

Op zoek naar de Hamilton cykel

Mike Hoffmeister

June 29, 2010

Contents

1	Grafentheorie	2
1.1	Overige gebruikte definities	3
2	De Hamilton Eigenschap	4
2.1	Voldoende en noodzakelijke eigenschappen	4
2.2	t -stug Grafen	8
2.3	Het tegenvoorbeeld voor vermoeden 2.2.2	9
3	Het Hamilton cykel probleem is NP-compleet	12
3.1	Complexiteit en Algoritmen	12
3.2	P en NP	13
3.3	NP -compleet	14
3.4	Het Hamilton Cykel probleem is NP -compleet.	15
3.5	Het Handelsreizigers Probleem	18

Hoofdstuk 1

Grafentheorie

In dit hoofdstuk behandelen we een aantal basiselementen van de grafentheorie die nodig zijn om deze scriptie te begrijpen. Iemand met voorkennis in grafentheorie kan dit hoofdstuk overslaan.

Definitie 1.0.1 (Graaf). Een graaf G is een 2-tuple van een verzameling *punten* V . En een verzameling *lijnen* E die bestaat uit ongeordende paren van punten uit V . We schrijven $G = (V, E)$. We schrijven ook wel $V = V(G)$ en $E = E(G)$.

Zoals wel bekend bij de meesten worden grafen getekent als punten met lijnen daartussen. Natuurlijk corresponderen de punten uit de plaatjes met de punten uit de puntenverzameling en de lijnen die tussen twee punten getrokken worden met de lijnen uit de lijverzameling. Verder gaan we in deze tekst alleen uit van **simpele grafen**. Dat betekent dat elk tweetal punten hoogstens met één lijn verbonden is. Een simpel voorbeeld: Bij de graaf $G = (\{1, 2, 3\}, \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\})$ ¹ kunnen we het volgende plaatje tekenen: Er

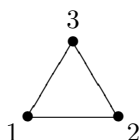


Figure 1.1: Een graaf G

zijn een aantal speciale grafen die genoemd worden in deze tekst. Namelijk de volledige grafen:

$$K_n := (V, \{\{u, v\} \mid u, v \in V \text{ en } u \neq v\}), \quad \text{waarbij } |V| = n.$$

In deze grafen is elk punt met elk ander punt verbonden. Een voorbeeld is de driehoek hierboven, ofwel K_3 .

Een ander soort graaf is de bipartiete graaf:

$$K_{n,m} := (V, \{\{u, v\} \mid u \in V_1, v \in V_2\}),$$

¹In deze tekst zullen we voor lijnen soms in plaats van $\{u, v\}$ kortweg uv schrijven voor het verbeteren van de leesbaarheid. Het zal telkens uit de context duidelijk zijn welke notatie gebruikt wordt.

waarbij

$$V_1 \cap V_2 = \emptyset, |V_1| = n, |V_2| = m, V = V_1 \cup V_2.$$

Dit zijn de grafen die opgedeeld kunnen worden in twee disjuncte puntenverzamelingen zodat binnen een puntenverzameling geen van de punten onderling verbonden zijn. Zie figuur 1.2.

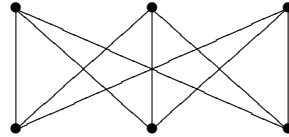


Figure 1.2: De bipartiete graaf, $K_{3,3}$

Definitie 1.0.2 (Verbonden punten). Zij G een graaf. Twee punten u, v zijn verbonden als uv een lijn in G is. In dit geval worden u en v ook wel burenn genoemd.

Definitie 1.0.3 (Graad). Zij G een graaf. De graad van een punt v is het aantal punten waar v mee verbonden is. We geven dit aan met $\deg v$.

Definitie 1.0.4 (Pad). Een pad in een graaf G is een opeenvolging van punten $v_1 v_2 \dots v_k$, waarvoor $v_i v_{i+1} \in E$, met $1 \leq i < k$ en waarin elk punt slechts één keer voorkomt.

Definitie 1.0.5 (Samenhangendheid). Een graaf G heet samenhangend als elk tweetal punten u en v met een pad verbonden zijn. Dan heten u en v ook padverbonden.

Nu een belangrijk begrip voor Hamilton grafen, de cykel.

Definitie 1.0.6 (Cykel). Zij G een graaf. Een cykel is een pad $v_1 v_2 \dots v_k$, waarbij $v_1 = v_k$.

1.1 Overige gebruikte definities

Definitie 1.1.1 (Component). Zij $G = (V, E)$ een graaf. Een component $K = (V', E')$ van G is een maximale samenhangende deelgraaf, dat wil zeggen, als $v \in V'$, dan als $u \in V$ padverbonden is met v , dan $u \in V'$. Met $\omega(G)$ bedoelen we het aantal componenten van G .

Voorbeeld 1.1.2. Zij G_1 en G_2 samenhangende grafen en G de disjuncte vereniging van G_1 en G_2 , dan is G duidelijk niet samenhangend en de componenten van G zijn G_1 en G_2 en dus $\omega(G) = 2$

Hoofdstuk 2

De Hamilton Eigenschap

Definitie 2.0.3 (Hamilton Graaf). Een graaf G heet Hamilton als er een cykel bestaat dat alle punten uit G bevat.

2.1 Voldoende en noodzakelijke eigenschappen

Er bestaan een aantal stellingen die ons kunnen vertellen of een graaf Hamilton is. De meeste van deze stellingen geven voldoende criteria om te zeggen dat er een Hamilton cykel bestaat, echter hoeft niet elke Hamilton graaf aan deze criteria te voldoen. Twee van de meeste bekende stellingen zijn van Dirac en Ore die voldoende eisen geven voor het Hamilton zijn. We geven ook nog een andere stelling, van Bondy-Chátal die zegt dat de graaf G Hamilton is dan en slechts dan als zijn afsluiting $[G]$ Hamilton is. Dit lijkt misschien op het eerste gezicht een fantastische stelling, het is alleen niet makkelijker om te zien of $[G]$ Hamilton is. We zullen beginnen met de definitie van de afsluiting van een graaf en we bewijzen dan direct de bovengenoemde stelling. Daarna geven we een wat bevredigendere stelling, van Pósa, waar de stelling van Dirac en Ore gevolgen van zijn. En deze stelling heeft eisen die wel makkelijker te controleren zijn.

Lemma 2.1.1. Als G Hamilton, dan is G samenhangend.

Proof. Stel G is Hamilton. Dan is er een Hamilton cykel C . Maak een Hamilton pad P , door uit C een lijn te verwijderen. Elk tweetal punten is dan verbonden door pad P . Dus G is samenhangend. $\square$

Definitie 2.1.2 (De afsluiting van van een graaf G). Zij $G = (V, E)$ een graaf op n punten. Dan is $[G] = (V, E')$, met $E \subset E'$ de graaf waarvoor geldt, als $u, v \in V$ en $\deg u + \deg v \geq n$, dan $uv \in E'$. Construeer de afsluiting $[G]$ als volgt: voor elk tweetal niet verbonden punten $u, v \in V$, als $\deg u + \deg v \geq n$, voeg de lijn uv toe aan G . Ga hiermee door totdat voor elk tweetal niet verbonden punten $x, y \in V$ geldt, $\deg x + \deg y < n$.

Stelling 2.1.3 (Bondy-Chvátal). Een graaf G is Hamilton dan en slechts dan als zijn afsluiting $[G]$ is Hamilton.

Proof. $\Rightarrow$

Als G Hamilton, dan is het duidelijk dat $[G] \supset G$ Hamilton is.

⇐

Zij G een graaf op n punten. Stel dat u, v twee verschillende en niet verbonden punten zijn, met $\deg u + \deg v \geq n$. Zij H de graaf is G met de lijn uv toegevoegd en stel dat H Hamilton is. Dan is er dus in H een Hamilton cykel waar de lijn uv in voorkomt. En de cykel zonder de lijn uv levert een pad op in G : $(u, x_1, \dots, x_{n-2}, v)$. Dus u is verbonden met x_1 en v met x_{n-2} . Dan kunnen we opmerken dat $\deg u + \deg v \geq n$, en dus als we de punten x_1 en x_{n-2} weglaten, dan zijn er nog $n - 3$ punten waar u en v mee verbonden kunnen zijn. Met het laden principe volgt dat er een k is zodat x_k verbonden is met u en met v . Dus hebben we op de volgende manier een Hamilton cykel gevonden in G : $(x_{k-1} \dots, x_2, x_1, u, x_k, v, x_{n-2}, x_{n-3}, \dots, x_{k-1})$. Dus G is Hamilton. Dus als $[G]$ Hamilton, dan is G Hamilton. $\square$

Gevolg 2.1.4 (Stelling van Dirac). *Als $n \geq 3$ het aantal punten van G en elk punt van G heeft graad minstens $\frac{n}{2}$ dan is G Hamilton.*

Proof. Het is duidelijk dat in een graaf G waarin elk punt graad minstens $\frac{n}{2}$ heeft, dat dan voor elke u, v in G geldt, $\deg u + \deg v \geq n$, dus $[G] = K_n$. En dus dat $[G]$ Hamilton is, dus G Hamilton. $\square$

Gevolg 2.1.5 (Stelling van Ore). *Als $n \geq 3$ het aantal punten van G en voor elk tweetal niet verbonden punten u, v geldt, $\deg u + \deg v \geq n$, dan is G Hamilton.*

Proof. Hier geldt ook weer dat $[G] = K_n$ en dus G Hamilton. $\square$

Bovendien hebben we nu ook laten zien dat de stelling van Ore algemener is dan de stelling van Dirac.

Stelling 2.1.6 (Pósa). *Zij G een graaf op $n \geq 3$ punten. G is Hamilton als:*

- voor elke m , met $1 \leq m < (n-1)/2$ geldt dat: Er zijn minder dan m punten van graad lager of gelijk aan m .
- n oneven, dan ook: Er zijn hoogstens $(n-1)/2$ punten met graad lager of gelijk aan $(n-1)/2$.

Proof. Stel G voldoet aan de eisen van de stelling en dat G een maximale niet Hamilton graaf is op n punten. Zodra aan G een lijn toegevoegd wordt, zal de graaf dus Hamilton zijn. Als we een lijn toevoegen voldoet de nieuwe graaf nog steeds aan de eisen van de stelling, dit komt doordat het aantal punten van graad kleiner/gelijk aan bepaalde grens m niet groter zal worden. G bevat een pad dat elk punt in G verbindt, want het toevoegen van een lijn resulteert in een Hamilton cykel en een Hamilton cykel waar één lijn uit weggehaald is, is een pad dat elk punt uit G verbindt. We gaan nu laten zien dat elk punt van graad minstens $(n-1)/2$ verbonden is met elk punt van graad groter dan $(n-1)/2$. Stel nu dat $\deg v_1 \geq (n-1)/2$, $v_n \geq n/2$ en dat v_1 en v_n niet verbonden zijn. Dan is er dus een pad $P = v_1 v_2 \dots v_n$ dat v_1 en v_n verbindt. Zeg dat de graad van $v_1 = k$, zodat v_1 verbonden is met de punten $v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$, met $2 = i_1 < i_2 < \dots < i_k$. Stel v_n is verbonden met v_{i_j-1} , dan is

$$v_1 v_2 \dots v_{i_j-1} v_n v_{n-1} \dots v_{i_j} v_1$$

een Hamilton cykel, maar dat bestaat niet in G . Dus v_n is niet verbonden met punten van de vorm v_{i_j-2} . Hieruit kunnen we een tegenspraak afleiden, namelijk:

$$\begin{aligned} n/2 &\leq \deg v_n \\ &\leq |V| - 1 - \deg v_1 \\ &= n - 1 - k \\ &\leq n - 1 - (n - 1)/2 \\ &< n/2. \end{aligned}$$

Dus v_1 en v_n moeten verbonden zijn. We mogen nu concluderen dat elk punt van graad minstens $(n - 1)/2$ verbonden moet zijn met alle punten van graad minstens $n/2$. Stel nu dat alle punten graad minstens $n/2$ hebben, dan zijn alle punten direct met elkaar pad verbonden en dus $G = K_n$, maar dan is G volledig en dus Hamilton. (Hiermee hebben we **Gevolg 2.1.4**, de stelling van Dirac bewezen.)

Er is dus een punt u met $\deg u < n/2$. Zij m de maximum graad van alle punten met graad lager dan $n/2$. Kies dan u_1 , zodat $\deg u_1 = m$. Met de aanname dat G voldoet aan de eisen van de stelling volgt dat het aantal punten van graad lager dan m is hoogstens m en in het bijzonder $m < n/2$. Dus er zijn meer dan m punten met graad groter dan m en dus met graad minstens $n/2$. En dat betekent dat er een punt u_n is van graad minstens $n/2$ dat niet verbonden is met u_1 . Dan volgt weer dat er tussen u_1 en u_n een pad loopt dat alle punten van G bevat. En weer als hiervoor, zeggen we dat $u_{i_1}, \dots, u_{i_m}$ de punten zijn die verbonden zijn met u_1 . Hieruit volgt ook weer dat u_n niet pad verbonden kan zijn met de punten van de vorm u_{i_j-1} , omdat er in dat geval een Hamilton cykel bestaat. Het punt u_1 moet nu ook graad lager dan $(n - 1)/2$ hebben, vanwege het eerste deel van het bewijs, dat punten van graad minstens $(n - 1)/2$ pad verbonden zijn met alle punten van graad minstens $n/2$. Met de aanname dat het aantal punten van graad $m \leq (n - 1)/2$ minder moet zijn dan m , volgt dat er een punt u_{i_j-1} is dat graad minstens $n/2$ heeft. Maar dat punt u_{i_j-1} en u_n hebben beiden graad minstens $n/2$ en zijn niet verbonden. Dat kan niet, en dus moet G wel Hamilton zijn en dat wilden we bewijzen. $\square$

De eisen voor stelling 2.1.6 zijn voldoende, maar niet noodzakelijk. Bijvoorbeeld graaf G_1 in figuur 2.1 is Hamilton, maar voldoet niet aan de eisen van de stelling.

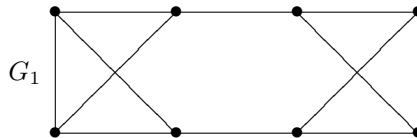


Figure 2.1: Een Hamilton graaf die niet aan de eisen van de stelling van Posá voldoet.

De eisen zijn dan misschien niet noodzakelijk, maar zodra we zwakkere eisen stellen zijn er voorbeelden van grafen die niet Hamilton zijn. We kunnen bijvoorbeeld de eis, "Voor elke m , met $1 \leq m < (n - 1)/2$ geldt dat: Er zijn minder dan m punten van graad lager of gelijk aan m ." verzwakken naar: het

aantal punten met graad kleiner dan m is hoogstens m . Het tegenvoorbeeld is eenvoudig zodra het gegeven is. Neem $n \geq 3$ en $1 \leq m < (n-1)/2$. Maak de graaf G als K_{n-m} verenigd met K_{m+1} en de componenten één punt gemeenschappelijk te geven. Dan is de geconstrueerde graaf niet Hamilton en K_{m+1} heeft precies $m+1$ punten van graad m , maar heeft in G één punt gemeen met de K_{n-m} en dan bevat G precies m punten van graad m . Zie graaf G_2 voor een voorbeeld met $n = 6$ en $m = 2$.

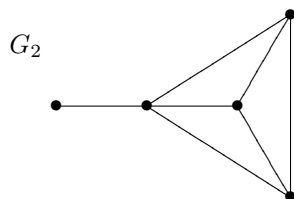


Figure 2.2: G_2 voldoet aan de zwakkere eis, maar is duidelijk niet Hamilton

Tenslotte kunnen we de laatste eis, "als n oneven, dan ook: Er zijn hoogstens $(n-1)/2$ punten met graad lager of gelijk aan $(n-1)/2$." verzwakken, maar zodra we dat doen volgt weer een tegenvoorbeeld:

Kies $n = 2m + 1$, $n > 1$, dan is bijvoorbeeld $K_n, n+1$ al niet Hamilton, want $K_{p,q}$ is alleen Hamilton als $p = q$. De enige manier waarop deze graaf dan in strijd is met de eisen van de stelling is dat er $(n-1)/2 + 1$ punten zijn van graad $(n-1)/2$. Graaf G_3 is een voorbeeld voor $n = 5$.

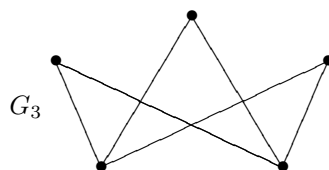


Figure 2.3: Niet Hamilton en voldoet uitsluitend niet aan de eis dat er $(n-1)/2$ punten van graad $(n-1)/2$ zijn.

Er is en wordt veel onderzoek gedaan naar de Hamilton eigenschap. Er zijn veel nieuwe definities bedacht zodat van grafen die daaraan voldoen makkelijk aangetoont kan worden of ze Hamilton zijn. De volgende stelling is een generalistie van de stelling van Ore.

Stelling 2.1.7 (Broersma, van den Heuvel, Veldman[5]). *Als G een 2-samenhangende graaf is en $|N(u) \cup N(v)| \geq n/2$ voor elk paar verschillende niet verbonden punten u en v van G , dan is G Hamilton, of G is de Petersen graaf, of G zit in een van de drie klassen van bijzondere grafen van 2-samenhangendheid, zoals in figuur ???.*

Aan de hand van deze stelling gaan we nog een aantal begrippen uitleggen en iets dieper in op de betekenis van deze stelling. Het bewijs zullen we niet geven, aangezien dit een > 20 pagina's bewijs is, met veel gevalsonderscheidingen en tussen resultaten, die we niet willen behandelen in deze tekst. Het eerste begrip dat we tegenkomen in de stelling is 2-samenhangend:

Definitie 2.1.8 (k -samenhangendheid). Zij G een graaf. Als uit G , $k - 1$ of minder punten verwijderd kunnen worden en zodat de nieuwe graaf G' dan nog steeds samenhangend is.

We kunnen nu **lemma 2.1.1** versterken door te bewijzen dat een Hamilton graaf 2-samenhangend moet zijn.

Lemma 2.1.9. Als G een Hamilton graaf, dan G 2-samenhangend.

Proof. Zij G een Hamilton graaf en C de Hamilton cykel in G . Als we een punt verwijderen uit G , dan wordt de cykel C een Hamilton pad P in de nieuwe graaf G' . Omdat er een Hamilton pad in G' bestaat, volgt dat G' samenhangend is. En dus is G 2-samenhangend. $\square$

Samenhangendheid wordt vaak als standaard eis beschouwd als het over Hamilton grafen gaat. 2-Samenhangendheid is een sterkere eis, want bijvoorbeeld graaf G_2 op blz. 7 is een samenhangende graaf, maar niet 2-samenhangend.

In plaats van naar de graad van twee punten te kijken, zoals bij Ore, wordt in **stelling 2.1.7** gekeken naar de omgeving van twee punten samen.

Definitie 2.1.10 (Omgeving van een punt). Zij $G = (V, E)$ een graaf en v een punt. Definieer $N(v) := \{u \mid u \in V, uv \in E\}$. We noemen $N(v)$ de omgeving van v .

2.2 t -stug Grafen

In 1973 introduceerde Chvátal de *stug* eigenschap in [6] samen met een aantal vermoedens over grafen en cyclen met betrekking tot deze nieuwe eigenschap. Veel onderzoek was/is gebaseerd op deze vermoedens waarvan we er twee zullen noemen. Een daarvan is nog steeds een open probleem, de ander is bewezen niet waar te zijn.

Definitie 2.2.1 (t -stug). Zij $G = (V, E)$ een graaf. G is t -stug, met $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, als voor alle $S \subset V$ geldt: $|S| \geq t \cdot \omega(G \setminus S)$.

Definitie 2.2.2 (stugheid). Zij G een graaf. De stugheid van G geven we aan met $\tau(G)$ en is de grootste t waarvoor G nog t -stug is.

Een ondergrens voor de stugheid van Hamilton grafen wordt beschreven in het volgende lemma.

Lemma 2.2.3. Elke Hamilton graaf is 1-stug.

Proof. Zij C een Hamilton cykel voor graaf $G = (V, E)$. Stel $S \subset V$ en $|S| = 1$. C is een Hamilton cykel en dus bevat $G_1 = G \setminus S$ een Hamilton pad, namelijk $C_1 = C \setminus S$, dus G_1 is samenhangend en $|S| \geq \omega(G_1) = 1$. Stel $S \subset V$ en $|S| = 2$, dan is $C_2 = C \setminus S$ een vereniging van twee disjuncte paden $P_{2,1}$, $P_{2,2}$. Noem $G_2 = G \setminus S$, we weten dat elk punt uit G_2 op pad $P_{1,1}$, of op pad $P_{1,2}$ ligt. Deze paden samen spannen de hele graaf op, hieruit volgt $\omega(G_2) \leq 2 \leq |S|$. Met inductie volgt $|S| \geq \omega(G \setminus S)$, voor willekeurige $S \subset V$. Dus G is 1-stug. $\square$

Hoewel 1-stug een noodzakelijke eis is voor Hamilton grafen, is de eis niet voldoende. In [6] had Chvátal het volgende vermoeden:

Vermoeden 1 (Chvátal). *Er bestaat t_0 zodat elke t_0 -stug graaf Hamilton is.*

In hetzelfde artikel schreef hij het vermoeden dat elke t -stug graaf met $t > \frac{3}{2}$ Hamilton is. Dit bleek niet waar te zijn, te lezen in [8]. In [9] werd bewezen dat elke 2-stug graaf een 2-factor heeft (een 2-factor in een graaf G is 2-reguliere graaf dat elk punt van G bevat) en dat voor elke $\epsilon > 0$ er een $(2 - \epsilon)$ -stug graaf is, zonder 2-factor. En dus zonder Hamilton cykel. Het volgende vermoeden is hierdoor redelijk en bovendien is er geen betere uitspraak mogelijk.

Vermoeden 2. *Elke 2-stug graaf is Hamilton.*

In [7] (2000), van Nederlands bodem, werd echter bewezen dat dit vermoeden niet klopt. De theorie die gebruikt wordt voor dit tegenvoorbeeld is op het eerste gezicht verbazingwekkend. Daarom geven we het bewijs dat **vermoeden 2.2.2** niet waar is in de volgende paragraaf.

2.3 Het tegenvoorbeeld voor vermoeden 2.2.2

We gaan grafen bouwen door middel van twee andere grafen als bouwstenen te gebruiken. Over deze speciaal geconstrueerde grafen kunnen we een stelling bewijzen die een conditie geeft zodat deze grote graaf geen Hamilton pad bevat, als een graaf een Hamilton pad bevat wordt de graaf ook wel **traceerbaar** genoemd. Daarna kiezen we een speciale graaf en volgt dat als we daarmee onze constructie uitvoeren, de geconstrueerde graaf 2-stug is, maar niet traceerbaar is. En dus niet Hamilton.

Definitie 2.3.1 (De graaf $G(H, x, y, l, m)$). Voor gegeven graaf H en twee punten x, y van H en $l, m \in \mathbb{N}$, definieëren we $G(H, x, y, l, m)$ als volgt: Neem m disjuncte kopieën $H_1, \dots, H_m$ van H , met x_i, y_i de punten in H_i die corresponderen met de punten x, y uit H , voor $i = 1, \dots, m$. Zij graaf F_m de vereniging van $H_1 \cup \dots \cup H_m$, waarbij je ook alle mogelijke lijnen tussen paren uit $\{x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m\}$ toevoegd. Nu is $G(H, x, y, l, m)$ de graaf, $F_m \cup K_l$, waarbij elk punt uit F_m verbonden is met elk punt uit K_l . Dan wordt ook wel geschreven $G(H, x, y, l, m) = F_m \vee K_l$. Lees dit als: $G(H, x, y, l, m)$ is de *join* van F_m en K_l .

Zie figuur 2.5 voor een voorbeeld.

Stelling 2.3.2. *Zij H een graaf en x, y twee punten van H die niet padverbonden zijn in H . Als $m \geq 2l + 3$, dan is $G(H, x, y, l, m)$ niet traceerbaar.*

Proof. Stel H, x, y, m, l voldoen aan de eisen van de stelling. Stel P is een Hamilton pad in $G(H, x, y, l, m)$. Zij $\mathcal{P}$ de collectie van disjuncte paden verkregen uit de doorsnijding van F_m met P . Stel P heeft beginpunt p_s en eindpunt p_e in F_m . Zodra P vanuit p_s in K_l uitkomt, tellen we 1 pad. Het pad P kan nu nog hoogstens l keer van K_l in F_m overgaan, wat iedere keer een nieuwe disjunct pad oplevert. Dus $|\mathcal{P}| \leq l + 1$. Volgens onze eis geldt $m \geq 2(l + 1) + 1 = 2l + 3$. Dus er zijn meer deelgrafien H_i dan eindpunten, dus er is een index i_0 , zodat voor alle paden in $\mathcal{P}$ er geen eindpunten in H_{i_0} liggen. Per constructie is er een pad $P' \in \mathcal{P}$ dat H_{i_0} bevat en dus zodat $P' \cap H_{i_0}$ een pad is met eindpunten x_{i_0} en y_{i_0} . Maar H_{i_0} is een kopie van H , en H bevatte geen pad tussen x, y . Dus $G(H, x, y, l, m)$ is niet traceerbaar. $\square$

Bekijk graaf L in figuur 2.4. We beweren dat als we L gebruiken als bouw-blok, dan is $G(H, x, y, l, m)$ niet traceerbaar en dus niet Hamilton, en $\tau(G(H, x, y, l, m)) \leq \frac{9}{4}$. Waarmee we dus een tegenvoorbeeld voor **vermoeden 2-stug hamilton** hebben.

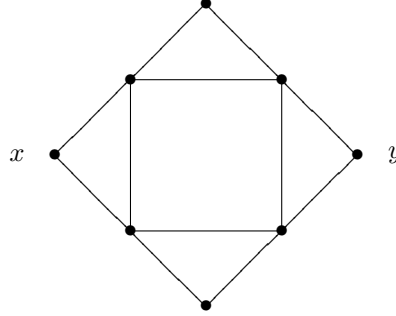


Figure 2.4: Speciaal bouwblok, graaf L .

Om deze bewering te bewijzen, laten we eerst in het algemene geval zien wat de stugheid van $G(H, x, y, l, m)$ is. Het bewijs is overgenomen uit [7].

Propositie 1. Voor $l \geq 2$ en $m \geq 1$,

$$\tau(G(H, x, y, l, m)) = \frac{l + 4m}{2m + 1}$$

Proof. Zij $G = (V, E) = G(H, x, y, l, m)$ voor bepaalde $l \geq 2$ en $m \geq 1$. Kies $S \subset V$, zodat $\omega(G \setminus S) > 1$ en $\tau(G) = \frac{|S|}{\omega(G \setminus S)}$. Omdat K_l verbonden is met alle andere punten en dat we eisen dat $\omega(G \setminus S) > 1$ moet gelden dat $V(K_l) \subset S$. Voor $i = 1, \dots, m$ definieer $S_i = S \cap V(L_i)$, $s_i = |S_i|$, en laat ω_i het aantal componenten van $L_i \setminus S_i$ zijn die niet x_i of y_i bevatten. Dan volgt:

$$\tau(G) = \frac{l + \sum_{i=1}^m s_i}{c + \sum_{i=1}^m \omega_i} \geq \frac{l + \sum_{i=1}^m s_i}{1 + \sum_{i=1}^m \omega_i}. \quad (2.1)$$

Omdat alle x_i en y_i verbonden zijn, volgt dat als er een S_i is waar x_i of y_i niet in zit, dat $G \setminus S$ precies één component bevat bestaande uit alle x_i en y_i die nog in die graaf zitten. In elk ander geval bevat $G \setminus S$ geen componenten waar x_i of y_i in zitten en dus geldt:

$$c = \begin{cases} 0 & \text{als } u_i, v_i \in S_i \text{ voor alle } i \in \{1, \dots, m\}, \\ 1 & \text{anders.} \end{cases}$$

We laten nu zien dat $s_i \geq 2\omega_i$ voor alle $i = 1, \dots, m$, zodat we vergelijking 2.1 mooier kunnen afschatten. Merk eerst op dat $\omega_i \leq 2$, want in $L \setminus \{x, y\}$ bevatten de grafen met alleen elementen die niet met elkaar verbonden zijn hoogstens 2 punten. Als $\omega_i = 0$ of $\omega_i = 1$, dan is het duidelijk dat $s_i \geq 2\omega_i$. Door alle mogelijkheden te controleren voor $s_i = 3$ volgt dat als $s_i \leq 3$, dan $\omega_i \leq 1$. De contrapositie geeft dan als $\omega_i = 2$, dan $s_i \geq 2\omega_i$. Dus kunnen we 2.1 herschrijven tot:

$$\tau(G) \geq \frac{l + 2 \sum_{i=1}^m \omega_i}{c + \sum_{i=1}^m \omega_i}. \quad (2.2)$$

We stelden $l \geq 2$, hiermee kunnen we 2.2 weer herschrijven door het rechterlid te zien als een functie van $\sum_{i=1}^m \omega_i$ en krijgen we:

$$\frac{l + 2 \sum_{i=1}^m \omega_i}{c + \sum_{i=1}^m \omega_i} = \frac{l - 2}{1 + \sum_{i=1}^m \omega_i} + 2,$$

dus de ondergrens van $\tau(G)$ is minimaal als $\omega_i = 2$ voor alle $i \in \{1, \dots, m\}$. Dus:

$$\tau(G) \geq \frac{l + 4m}{2m + 1}.$$

Nu hoeven we $\tau(G)$ alleen nog van boven af te schatten. Zeg $U = V(K_l) \cup U_1 \cup \dots \cup U_m$, met U_i de verzameling van punten van L_i van graad 4 ($i = 1, \dots, m$). Dan volgt dat

$$\frac{|U|}{\omega(G \setminus U)} \geq \frac{|S|}{\omega(G \setminus S) = \tau(G)},$$

want voor elke grotere verzameling van U wordt $\omega(G \setminus U)$ kleiner en dus wordt $\frac{|U|}{\omega(G \setminus U)}$ groter. Nu kunnen we het bewijs afronden door uit te rekenen:

$$\tau(G) \leq \frac{|U|}{\omega(G \setminus U)} = \frac{l + 4m}{2m + 1}.$$

□

Gevolg 2.3.3. Voor elke $\frac{9}{4} \geq \epsilon > 0$ bestaat er een $(\frac{9}{4} - \epsilon)$ -stug niet-traceerbare graaf.

Proof. De graaf L uit figuur 2.4 heeft geen Hamilton pad tussen de punten x en y . Volgens 2.3.2 is graaf $G(L, x, y, l, 2l + 3)$ voor elke l dan niet traceerbaar. Volgens **propositie 1** heeft de graaf een stugheid van $\frac{9l+12}{4l+7}$ voor $l \geq 2$. Deze functie is stijgend en begrensd en de limiet naar oneindig over l geeft stugheid $\frac{9}{4}$. Dit bewijst het gevolg. □

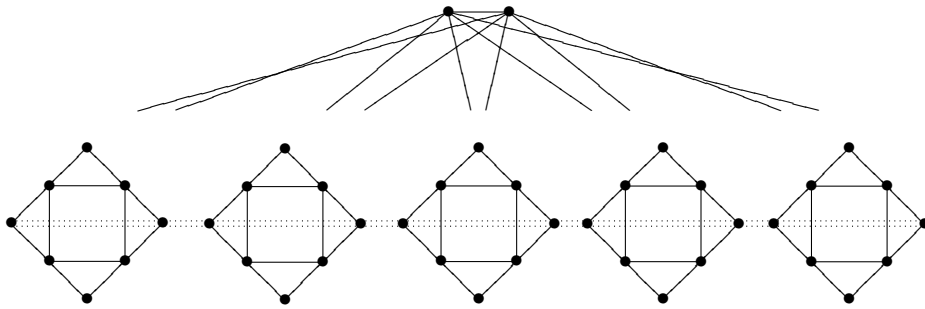


Figure 2.5: De graaf $G(L, x, u, 2, 5)$. De punten die op de stippellijn liggen zijn de speciale x_i en y_i en zijn allen met elkaar verbonden. De K_2 bovenaan is verbonden met alle punten.

Hoofdstuk 3

Het Hamilton cykel probleem is NP -compleet

Beslissen of een graaf Hamilton is, dat is een lastig probleem. Misschien dat een stelling zegt dat een graaf Hamilton is, maar als stellingen tekort schieten, dan zouden we graag een computer willen gebruiken om een Hamilton cykel aan te wijzen, of om te laten zien dat er geen bestaat. Men is echter nog niet in staat geweest om een ‘snel’ algoritme te bedenken dat voor een willekeurige graaf zegt of een graaf Hamilton is of niet en als de graaf Hamilton is, om dan ook een cykel te geven. Dit hoofdstuk gaat over hoe ‘moeilijk’ het Hamilton cykel probleem¹ is en wat het betekent dat een algoritme snel, of langzaam is.

3.1 Complexiteit en Algoritmen

Een algoritme dat een Hamilton graaf aan zou kunnen wijzen kunnen we zo beschrijven:

1. Begin bij een willekeurig punt en maak met dit punt het begin van pad P .
2. Verbind het laatste punt met een punt dat nog niet voorkomt in P en dat nog niet geprobeerd is.
3. Als dit niet kan, verwijder het laatste punt uit P .
4. Als alle punten voorkomen in P probeer dan een cykel te maken.
5. Als dit lukt geef P terug. Als dit niet lukt, verwijder het laatste punt uit P .
6. Als $|P| = 0$, dan is er geen Hamiltoncykel, anders ga verder met stap 2.

Het algoritme dat we hier beschrijven zoekt alle mogelijkheden voor een Hamilton cykel af tot er een gevonden is, of tot blijkt dat er geen kan bestaan. Een dergelijk algoritme heet een *backtrack* algoritme. Dit soort algoritmen zijn doorgaans heel traag en kunnen in gevallen van grote instanties wel jaren duren voordat ze een resultaat teruggeven. Om te bepalen hoe goed een algoritme werkt, moeten we iets kunnen zeggen over het aantal operaties dat een algoritme uit moet voeren. En omdat we niet per instantie willen/kunnen uitrekenen hoeveel operaties er nodig zijn, wordt er altijd uit gegaan van het ‘worst case

¹We zullen vanaf nu het Hamilton cykel probleem HC noemen.

scenario'. Het aantal operaties nodig voor een algoritme om te termineren noemen we de **complexiteit** en wordt geschat door een grens te geven aan de hand van bepaalde input² n .

Definitie 3.1.1 (De complexiteit van een algoritme). De complexiteit van algoritme A is de functie f , waar $f(n)$ het aantal stappen is voor A om te termineren met input n . Omdat we f vaak niet kunnen bepalen, schatten we hoe snel f groeit voor het ergste geval. Zij de functie g de afschatting voor het ergste geval zodat voor bepaalde $c > 0$, $f(n) \leq cg(n)$, als n groot genoeg is. We zeggen dan $f(n) = O(g(n))$, of ook, f is grote O van g . We zeggen dan³, de complexiteit van A is hoogstens $O(g(n))$.

Voorbeeld 3.1.2. Zij x een rij van lengte n . Het algoritme dat zoekt of element a in x voorkomt heeft complexiteit $O(n)$, want in het ergste geval, staat het element achteraan, of komt het niet in x voor. En dus moeten er maximaal n operaties uitgevoerd worden. Dus de complexiteit is $O(n)$.

Voorbeeld 3.1.3. Het bovenstaand algoritme, voor het vinden van Hamilton cyclen heeft een hoge complexiteit. Stel bijvoorbeeld dat voor graaf G op n punten elk punt graad k heeft (G heet dan k -regulier). Dan is een (slechte) bovengrens $O(n!)$, aangezien het aantal mogelijke rijtjes op met n punten $n!$ is. We hebben nu echter volledig genegeerd dat de graaf k -regulier is en we kunnen een betere bovengrens vinden door meer naar de structuur van de graaf te kijken. Het eerste punt x_1 in de mogelijke cykel kunnen we vrij kiezen. Dan zijn er nog k punten over om het volgende punt x_2 te kiezen. Het aantal punten waar we dan nog uit kunnen kiezen is dan maximaal k , maar omdat x_2 verbonden is met x_1 , zijn er nog maar $k - 1$ punten te kiezen voor x_3 , etc.. Een betere bovengrens zou dus zijn $O(k(k-1)^{n-1})$. Let op dat dit voor het speciale geval van k -reguliere grafen geldt en dus niet voor alle soorten grafen! De complexiteit is exponentieel en het geeft een idee van het slechtste geval. Bijvoorbeeld voor $k = 5$ en $n = 20$ zijn er al bijna 10^{15} mogelijkheden. Let ook op dat we hier het aantal mogelijkheden als complexiteit nemen! We hebben nog niet eens gekeken naar het aantal operaties dat nodig is om elke mogelijkheid te proberen.

We zouden eigenlijk graag een ondergrens willen geven van de complexiteit. Echter is dit vaak erg moeilijk en dus kijkt men naar de bovengrens. Maar om iets zinnigs te zeggen over de complexiteit, willen we wel een fatsoenlijke bovengrens. Zoals in **Voorbeeld 3.1.3** geschetst, kan het lastig zijn om een goede bovengrens te vinden. Dit probleem is zo belangrijk dat er aparte klassen van problemen zijn gemaakt voor verschillende bovengrensen. Deze klassen behandelen we in de volgende paragraaf, aangezien het Hamilton cykel probleem in een van deze klassen zit.

3.2 P en NP

Deze paragraaf gaat over problemen in het algemeen. Een probleem kan zijn: 'Hoeveel wiskundigen heb je nodig om een lamp in te draaien?'. Of een probleem

²De input voor een algoritme is niet altijd een getal, maar kan bijvoorbeeld ook een graaf zijn. Dan wordt de complexiteit bijvoorbeeld geschat met het aantal punten van de graaf, of het aantal lijnen.

³Vaak wordt ook gewoon gezegd, de complexiteit van A is $O(g(n))$

kan een beslissings probleem zijn, als: ‘zijn 2 wiskundigen genoeg om een lamp in te draaien?’. Het eerste probleem kan een moeilijk probleem zijn. Terwijl het tweede probleem beduidend makkelijker is. De klassen van problemen die we gaan bekijken zijn gaan over beslissings problemen. Deze problemen hebben als antwoord ‘ja’ of ‘nee’.

- De verzameling van beslissingsproblemen die in polynomiale tijd termineren, dat zijn problemen met complexiteit van de vorm $O(n^k)$ noemen we P (polynomial).
- De verzameling van beslissingsproblemen, waarvoor in polynomiale tijd gecontroleerd kan worden of een gegeven antwoord op het probleem juist is heet NP (non-deterministic polynomial).

De reden dat we speciaal kijken naar polynomiale complexiteit, is omdat ‘elementaire’ operaties, zoals bijvoorbeeld het optellen en vermenigvuldigen van getallen in polynomiale tijd gebeurd. We zouden kunnen zeggen dat deze operaties ‘natuurlijk’ zijn. En dus dat we om die reden polynomiale algoritmen snel, of goed kunnen noemen. Ook willen we problemen met algoritmen die in exponentiële tijd termineren niet snel noemen. Ten eerste natuurlijk, duurt het voor grote gevallen ontzettend lang voordat ze een resultaat teruggeven. En bovendien zijn er ontzettend veel problemen op te lossen met exponentiële algoritmen, bijvoorbeeld door te backtracken. Een classificatie voor polynomiale tijd geeft dus een beter onderscheidt tussen snelle en langzame problemen. Problemen uit P worden ook wel makkelijk genoemd en problemen uit NP moeilijk.

Voorbeeld 3.2.1. Het doorzoeken van een rij x van lengte n heeft complexiteit $O(n)$ en dus zit in P .

Voorbeeld 3.2.2. Het Hamilton cykel probleem: ‘Is gegeven graaf G Hamilton?’, zit in NP . Controleren of een cykel C Hamilton is, komt neer op controleren of elk punt uit G voorkomt in C , dit kost op een graaf met n punten, n operaties. En er moet gecontroleerd worden of elke lijn uit C wel in G voorkomt en dit zijn weer n operaties. Het controleren is dus van orde hoogstens $O(n)$.

Een van de belangrijkste problemen van deze tijd is de vraag: geldt $P = NP$?⁴ Als dit geldt, worden alle ‘moeilijke’ problemen opeens allemaal ‘makkelijk’ en kunnen we veel handige dingen berekenen, als een Hamilton cykel vinden in een graaf, of de kortste weg vinden in een graaf. Een minder goed gevolg is dat priemfactorontbinding een makkelijk probleem wordt en dat daarmee bijvoorbeeld het internet niet meer veilig is.

3.3 NP -compleet

Wat leuk is aan het probleem $P = NP$, is dat er een deelverzameling van NP is, zodat zodra blijkt dat een van die problemen polynomiaal is, dat dan volgt $P = NP$. Deze verzameling heet NP -compleet. Er zijn van een aantal basis problemen uit NP -compleet waarvoor deze eigenschap direct bewezen zijn. Van de overige problemen uit NP -compleet is echter aangetoond dat ze in polynomiale tijd om te schrijven zijn naar een van de basis problemen. Zodra

⁴Het is een van de \$1.000.000 millenium problemen.

een van deze problemen in polynomiale tijd opgelost kan worden, dan kan een basisprobleem in polynomiale tijd opgelost worden en dan geldt dus $P = NP$.

3.4 Het Hamilton Cykel probleem is NP -compleet.

Om te bewijzen dat HC NP -compleet is moeten we dus laten zien dat een ander, bekend, NP -compleet probleem in polynomiale tijd omgeschreven kan worden naar het Hamilton cykel probleem. Wat we gaan doen is laten zien hoe 3-SAT (Een belangrijk en veel bestudeerd NP -compleet probleem) in polynomiale tijd omgeschreven kan worden naar het vertex cover probleem [2], waarmee we dan bewijzen dat VC NP -compleet is. Vervolgens zullen we VC overschrijven naar HC [3]. Deze paragraaf is gebaseerd op [1].

Probleem 3.4.1 (SAT, satisfiability). Zij $\phi(x_1 \dots x_n) = C_1 \wedge \dots \wedge C_m$ een logische formule in conjunctieve normaalvorm. Bestaat er een invulling voor de variabelen x_i zodat ϕ is waar?

Een speciaal geval van SAT is 3-SAT, waarbij elke C_j precies drie literalen bevat. Met een literaal bedoelen we een variabele, of een negatie van een variabele.

Stelling 3.4.2 (Stelling van Cook). *SAT en 3-SAT zijn NP -compleet [4].*

Het bewijs voor deze stelling is lang en technisch en zullen we niet behandelen. Voor een bewijs zie [3].

Definitie 3.4.3 (Vertex Cover, Punten overdekking). Zij $G = (V, E)$ een graaf. Zij $K \subset V$ zodat elke lijn in G pad verbonden is met een punt van K , dan heet K een vertex cover of een punten overdekking.

Probleem 3.4.4 (VC, Vertex Covering Problem). Zij $G = (V, E)$ een graaf, zij $k \leq |V|$. Bestaat er een vertex cover K van G zodat $|K| \leq k$?

Stelling 3.4.5. *VC is NP -compleet.*

Proof. We gaan 3-SAT polynomaal omschrijven naar VC. Zij $\phi(x_1 \dots x_n) = C_1 \wedge \dots \wedge C_m$ een instantie van 3-SAT. Om dit probleem om te schrijven naar VC moeten we een graaf maken die correspondeert met ϕ :

Voor elke C_i definiëer

$$V'_i = \{c_{i1}, c_{i2}, c_{i3}\} \quad \text{en} \quad E'_i = \{c_{i1}c_{i2}, c_{i2}c_{i3}, c_{i3}c_{i1}\}$$

We willen per c_{il} vastleggen met welk literaal dat punt overeenkomt, aangezien we dat niet aan de grafen kunnen zien. Dus maken we per x_i grafen

$$V''_i = \{x_i, \neg x_i\} \quad \text{en} \quad E''_i = \{x_i \neg x_i\}.$$

en verbinden we de punten van de V'_i met de literalen van de corresponderende C_i op de volgende manier: Zij y_{i1}, y_{i2}, y_{i3} de literalen van C_i , definiëer

$$E'''_i = \{c_{i1}y_{i1}, c_{i2}y_{i2}, c_{i3}y_{i3}\}.$$

Dan definiëren we

$$V = \bigcup_{i=1}^m V'_i \cup \bigcup_{j=1}^n V''_j \quad \text{en} \quad E = \bigcup_{i=1}^m E'_i \cup \bigcup_{j=1}^n E''_j \cup \bigcup_{l=1}^m E'''_l$$

Zodat $G = (V, E)$ de graaf is waar we een vertex cover op moeten vinden die ook nog eens 3-SAT oplost. Het is duidelijk dat deze constructie in polynomiale tijd gemaakt kan worden. Zie figuur 3.1 voor een voorbeeld.

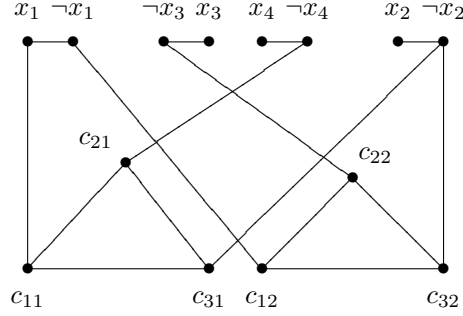


Figure 3.1: Een voorbeeld van een graaf bij de instantie $(x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_4)$

We claimen nu dat G een vertex cover K heeft zodat $|K| \leq k = n + 2m$ dan en slechts dan als er een invulling voor ϕ is zodat ϕ waar is. $\Rightarrow$ Stel eerst dat K zo een vertex cover is. Het is duidelijk dat K van elke V'_i minstens twee elementen moet bevatten. En van elke V''_j minstens één element. Dus K heeft minstens $n + 2m = k$ elementen, dus $|K| = k$. Dat betekent dat elke vertex cover K precies twee elementen uit elke V'_i bevat en precies één uit elke V''_j . Nu kunnen we een invulling w voor de variabelen vinden door te stellen $w(x_i) = \text{waar}$ als $x_i \in K$ en $w(x_i) = \text{onwaar}$ als $\neg x_i \in K$.

Bekijk nu een willekeurige C_j . K is een vertex cover en dus bevat twee punten die met twee punten uit C_j corresponderen en deze punten zijn pad verbonden met twee lijnen uit E'''_j . De derde lijn is pad verbonden met een punt uit een van de V''_i en dit punt moet dus ook in K zitten. Per definitie van de invulling w volgt dus dat dit punt, dat een literaal is, waar is. Dit maakt C_j waar en aangezien dit voor alle j geldt maakt het ϕ waar.

$\Leftarrow$ Stel nu dat we een invulling w hebben zodat ϕ waar is. Dan $x_i \in K$ als $w(x_i) = \text{waar}$ en $\neg x_i \in K$ als $w(x_i) = \text{onwaar}$. Dan zijn alle lijnen van de V''_i bereikt en voor elke j is er minstens één lijn van E'''_j pad verbonden met een literaal. Als we nu de eindpunten van de andere lijnen van E'''_j ook in K stoppen, krijgen we een vertex cover K zodat $|K| = k$. $\square$

Nu we dit bewezen hebben gaan we het VC probleem omschrijven naar een HC probleem. Dit doen we volgens [3].

Stelling 3.4.6. *HC is NP-compleet.*

Proof. Zij $G = (V, E)$ een gegeven instantie van het VC probleem en k een natuurlijk getal. We willen in polynomiale tijd een graaf $G' = (V', E')$ construeren zodat G' is Hamilton dan en slechts dan G heeft een vertex cover van kardinaliteit hoogstens k . Om de k punten te kiezen voor de vertex cover van V definiëren we speciale punten in G' , de punten $a_1, \dots, a_k$. Zodra we een Hamilton cykel in G' hebben, zullen deze punten aangeven welke punten we kunnen

kiezen voor onze vertex cover. Vervolgens maken we voor elke lijn $e = uv \in E$, een deelgraaf $T_e = (V'_e, E'_e)$ van G' op de volgende manier

$$V'_e = \{(u, e, i) \mid 1 \leq i \leq 6\} \cup \{(v, e, i) \mid 1 \leq i \leq 6\}$$

$$\begin{aligned} E'_e = & \{ \{(u, e, i), (u, e, i+1)\} \mid 1 \leq i \leq 5\} \\ & \cup \{ \{(v, e, i), (v, e, i+1)\} \mid 1 \leq i \leq 5\} \\ & \cup \{ \{(u, e, 1), (v, e, 3)\}, \{(u, e, 3), (v, e, 1)\}\} \\ & \cup \{ \{(u, e, 4), (v, e, 6)\}, \{(u, e, 6), (v, e, 4)\}\}. \end{aligned}$$

Hierdoor krijgen we deelgrafen van de vorm als in figuur 3.2.

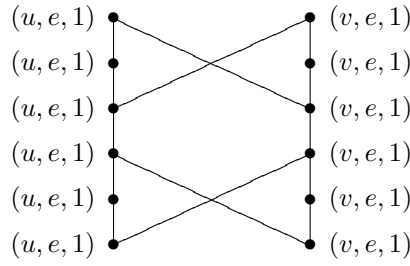


Figure 3.2: De graaf T_e .

Zodra we de vertex cover punten gaan bepalen met de speciale punten, zal dankzij de constructie van deze deelgrafen duidelijk zijn dat elke lijn e ook echt pad verbonden is met een vertex cover punt. Van alle T_e zullen we alleen de punten $(u, e, 1), (u, e, 6), (v, e, 1), (v, e, 6)$ verbinden met andere $T_{e'}$ verbinden op de volgende manier. Voor elke $v \in V$ labelen we alle zijdes waar v mee pad verbonden is door $ev_1, \dots, ev_{deg\ v}$. Dan definiëren we lijnen

$$E'_v = \{ \{(v, ev_i, 6), (v, ev_{i+1}, 1)\} \mid 1 \leq deg\ v - 1\}.$$

Dus volgt dat elke Hamilton cykel maar op een beperkt aantal manieren door de deelgrafen T_e kan lopen. Zie figuur 3.3.

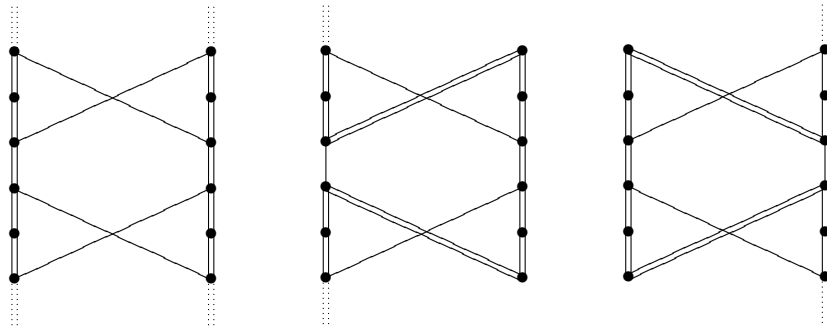


Figure 3.3: De drie manieren waarop de verschillende T_e doorlopen kunnen worden.

Voor elke v hebben we nu een lange sliert van deelgrafen van G' . We verbinden de begin en eindpunten van deze slierten met de speciale punten.

$$E'' = \{ \{a_j, (v, ev_1, 1)\} \mid 0 \leq j \leq k\} \cup \{ \{a_j, (v, ev_{deg\ v}, 6)\} \mid 0 \leq j \leq k\}.$$

Hiermee hebben we dan G' helemaal vastgelegd:

$$V' = \{a_1, \dots, a_k\} \cup \bigcup_{e \in E} V'_e \quad \text{en} \quad E' = \bigcup_{e \in E} E'_e \cup \bigcup_{v \in V} E'_v \cup E''.$$

Het is duidelijk dat de graaf G' construeren in polynomiale tijd gebeurt. We gaan nu bewijzen dat G' Hamilton is dan en slechts dan als G een vertex cover heeft van kardinaliteit k .

$\Rightarrow$ Stel G' bevat een Hamilton cykel K . Vanuit elk speciaal punt a_j vertrekt er lijn uit K naar een T_{e_j} en met de constructie die we gemaakt hebben en het feit dat K een Hamilton cykel is volgt dat K de hele sliert langsloopt dat met het punt v of u correspondeert (met $e = \{u, v\}$), zonder verlies van algemeenheid, neem aan dat de sliert met het punt v correspondeert. Het pad dat net beschreven is heeft dus als tweede punt $(v, e_j, 1)$ en doorloopt alle T_e waarvoor e pad verbonden is met v . Dit betekent dat de speciale punten het Hamilton cykel K partitioneert in paden $P_1, \dots, P_k$, die respectievelijk met punten $v_1, \dots, v_k$ corresponderen. Zij e een willekeurige lijn van G , dan is er een pad P_j dat door T_e loopt en dus is v_j pad verbonden met e , dus is $\{v_1, \dots, v_k\}$ een vertex cover van G .

$\Leftarrow$ Stel nu dat $W = \{v_1, \dots, v_k\}$ een vertex cover is van G . We moeten nu lijnen van G' kiezen zodat we een Hamilton cykel K krijgen. Uit figuur 3.3 kunnen we opmaken dat als $e = \{u, v\}$, u voor de linkerkant van de deelgraaf is en v voor de rechterkant. Als een Hamilton cykel zoals het linker plaatje loopt, dan is u een vertex cover punt, voor het midden zijn u en v vertex cover punten en voor rechts v . Dus we kiezen de lijnen als volgt:

- als $W \cap e = u$, kies de linker manier;
- als $W \cap e = u, v$, kies de middelste manier;
- als $W \cap e = v$, kies de rechter manier.

Dan moeten de lijnen uit E'_{v_i} in K zitten voor elke vertex cover punt. Evenals de lijnen

$$\begin{aligned} & \{a_i, (v_i(ev_i)_1, 1)\}, \text{ voor } 0 \leq i \leq k \\ & \{a_{i+1}, (v_i(ev_i)_{deg\ v_i}, 6)\}, \text{ voor } 0 \leq i \leq k-1 \\ & \{a_1, (v_k(ev_k)_k, 6)\}. \end{aligned}$$

Dan is K een Hamilton cykel voor G' . □

3.5 Het Handelsreizigers Probleem

Een van de andere onderwerpen waar deze scriptie over had kunnen gaan is het Travelling Salesman Problem⁵, of, het handelsreizigers probleem.

Probleem 3.5.1 (Het Handelsreizigers Probleem). Zij $G = K_n$, waarbij elke lijn een gewicht heeft, of ook wel een afstand. Wat is de kortste weg dat alle punten langsgaat en waarvoor het beginpunt en eindpunt hetzelfde zijn.

⁵Afgekort naar: TSP

Dit probleem lijkt erg op HC, maar is wezenlijk anders. Het is voor TSP bijvoorbeeld niet noodzakelijk dat elk punt slechts een keer bezocht mag worden. Dit probleem is ook NP -compleet, wat we hierna eenvoudig zullen bewijzen. Het is dus ook een moeilijk probleem en men probeert dagelijks de beste oplossing te vinden, voor de snelste weg van de ronde van vrachtwagens, de beste manier om een elektronisch circuit te bouwen, of klassiek natuurlijk wat de beste route is voor een handelsreiziger. Dat een dergelijk eenvoudig te formuleren probleem zo moeilijk kan zijn is op zijn minst fascinerend en daarom wordt het dan ook in deze tekst behandeld.

Stelling 3.5.2. *Het handelsreizigersprobleem is NP -compleet*

Proof. Zij G een graaf op n punten waar we een Hamilton cykel voor willen vinden. We gaan het probleem wederom in polynomiale tijd herformuleren naar het handelsreizigersprobleem. Breidt G uit naar $H = K_n$ op de volgende manier:

- Geef elke lijn in G lengte 1.
- Geef elke lijn die aan G toegevoegd moet worden lengte 2.

Als in H nu een oplossing voor het handelsreizigersprobleem lengte n heeft, dan is er dus een Hamilton cykel in G . Dus zodra TSP polynomiaal blijkt, kan HC polynomiaal opgelost worden en omdat HC NP -compleet is, zijn alle NP problemen polynomiaal. Dus TSP is NP -compleet. $\square$

Bibliography

- [1] D. Jungnickel, *Graphs, Networks and Algorithms*, Springer Berlin Heidelberg New York, pp. 52–58 (2005).
- [2] Karp, R.M.: Reducibility among combinatorial problems. In: Miller, R.E., Thatcher, J.W. (eds) *Complexity of Computer Computations*, Plenum Press, New York, pp. 85–103 (1972).
- [3] Garye, M.R., Johnson, D.S. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. Freeman, New York (1979).
- [4] Cook, S.A.: The complexity of theorem proving procedures. In: *Proc. 3rd ACM Symp. on the Theory of Computing*, pp. 151–158 (1971).
- [5] H.J. Broersma, J. van den Heuvel, H.J. Veldman, *A generalization of Ore's Theorem involving neighborhood unions*. Discrete Math. 122 (1993) 37-49.
- [6] Chvátal, V., *stug graphs and hamiltonian circuits*. Discrete Math. 5, 215-228 (1973).
- [7] D. Bauer, H.H. Broersma, H.J. Veldman, *Not every 2-stug graph is Hamiltonian*. Discrete Applied Mathematics 99, 317-321 (2000).
- [8] J.C. Bermond, Hamiltonian graphs, in: L. Beineke, R.J. Wilson (Eds.), *Selected Topics in Graph Theory*, Academic Press, London, (1987), blz. 127-167.
- [9] H. Enomoto, B. Jackson, P. Katerinis, A. Saito, *stugheid and the existence of k -factors*, J. Graph Theory 9 (1985) 87-95.