
G:=Graph<11|{1,4},{2,5},{3,5},{4,11},{4,7},{4,5},{5,8},{6,7},{7,8},{7,10},{8,11}>;
//9 kleuren
G:=Graph<8|{1,4},{1,5},{2,3},{2,6},{3,8},{3,4},{3,5},{4,7},{4,6},{5,6},{5,7},{6,8}>;
//12 kleuren
G:=Graph<12|{1,3},{2,3},{3,5},{3,8},{4,5},{5,6},{5,11},{7,8},{8,9},{8,11},{10,11},{11,12}>;
//8 kleuren
G:=Graph<15|{1,2},{2,3},{3,4},{4,5},{5,1},{6,5},{7,5},{8,1},{9,1},{10,2},{11,2},{12,3},{13,3},
{14,4},{15,4}>;
//10 kleuren
G:=Graph<4|{1,2},{2,3},{3,4},{4,1}>;
//4 kleuren
G:=Graph<11|{1,2},{1,8},{1,11},{1,4},{2,7},{2,10},{2,3},{3,4},{3,11},{3,6},{4,5},{4,9},{9,10}>;
// 9 kleuren
G:=Graph<18|{1,2},{1,11},{1,8},{1,9},{2,3},{2,15},{2,10},{3,14},{3,16},{3,4},{4,15},{4,5},
{4,17},{5,6},{5,16},{5,18},{6,17},{6,13},{6,7},{7,8},{7,9},{7,12},{8,13},{8,10},{9,10},
{9,13},{10,11},{11,12},{11,18},{12,13},{12,14},{14,15},{15,16},{16,17},{17,18}>
//14 kleuren
G:=Graph<26|{1,2},{1,11},{1,8},{1,9},{2,3},{2,15},{2,10},{3,14},{3,16},{3,4},{4,15},{4,5},
{4,17},{5,16},{6,13},{6,7},{7,8},{7,9},{7,12},{8,13},{8,10},{9,10},{9,13},{10,11},{11,12},
{11,18},{12,13},{12,14},{14,15},{15,16},{16,17},{17,18},{5,19},{5,25},{18,24},{17,23},
{6,21},{6,22},{19,24},{19,20},{19,26},{20,25},{20,21},{20,22},{21,23},{21,26},{22,23},
{22,26},{23,24},{24,25},{25,26}>;
//14 kleuren
 G:=Graph<32|{1,2},{2,3},{3,4},{4,5},{6,7},{7,8},{8,9},{9,10},{10,11},{11,12\
},{12,1},{1,13},{1,15},{2,14},{2,19},{3,18},{3,20},{4,19},{4,21},{5,20},{5,24}\
,{6,23},{6,25},{7,24},{7,26},{8,25},{8,30},{9,29},{9,31},{10,30},{10,32},{11,3\
1},{11,13},{12,17},{12,14},{13,14},{14,15},{15,16},{16,17},{17,13},{15,22},{16\
,18},{16,32},{17,28},{18,19},{19,20},{20,21},{21,22},{22,18},{21,27},{22,23},{\
23,24},{24,25},{25,26},{26,27},{27,23},{26,28},{27,29},{28,29},{29,30},{30,31}\
,{31,32},{32,28},{5,6}>;
//14 kleuren
 G:=Graph<32|{1,2},{2,3},{3,4},{4,5},{6,7},{7,8},{8,9},{9,10},{10,11},{11,12\
},{12,1},{1,13},{1,15},{2,14},{2,19},{3,18},{3,20},{4,19},{4,21},{5,20},{5,24}\
,{6,23},{6,25},{7,24},{7,26},{8,25},{8,30},{9,29},{9,31},{10,30},{10,32},{11,3\
1},{11,13},{12,17},{12,14},{13,14},{14,15},{15,16},{16,17},{17,13},{15,22},{16\
,18},{16,32},{17,28},{18,19},{19,20},{20,21},{21,22},{22,18},{21,27},{22,23},{\
23,24},{24,25},{25,26},{26,27},{27,23},{26,28},{27,29},{28,29},{29,30},{30,31}\
,{31,32},{32,28}>;
//16 kleuren, dit is vreemd want deze graaf heeft een zijde minder dan de graaf hierboven
en heeft toch meer kleuren nodig.
G:=Graph<20|{1,15},{1,8},{1,5},{2,15},{3,11},{4,11},{5,12},{6,12},{7,13},{8,13},{9,14},{10,14},
{5,12},{8,13},{11,12},{11,15},{12,13},{13,14},{14,15},{5,16},{5,17},{8,18},{8,19},{1,20}>;
//girth eq 5
G:=Graph<21|{1,3},{2,3},{3,4},{3,5},{4,8},{4,14},{4,6},{5,21},{5,7},{5,20},{6,16},{6,17},{6,7},
{7,18},{7,19},{8,9},{8,10},{10,11},{11,12},{12,13},{13,14},{14,15}>;
//10 kleuren
```

9 $s'(G) \leq 1.998D^2$

Molloy en Reed bewijzen dit in hun artikel: 'A bound on the strong chromatic index op a graph'. $L(G)^2$ is de graaf waarbij de zijden van G overeenkomen met de punten van $L(G)^2$. Twee punten zijn verbonden als de zijden in G onderlinge afstand kleiner of gelijk aan 1 hebben. Als we een puntenkleuring op $L(G)^2$ maken, komt dat overeen met een sterke zijde kleuring op G. Dit geeft $\chi'(L(G)^2) = s'(G)$.
Molloy en Reed maken op de volgende manier een kleuring. Ze nemen $(1-\gamma)X$ kleuren en kennen aan elk punt in $L(G)^2$ met uniform verdeelde kans een kleur toe. Vervolgens ontkleuren ze de punten die een naburig punt hebben met dezelfde kleur. Dit proces wordt geïtereerd.
Met de volgende twee lemma's bewijst men het resultaat dat in de titel van deze sectie staat.

Lemma 9.1. *Voor alle $e \in V(L(G)^2)$ geldt dat de graaf geïnduceerd door $N_{L(G)^2}(e)$ maximaal $(1-\frac{1}{36})\binom{2D^2}{2}$ zijden in $L(G)^2$ heeft.*

Lemma 9.2. *Bekijk $\delta, \gamma > 0$ zodat $\gamma < \frac{\delta}{2(1-\gamma)} e^{-3/(1-\gamma)}$. Zij H een graaf met maximum graad X, zodat voor elke $v \in V(H)$ de graaf geïnduceerd door $N(v)$ maximaal $(1-\delta)\binom{X}{2}$ zijden heeft. Dan geldt $\chi(H) \leq (1-\gamma)X$.*

Als je deze lemma's met elkaar combineert met $\delta = \frac{1}{36}$, $\gamma(\frac{1}{36}) \geq 0.01$, $X = 2D^2$ en $H = L(G)^2$ dan geeft dat de stelling: $s'(G) \leq 1.998D^2$, immers $s'(G) = \chi(L(G)^2) \leq (1-\frac{1}{36})2D^2 = (2-\frac{1}{18})D^2$.
Om de lemma's te bewijzen zijn er eerst wat andere resultaten die we nodig hebben:

- Als graaf G maximale graad D heeft, dan heeft graaf $L(G)^2$ maximale graad $2D^2 - 2D$, dit is gemakkelijk na te gaan.
- Stel $A = A_1 ... A_n$ een reeks gebeurtenissen en A_i is onafhankelijk van minstens d andere A_j's en $\Pr(A_i) \leq p \ \forall i$. Als $ep(d+1) < 1$ dan geldt: $\Pr(\wedge_{i=1}^{n} \overline{A_i}) > 0$
- Zij Ω een product kansruimte. Dan definieren A_t als volgt. $y \in A_t \iff \forall \alpha_1, ..., \alpha_w \in \mathbb{R} \ \exists x \in A$ zodat $\sum_{x_i neq y_i} \alpha_i < t\sqrt{\sum_{i=1}^{w} \alpha_i^2}$. Er geldt: $\Pr(A) * (1 - Pr(A_t)) < e^{-t^2/4}$.
- Als h Lipschitz is f certificeerbaar dan $\forall b, t \geq 0$ geldt $\Pr(h(x) < b - t\sqrt{f(b)}) * \Pr(h(x) > b) < e^{-t^2/4}$.

We bewijzen eerst het eerste lemma

Proof. Zonder verlies van algemeenheid nemen we aan dat G D-regulier is. $H = L(G)^2, e = (u_1, u_2) \in E(G), A = N_G(u_1), B = N_G(u_2), C = N_G(A) \cup N_B(B) - (A \cup B)$

- Geval 1: $|E_G(A \cup B)| + D * |A \cap B| > D^2/30$
  $|N_H(e)| < (2 - \frac{1}{30})D^2$, *ik begrijp niet waarom hier niet nog* $2D$ *vanaf moet.* Hieruit volgt dat de graaf geïnduceerd door $N_H(e)$ maximaal $(2 - \frac{1}{15} + \frac{1}{1800})D^4 < (1 - \frac{1}{36})\binom{2D^2}{2}$ zijden bevat.
- Geval 2: $\sum_{c \in C} (deg_{A \cup B}(c) * (D - deg_{A \cup B}(c)) > (2 - \frac{1}{9})D^4$
  $\forall e_1 \in N_H(e)$ geldt dat e_1 naburig is aan maximaal $2D^2$ - het aantal G-paden van lengte 3 met eerste zijde e_1 en laatste zijde buiten $N_H(e)$. Er zijn minstens $\frac{1}{9}D^4$ van deze paden. Dus het aantal zijden in $N_H(e)$ is kleiner dan $(1 - \frac{1}{36})\binom{2D^2}{2}$.
- Geval 3: $|E_G(A \cup B)| + D * |A \cap B| \leq D^2/30$ en $\sum_{c \in C} (deg_{A \cup B}(c) * (D - deg_{A \cup B}(c)) \leq (2 - \frac{1}{9})D^4$
  Het aantal H-zijden in $N_H(e)$ is maximaal $2D^2$ min twee keer het aantal 4-cykels in G uit $E_G(A \cup B, C)$.
  Zij $\omega(c_1, c_2)$ het aantal buren van c_1 en c_2 in $A \cup B$. Het aantal 4-cykels is kleiner of gelijk aan $\sum_{c_1, c_2 \in C} \binom{\omega(c_1, c_2)}{2}$. Definieer $C' = \{c \in C | deg_{A \cup B}(c) \geq \frac{2}{3}D\}$
  Blijkbaar vinden we nu $|E_G(A \cup B, C')| \geq \frac{8}{5}D^2$, omdat we anders in geval 1 of 2 terecht zouden komen.
  Cauchy-Swartz geeft ons iets waarvan ik verder niet begrijp waarom het zo is, de conclusie is in ieder geval dat het lemma geldt. □

Nu bewijzen we het tweede lemma

Proof. Zonder verlies van algemeenheid mogen we aannemen dat H, X-regulier is, anders kunnen we namelijk een $H \subseteq H'$ maken waarbij H' X-regulier is.
Zij $\zeta = \frac{\sigma}{2(1-\gamma)} e^{-3/(1-\gamma)}$.
Kleur zoals eerder beschreven.
A_v is de gebeurtenis |Zijden gekleurd in $N(v)| - |$gebruikte kleuren in $N(v)| < \zeta X - 14\sqrt{XlogX}$ dan bewijst men met de eerder gegeven stelling dat $\Pr(\wedge_v \overline{A_v}) > 0$ en dus dat er een partiële kleuring is die gretig kan woren uitgebreid. Dit is een $(1-\gamma)X$-kleuring. Men maakt hierbij gebruik van verenigbare paren. *De details van dit bewijs begrijp ik niet goed.* □.

10 Relatie tussen sterke zijde kleuringen en aangrenzende sterke zijde kleuringen

Definition Een r-sterke zijde kleuring is een zijde kleuring waarbij zijden een verschillende kleur hebben als hun onderlinge afstand kleiner of gelijk aan $r-1$ is.

Definition Een aangrenzende r-sterke zijde kleuring is een zijde kleuring f waarbij $C(u) = \{f(ux)|ux \in E(G)\} \neq C(v) = \{f(vw)|vw \in E(G)\}$ als $d(u,v) \leq r$.

Theorem 10.1. *Een r-sterke zijde kleuring is een aangrenzende r-sterke zijde kleuring*

Proof. Zij f een r-sterke zijde kleuring en $d(u,v) \leq r$ met $u, v \in V(G)$.
Stel $d(u,v) \geq 1$. Zij x een naburig punt van u op een kortste pad richting v.
$f(ux) \in C(u)$, maar $f(ux) \notin C(v)$, immers anders is f geen r-sterke zijde kleuring. Dus $C(u) \neq C(v)$
Stel $d(u,v) = 1$, als er een $x \neq v$ is met $ux \in E(G)$ dan geldt: $f(ux) \in C(u)$ en $f(ux) \notin C(v)$, immers anders is f geen r-sterke zijde kleuring. Dus $C(u) \neq C(v)$.
Als u en v beiden geen andere buren hebben dan elkaar, gaat de stelling niet op, maar deze graaf vinden we niet interessant genoeg. □

We zien hier dus dat een sterke kleuring van een samenhangende graaf met meer dan één zijde ook een naburige sterke kleuring is. Dit zou betekenen dat de stellingen die zijn bewezen voor naburgige sterke kleuringen ook opgaan voor sterke kleuringen. Als we echter kijken naar het minimale aantal kleuren dat nodig is om een kleuring te maken, dan kunnen we stellen dat $s'(G)$ een bovengrens is voor $\chi'(G)$ en $\chi'(G)$ een ondergrens voor $s'(G)$.

11 Sterke zijde kleuring is NP-compleet

Om dit te bewijzen maken we een reductie van het K-kleurbaarheidsprobleem van punten naar het K-sterke zijde kleurbaarheidsprobleem. De eerste is NP-compleet en dus is de tweede ook NP-compleet. Dit bewijs hebben we gevonden in het artikel 'On the computational complexity of Strong Edge Coloring' van Mahdian.
Voor een graaf H creëren we een andere graaf G.
Constructie $G_{K,d}$: maak het pad $v_0, ..., v_{3(d-1)}$. Aan elke v_{3i} plakken we een pad van lengte 2. Punten aan de uiteindes hiervan noemen we w_i. Vervolgens plakken we nog $K-3$ extra zijden aan v_0 en ook aan $v_{3(d-1)}$ en $K-4$ extra zijden aan alle v_{3i} met $i \neq 0, d-1$. Verder voegen we niets toe. De zijden aansluitend aan w_i en de zijden $v_{3i+1}v_{3i+1}$ noemen we de dikke zijden. Deze kunnen in een sterke kleuring gekleurd worden met dezelfde kleur.
Voor elk punt $v \in V(G)$ met graad d stoppen we $G_{K,d}$ in G, de w_i's komen overeen met de buurzijden van v. Stel $xy = e$ dan worden de graafdelen $G_{K,d(x)}$ en $G_{K,d(y)}$ aan elkaar geplakt in w_i.

Theorem 11.1. *G is K-sterke zijde kleurbaar dan en slechts dan als H K-kleurbaar is.*

Proof.
- Als G een sterke zijde kleuring heeft met K kleuren dan zijn de dikke zijden in de $G_{K,d}$ graafdelen met eenzelfde kleur gekleurd. Geef het punt v in H dat bij dit graafdeel hoort ook die kleur. Dit geeft een juiste punten kleuring met maximaal K kleuren.

- Als H K-kleurbaar is, creëren we G zoals hierboven beschreven. De dikke zijden in de $G_{K,d}$ graafdelen die bij punt $v \in V(H)$ horen, kleuren we met de kleur van $v \in V(H)$. Het is eenvoudig in te zien dat de overige zijden zo gekleurd kunnen worden dat er in totaal niet meer dan K kleuren nodig zijn. $\square$

We kunnen bovestaande constructie ook aanpassen zodat $G_{k,d}$ bipartiet met 'girth' minstens g is. Dit doen we door $G'_{K,d} = G_{K,2dg}$ te creëren waarbij we w_{2q} in overeenstemming brengen met de buurzijden van een punt. De rest van het bewijs werkt nu nog steeds. We kunnen dus stellen dat zelfs het sterke zijde kleuringsprobleem voor bipartiete grafen met girth minstens g NP-compleet is.

12 Toepassing

Barett et all. geven een toepassing van sterke zijde kleuringen in draadloze radio netwerken. Een draadloos radio netwerk is een verzameling van zenders en ontvangers die met elkaar communiceren via hetzelfde medium. Binnen een bepaalde straal kan elke zenders/ontvanger communiceren met andere ontvangers. Het toekennen van frequenties aan deze zenders/ontvangers komt overeen met het sterke zijde kleuringen probleem: elke zender vormt een punt en twee zenders worden met elkaar verbonden als ze binnen elkaars straal zijn. Communicatie tusssen deze zenders kan alleen op dezelfde frequentie gebeuren als ze ver genoeg van elkaar af liggen met afstand minstens 2.

13 Verdere bevindingen

Er is al redelijk veel onderzoek gedaan naar sterke kleuringen. Mahdian heeft in 2000 een scriptie geschreven waarin hij een overzicht geeft van de resultaten die er toentertijd bekend waren op het gebied van sterke kleuringen. Zijn 88 pagina's tellende scriptie geeft een uitgebreid overzicht. Hieronder vindt u een greep uit de resultaten die nu al gevonden zijn over dit onderwerp (en die ik kon bereiken). Vermoedens en stellingen over zeer specifieke grafen zijn niet genoemd. Wellicht is het interessant me in sommige van deze artikelen extra te verdiepen.

1. $s'(G) \leq 2D(D-1)$ dit is een eenvoudig gevolg van Brook's theorem waarbij gebruik gemaakt wordt van $s'(G) = \chi(L(G)^2)$, waarbij $L(G)$ de lijngraaf van G is.

2. Als elk component in de graaf meer dan 5 punten bevat, dan geldt dat: $\chi'(G) \leq D + 2$. Dit is bewezen in het artikel 'Adjacent strong edge coloring of graphs' door Liu et al..

3. Voor bipartiete grafen geldt $s'(G) \leq D^2$. Dit is bewezen door Faudree et al. in het artikel 'The strong chromatic index of graphs'.

4. Voor bipartiete grafen $G = X \cup Y$ met maximale graad α voor X en β voor Y geldt: $s'(G) \leq \alpha\beta$. Dit is bewezen door Brualdi en Quin in het artikel 'Incedence and strong edge coloring of'

5. $s'(G) \leq \lceil cn \rceil$, $\frac{1}{2} < c \leq 1$, waarbij n het aantal punten van de graaf is. Dit is bewezen in het artikel 'Strong Edge Coloring of Graphs' door Favaron et al..

6. $\chi'(K(n, m)) = n + 1$ als $n \geq 2, m \geq 1$. Dit is bewezen in het artikel 'A note on Adjacent Strong Edge Coloring of $K(n, m)$' door Chen et al..

7. Voor een Halin graaf $G = T \cup C$ met T een boom en C een cykel, waarbij G aan nog een paar eisen voldoet, geldt $s'(G) \leq s'(T) + 3$. Dit is bewezen door Lai et al. in het artikel 'The strong chromatic index of Halin graphs'.

8. Barret et al. geven een approximatie algoritme voor draadloze radio netwerken in het artikel: 'Strong Edge Coloring for channel assignment Wireless Radio Networks'

9. $\chi'(T) \leq D + 1$ voor T een boom. Dit is bewezen in het artikel 'Strong Edge Coloring of Graphs' door Alcbare et al.. In dit artikel noemen ze de kleuringen sterke zijde kleuringen, maar maken ze gebruik van de definitie van naburig sterke zijde kleuringen.

10. Zij T een boom dan geldt $s'(T) = \sigma(T) = max_{uv \in E(T)}\{deg(u) + deg(v) - 1\}$, dit is bewezen door Faudree et al..

11. Voor een planaire graaf G geldt $s'(G) \leq 4D + 4$ en $\exists G, d \geq 2$ zodat $s'(G) = 4D - 4$. Dit is bewezen door Faudree et al..

14 Referenties

- Alcbare, S., Bidkhori H., Nosrati, N. (2006), *Strong Edge Coloring of Graphs*, Discrete Mathematics
- Andersen, L.D. (1992), *The strong chromatic index of a cubic graph is at most 10*, Discrete Mathematics
- Barrett C.L., Istrate, G., Kumar., V.S., Marathe, M.V., Thite, S., Thulasidasan, S. (2006), *Strong Edge Coloring for channel assignment Wireless Radio Networks*, IEEE Computer Society
- Brualdi, R.A., Quinn Massey J.J. (1993) *Incedence and strong edge coloring of graphs*, Discrete Mathematics
- Chen, X., Li, J., Sin Y., Zhang Z. (2006), *A note on Adjacent Strong Edge Coloring of* $K(n, m)$, Acta Mathematicae Applicatae Sinica
- Chung, F.R.K., Gyarfas, A., Tuza, Z., Trotter, W.T. (1990), The maximum number of edges in a $2K_2$-free graph of bounded degree, Discrete Mathematics
- Cranston, D.W. (2006), *Strong edge-coloring of graphs with maximum degree 4 using 22 colors*, Sciencedirect
- Fraudree, R.J., Gyárfás, A., Scherp , R.H., Tuza, Zs. (1990), *The strong chromatic index of graphs.* Ars Combinatoria
- Favaron, O., Li, H., Schelp, R.H. (1996), *Strong Edge Coloring of Graphs*, Discrete Mathematics
- Lai, H., Lih, K., Tsai., P. (2012), *The strong chromatic index of Halin graphs*, Discrete Mathematics
- Lui, L., Wang, J., Zhang, Z. (2002), *Adjacent strong edge coloring of graphs*, Applied mathematics letters
- Mahdian, M. (2000), *Te strong chromatic index of graphs*, Graduate Department of Computerscience, University of Toronto
- Mahdian, M. (2002), *On the computational complexity of Strong Edge Coloring*, Discrete applied mathematics
- Molloy, M., Reed, B. (1997), *A bound on the strong chromatic index of a graph*, Journal of Combinatorial Theory B