

RADBOUD UNIVERSITEIT NIJMEGEN



FACULTEIT DER NATUURWETENSCHAPPEN, WISKUNDE EN INFORMATICA

KLEURGETAL VAN REËLE RUIMTEN

Naam:
Studentnummer:
Studie:
Begeleider:

Renée Lenders,
4130723
Bachelor wiskunde
Dr. W. Bosma

22 mei 2015

Inhoudsopgave

Samenvatting	5
Inleiding	7
1 Probleemstelling	9
1.1 Kleurgetal van \mathbb{R}	10
2 Kleurgetal van \mathbb{R}^2	11
2.1 Ondergrens voor kleurgetal van \mathbb{R}^2	11
2.2 Bovengrens voor kleurgetal van \mathbb{R}^2	12
2.3 Speciale gevallen van het kleurgetal van \mathbb{R}^2	14
3 Kleurgetal van \mathbb{R}^3	17
3.1 Ondergrens voor kleurgetal van \mathbb{R}^3	17
3.2 Minimale bovengrens voor kleurgetal van \mathbb{R}^3	22
3.3 Bovengrens voor kleurgetal van \mathbb{R}^3	26
4 Kleurgetal van \mathbb{R}^n	29
4.1 Ondergrens voor kleurgetal van \mathbb{R}^n	29
4.2 Bovengrens voor kleurgetal van \mathbb{R}^n	32
Literatuurlijst	33

Samenvatting

In deze scriptie zal het kleurgetal van \mathbb{R}^n voor verschillende waarden van n worden behandeld. Het kleurgetal is het minimale aantal kleuren dat nodig is om alle punten te kleuren zodat er geen tweetal punten op afstand 1 van elkaar dezelfde kleur heeft. Dit probleem is in 1950 door E. Nelson bedacht. Er waren toen nog geen waarden voor het kleurgetal bekend. In de loop der jaren zijn er onder- en bovengrenzen bewezen en zijn de grenzen steeds dichter bij elkaar komen liggen. Maar voor alle $n \geq 2$ zijn er nog steeds geen exacte waarde voor het kleurgetal bekend.

Inleiding

Deze scriptie gaat over het vinden van het minimale aantal kleuren dat nodig is om alle punten in \mathbb{R}^n te kleuren oftewel het kleurgetal van \mathbb{R}^n voor verschillende waarden van n . Dit is een onopgelost probleem in de wiskunde.

Er is veel onduidelijkheid geweest over wie dit probleem eigenlijk bedacht heeft. Uiteindelijk heeft A. Soifer in zijn boek *The mathematical coloring book* [7] aangetoond dat E. Nelson het probleem in 1950 bedacht heeft. Het idee voor dit probleem is ontstaan naar aanleiding van het vierkleurenprobleem. Het probleem wordt dan ook wel het tweede vierkleurenprobleem genoemd. Het vierkleurenprobleem houdt in dat er maar 4 verschillende kleuren nodig zijn om landkaarten in te kleuren zodat buurlanden niet dezelfde kleuren krijgen. Hierbij worden natuurlijk wel een aantal randvoorwaarden afgesproken, maar daar gaan we nu niet verder op in. In tegenstelling tot het vierkleurenprobleem is er bij het kleurgetal geen precieze waarde bekend bij \mathbb{R}^2 . Dit verbaasde mij, omdat het probleem nog heel goed voor te stellen is. Het zorgde ervoor dat ik nieuwsgierig werd en me meer in het onderwerp wilde gaan verdiepen.

In deze scriptie zal eerst het kleurgetal van \mathbb{R} aan bod komen. Vervolgens wordt er gekeken naar de grenzen voor het kleurgetal van \mathbb{R}^2 . Ook wordt er gekeken naar speciale gevallen, zoals het eisen van het kleuren met meetbare verzamelingen. Hier zullen we zien dat het aantal mogelijkheden voor het kleurgetal kleiner wordt, maar dat het kleurgetal nog steeds niet exact bepaald kan worden. Als volgende stap wordt er gekeken naar de hogere dimensie \mathbb{R}^3 . Hierbij liggen de best bekende grenzen voor het kleurgetal al een heel stuk verder uit elkaar dan bij \mathbb{R}^2 . En ten slotte kijken we naar het kleurgetal van \mathbb{R}^n voor alle $n > 1$. In dit geval weten we alleen een ondergrens en een minimale bovengrens. Eigenlijk is er dus weinig bekend over grenzen voor het kleurgetal van \mathbb{R}^n .

Hoofdstuk 1

Probleemstelling

We beginnen nu met het probleem netjes te formuleren. Verder bekijken we een aantal definities en stellingen die we nodig zullen hebben.

We willen weten wat het minimale aantal kleuren is dat nodig is om alle punten van \mathbb{R}^n voor $n \geq 1$ te kleuren met de voorwaarde dat elk tweetal op afstand 1 van elkaar verschillende kleuren moeten krijgen.

Definitie 1.1. Het kleurgetal van \mathbb{R}^n met $n \geq 1$ is het minimale aantal kleuren dat nodig is om alle punten in \mathbb{R}^n te kleuren zodat er geen tweetal punten op afstand 1 van elkaar dezelfde kleur heeft.

Definitie 1.2. Een kleuring heet net als elk tweetal punten op afstand 1 van elkaar verschillende kleuren heeft.

Nu kunnen we ons probleem opnieuw beschrijven. We willen weten wat het minimale aantal kleuren van een nette kleuring van \mathbb{R}^n is voor verschillende waarden van $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

We maken een zijsprong naar de stelling van Erdős-de Bruijn, maar hiervoor hebben we eerst de definitie van een graaf en k -kleurbaar nodig.

Definitie 1.3. Een graaf G is een paar (V, E) waarbij V een eindige verzameling is en E een verzameling van paren uit V . De elementen uit V noemen we de knopen van G en de elementen uit E noemen we de kanten van G .

Opmerking 1.4. We nemen in het vervolg van deze scriptie aan dat een graaf een ongerichte graaf zonder lussen en met hoogstens één kant tussen twee knopen is.

Definitie 1.5. Een graaf is k -kleurbaar als aan ieder punt van de graaf één van de k kleuren gegeven kan worden op zo'n manier dat de twee eindpunten van iedere lijn verschillende kleuren hebben.

Stelling van Erdős-de Bruijn 1.6. *Laat k een positief geheel getal zijn en neem aan dat iedere eindige deelgraaf van de graaf G k -kleurbaar is. Dan geldt dat G k -kleurbaar is.*

Als we dus laten zien dat iedere eindige deelgraaf van \mathbb{R}^n k -kleurbaar is, dan is \mathbb{R}^n ook k -kleurbaar. Deze stelling is erg nuttig voor oneindige grafen.

Hierbij merken we op dat bij het bewijs van de stelling van Erdős-de Bruijn het keuzeaxioma wordt gebruikt. Voor het gedetailleerde bewijs zie het artikel van De Bruijn en Erdős [1].

1.1 Kleurgetal van \mathbb{R}

Kijkend naar het probleem is het logisch om te beginnen voor de waarde $n = 1$. Hier kunnen we het kleurgetal precies bepalen. Door het interval $[k, k + 1)$ met even $k \in \mathbb{Z}$ dezelfde kleur te geven en de rest van de intervallen een tweede kleur, hebben we de gehele \mathbb{R} net gekleurd. Het kleurgetal van \mathbb{R} is dus 2.

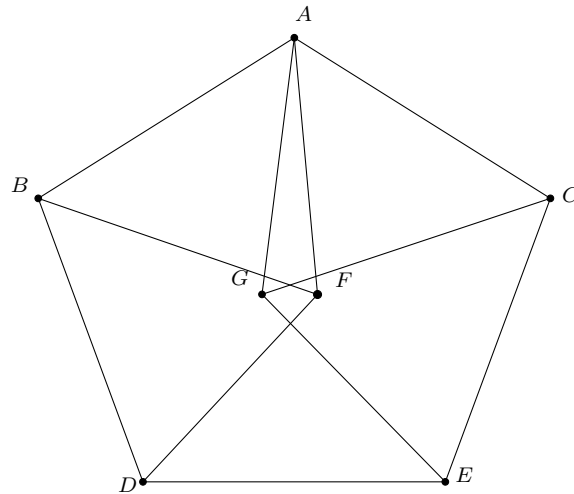
Hoofdstuk 2

Kleurgetal van \mathbb{R}^2

Nu gaan we kijken naar het kleurgetal van \mathbb{R}^2 . We kunnen alleen een ondergrens en bovengrens geven voor het kleurgetal, want het kleurgetal is niet precies bekend.

2.1 Ondergrens voor kleurgetal van \mathbb{R}^2

De best bekende ondergrens is 4, zie [7]. De ondergrens kunnen we bewijzen door een graaf te geven die het kleurgetal 4 heeft. Bijvoorbeeld de Moser spindel graaf:



Figuur 2.1: Moser spindel met kanten van lengte 1.

Stelling 2.1. *De Moser spindel gekleurd met 3 kleuren bevat altijd twee punten op afstand 1 van elkaar met dezelfde kleur.*

Bewijs. Neem aan dat de spindel net gekleurd is met 3 kleuren. De Moser spindel heeft als bijzondere eigenschap dat als je drie willekeurige knopen neemt, er altijd minimaal twee op afstand 1 van elkaar liggen. Maar hieruit volgt dat er maximaal twee knopen dezelfde kleur mogen hebben. We hebben dus minimaal $3\frac{1}{2}$ kleuren nodig om de zeven knopen te kleuren. Maar we hebben slechts 3 kleuren en dus volgt dat er twee knopen op afstand 1 zijn met dezelfde kleur. Dit is in tegenspraak met onze aanname. \square

Nu volgt dat het kleurgetal van de Moser spindel minimaal 4 is. We kunnen makkelijk nagaan dat de spindel ook echt met 4 kleuren te kleuren is. Het kleurgetal van de Moser spindel is dan ook 4.

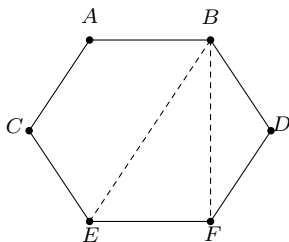
Uit de stelling van Erdős-de Bruijn volgt nu dan dat \mathbb{R}^2 ook niet net te kleuren is met 3 kleuren. Dus een ondergrens voor het kleurgetal van \mathbb{R}^2 is 4.

2.2 Bovengrens voor kleurgetal van \mathbb{R}^2

Nu gaan we naar de bovengrens voor het kleurgetal van \mathbb{R}^2 kijken.

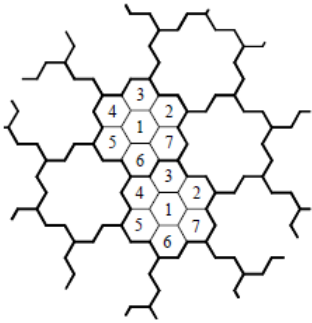
Stelling 2.2. *Er is een nette 7-kleuring van \mathbb{R}^2 .*

Bewijs. We nemen regelmatige zeshoeken die zijden met lengte 1 hebben. Iedere zeshoek geven we één kleur. We beginnen met de eerste zeshoek de kleur 1 te geven. Zijn zes burens geven we de kleuren 2 tot en met 7. Het geheel van deze zeven zeshoeken noemen we *een bloem*. Deze bloem P is een symmetrische veelhoek met 18 zijden. Met deze bloemen vullen we \mathbb{R}^2 zoals in figuur 2.3 te zien is.

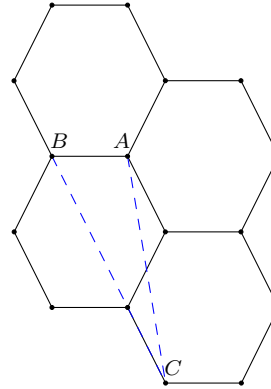


Figuur 2.2: Zeshoek $ABCDEF$.

Nu geldt dat er geen punten op afstand d zijn zodanig dat deze dezelfde kleur hebben met $2 < d < \sqrt{7}$. Dat $d > 2$ geldt, leiden we af uit zeshoek $ABCDEF$. De maximale afstand binnen de zeshoek is afstand $BE = AF = CD$. Voor het gemak nemen we de afstand BE . Iedere gelijkzijdige zeshoek is opgebouwd uit zes gelijkzijdige driehoeken. Neem het middelpunt van de zeshoek en noem deze M . Dan geldt dat driehoek MEF een gelijkzijdige driehoek is. Dan weten we dus dat $\angle BEF = 60^\circ$. Dan is zijde $BE = \frac{EF}{\cos(60^\circ)} = 2$.



Figuur 2.3: Bloemen [7].



Figuur 2.4: Deel van een bloem.

Met behulp van figuur 2.4 leiden we af dat $d < \sqrt{7}$. We gaan de afstand AC bereken, omdat dit de kleinste afstand tussen twee zeshoeken met dezelfde kleur is. Met behulp van de cosinusregel geldt er

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos(\angle ABC).$$

Invullen geeft $AC^2 = 7$.

Dus volgt nu dat er geen punten op afstand d met $2 < d < \sqrt{7}$ met dezelfde kleur zijn. Maar dan kunnen we alles lineair verkleinen met factor 2, 1. Dan krijgen we dat er geen punten op afstand d met $0,95\dots < d < 1,25\dots$ zijn. Maar dan volgt dat er geen punten op afstand 1 met dezelfde kleur zijn. Dus hebben we een nette 7-kleuring voor \mathbb{R}^2 gevonden. \square

Dit is echter niet de enige nette kleuring van \mathbb{R}^2 met 7 kleuren. We kunnen \mathbb{R}^2 ook kleuren door het te vullen met rijen vierkanten met diagonaal 1. We geven iedere rij de kleuren 1 tot en met 7. Vervolgens schuiven we de rij erboven $2\frac{1}{2}$ hokje naar rechts.

3	4	5	6	7	1	2	3
5	6	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7	1

Figuur 2.5: 7-kleuring \mathbb{R}^2

Het gebied van een vierkant inclusief de 'bovenste' en 'rechtse' zijde, zonder het hoekpunt rechts beneden, wordt één kleur gegeven. Dan geldt dat er geen punten

binnen het vierkant op afstand 1 van elkaar zijn die dezelfde kleur hebben. Verder is de kleinste afstand tussen twee vierkanten met dezelfde kleur 1. De schuine zijde van de rode driehoek in figuur 2.5 is 1, want alle zijden van de vierkant hebben lengte $\sqrt{\frac{1}{2}}$. Omdat het rechter beneden punt niet tot het gebied hoort, zijn er geen punten op afstand 1 van elkaar dezelfde kleur hebben.

Met 7 kleuren is \mathbb{R}^2 net te kleuren. We weten dus uiteindelijk dat het kleurgetal van \mathbb{R}^2 wel 4, 5, 6 of 7 moet zijn.

2.3 Speciale gevallen van het kleurgetal van \mathbb{R}^2

Als we verschillende voorwaarden aan de kleuringen opleggen, kunnen we het kleurgetal van \mathbb{R}^2 nauwkeuriger bepalen. Eerst gaan we kijken wat het betekent als we eisen dat de kleuren meetbare verzamelingen zijn. Hiervoor bekijken we basisdefinities die nodig zijn om dit te kunnen begrijpen.

Definitie 2.3. Het *volume* van een rechthoek $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ met $a_i < b_i$ in \mathbb{R}^2 is gedefinieerd als $\text{vol}(B) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$.

Definitie 2.4. De *buitenmaat* van een verzameling A is als volgt gedefinieerd

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_i \text{vol}(B_i) : (B_i)_{i \in I} \text{ overdekt } A; I \text{ hoogstens aftelbaar} \right\}.$$

Definitie 2.5. Een verzameling $A \subset \mathbb{R}^n$ heet *meetbaar* als voor iedere willekeurige verzameling S geldt $\mu^*(S) = \mu^*(S \cap A) + \mu^*(S \setminus A)$ en dan zeggen we dat $\mu(A) = \mu^*(A)$.

Falconer's stelling 2.6. Laat $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{i=1}^4 A_i$ een overdekking van het vlak zijn met $A_i \cap A_j = \emptyset$ voor alle $i \neq j$ met $i, j \in \{1, \dots, 4\}$ en A_i is een meetbare verzameling, dan geldt dat één van de verzamelingen A_i twee punten op afstand 1 van elkaar bevat.

Voor het bewijs en verdere toelichting zie [7].

We mogen dus concluderen dat het kleurgetal van \mathbb{R}^2 voor kleuringen met meetbare verzamelingen minimaal 5 is.

Nu gaan we kijken wat er gebeurt als we bij de kleuring gebruik maken van de Jordan kromme. Het kleurgetal van \mathbb{R}^2 is dan 6 of 7, zie [9]. We gaan nu bekijken wat we hier precies voor moeten eisen. Voor het bewijs zie het artikel van Woodall [9].

Definitie 2.7. Een *Jordan kromme* is een vlakke kromme die topologisch equivalent is aan de eenheidscirkel.

Definitie 2.8. Een *Jordan boog* is een vlakke boog die topologisch equivalent is aan het gesloten eenheidsinterval.

Definitie 2.9. Een *samenhangende* graaf is een graaf waarbij er een pad van ieder willekeurig punt naar ieder ander willekeurig punt is.

Laat G nu een nette inbedding van een graaf in \mathbb{R}^2 zijn. Dan moet G voldoen aan:

- G bevat een verzameling punten van \mathbb{R}^2 , deze worden knopen genoemd,
- G bevat een verzameling van Jordan bogen, deze worden kanten genoemd,
- elke kant raakt 2 knopen en snijdt geen andere knopen,
- elke kant raakt of snijdt geen andere kanten behalve in de knopen van de kant.

Veronderstel nu dat in ieder begrensde gebied van het vlak hoogstens eindig veel knopen zijn en verder dat er punten van hoogstens eindig veel verschillende kanten zijn. Veronderstel ook dat ieder samenhangend component van $\mathbb{R}^2 \setminus G$ een simpel samenhangend gebied is begrensd door een Jordan kromme. Dit houdt in dat G samenhangend is en niet on samenhangend wordt door het weglaten van één kant. Dan geldt dat iedere Jordan kromme eindig veel knopen en kanten bevat. Verder grenst iedere kant aan precies twee gebieden van $\mathbb{R}^2 \setminus G$ en de vereniging van afsluitingen van al deze gebieden is \mathbb{R}^2 . De gebieden $\mathbb{R}^2 \setminus G$ noemen we een kaart M als ze aan al deze voorwaarden voldoen.

Definitie 2.10. Twee gebieden van M heten *naburig* als de grenzen van deze gebieden een gemeenschappelijke kant hebben.

Definitie 2.11. Een verzameling is *verdeelbaar in gebieden* als er een kaart M is zodat de verzameling bestaat uit de vereniging van enkele gebieden van M en mogelijk enkele punten die in de grenzen van de gebieden liggen.

Definitie 2.12. Verschillende verzamelingen heten *gelijktijdig verdeelbaar in gebieden* als iedere verzameling verdeelbaar in gebieden is met dezelfde kaart M en als ieder gebied van M tot hoogstens één van de verzamelingen behoort.

Stelling 2.13. *Er zijn minimaal 6 kleuren nodig om \mathbb{R}^2 net te kleuren in gelijktijdig verdeelbare gebieden.*

Dus volgt nu dat in dit geval het kleurgetal 6 of 7 is.

Hoofdstuk 3

Kleurgetal van \mathbb{R}^3

Nu gaan we kijken naar het kleurgetal \mathbb{R}^3 . Ook hier kunnen we weer alleen een bovengrens en ondergrens voor het kleurgetal geven.

3.1 Ondergrens voor kleurgetal van \mathbb{R}^3

De best bekende ondergrens voor het kleurgetal van \mathbb{R}^3 is momenteel 6, zie [5]. Om de ondergrens te bewijzen gaan we aantonen dat er geen nette 5-kleuring is. Maar voordat we dit doen, moeten we eerst een aantal definities opstellen en lemma's bewijzen.

In deze paragraaf nemen we twee willekeurige punten s en t uit \mathbb{R}^3 welke op afstand 1 van elkaar liggen.

Definieer nu:

- $C = C_{\{s,t\}}$, dit is de cirkel van punten die op afstand 1 van zowel s als van t liggen,
- de verzameling $\{p, p_1, p_2, q\}$ met $p, p_1, p_2, q \in C$ en $|p - p_1| = |p_1 - p_2| = |p_2 - q| = 1$,
- τ de rotatie van de ruimte om de lijn $l = l(p, q)$ met de voorwaarde $|\bar{p}_i - p_i| = 1$ voor $i = 1, 2$ waar $\tau(x) = \bar{x}$,
- G de graaf met de knopen $\{s, t, p, p_1, p_2, q, \bar{s}, \bar{t}, \bar{p}_1, \bar{p}_2\}$ en de kanten gevormd door de lijnen tussen de knopen die op afstand 1 van elkaar liggen.

Definitie 3.1. Gegeven een puntenkleuring c van G , noemen we de zijde (p, q) van G *monochromatisch* als $c(p)$ hetzelfde is als $c(q)$.

Lemma 3.2. *Elke nette 5-kleuring van de graaf G voldoet aan:*

- i Als (p, q) monochromatisch is dan is noch (p, p_2) noch (p_1, q) alsmede noch (\bar{p}, \bar{p}_2) noch (\bar{p}_1, \bar{q}) monochromatisch.*

ii Precies één element van $\{(p, q), (p, p_2), (p_1, q)\}$ als ook van $\{(\bar{p}, \bar{q}), (\bar{p}, \bar{p}_2), (\bar{p}_1, \bar{q})\}$ is monochromatisch.

Bewijs. Neem de graaf G en neem aan dat hij net 5-gekleurd is. We weten dat de knopen p, q, p_1, p_2 allemaal op afstand 1 van de knopen s en t affiggen die ook weer op afstand 1 van elkaar liggen. Maar dan geldt dat minimaal twee knopen van p, q, p_1, p_2 dezelfde kleur hebben. Omdat $\{p, p_1\}$, $\{p_1, p_2\}$ en $\{p_2, q\}$ allemaal op afstand 1 van elkaar liggen, geldt dat $c(p) \neq c(p_1)$, $c(p_1) \neq c(p_2)$ en $c(p_2) \neq c(q)$. Dan moet dus één van de volgende vergelijkingen $c(p) = c(q)$, $c(p) = c(p_2)$ en $c(p_1) = c(q)$ gelden. En op precies dezelfde manier geldt dat één van de vergelijkingen $c(\bar{p}) = c(\bar{q})$, $c(\bar{p}) = c(\bar{p}_2)$ en $c(\bar{p}_1) = c(\bar{q})$ moet gelden.

Nu maken we een gevalsonderscheiding:

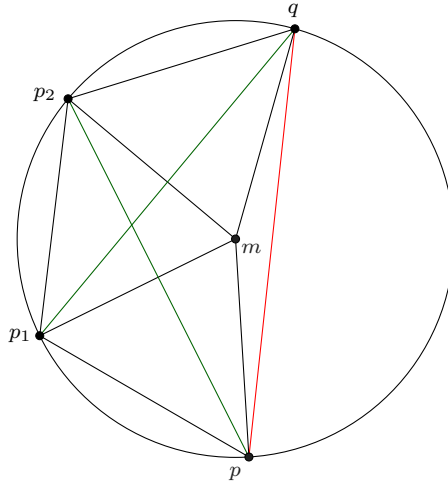
- a) Stel $c(p) = c(q)$. Dan volgt $c(p_1) \neq c(p) = c(q) \neq c(p_2)$. Dus geldt er $c(p) \neq c(p_2)$ en $c(p_1) \neq c(q)$. Verder geldt er ook $c(\bar{p}) = c(\bar{q})$, omdat $p = \bar{p}$ en $q = \bar{q}$. Maar dan volgt op exact dezelfde manier dat $c(\bar{p}) \neq c(\bar{p}_2)$ en $c(\bar{p}_1) \neq c(\bar{q})$. Dus volgt eigenschap *i*.
- b) Stel $c(p) \neq c(q)$. Dan volgt dat óf $c(p) = c(p_2)$ óf $c(p_1) = c(q)$ en dat óf $c(\bar{p}) = c(\bar{p}_2)$ óf $c(\bar{p}_1) = c(\bar{q})$. Maar er mag niet gelden dat $c(p) = c(p_2)$ én $c(\bar{p}) = c(\bar{p}_2)$, want dan geldt $c(p_2) = c(p) = c(\bar{p}) = c(\bar{p}_2)$. De knopen p_2 en \bar{p}_2 liggen op afstand 1 van elkaar en dan is de graaf G dus niet net gekleurd. Net zo mag er niet $c(p_1) = c(q)$ én $c(\bar{p}_1) = c(\bar{q})$ gelden. Maar dan volgt ook eigenschap *ii* van het lemma.

□

Lemma 3.3. *Als \mathbb{R}^3 net 5-gekleurd is en $c(p) \neq c(q)$ dan bevat de rotatie van $C_{\{p_1, \bar{p}_1\}}$ om de lijn $l(p, q)$ geen punten met de kleur $c(q)$.*

Bewijs. Neem aan dat \mathbb{R}^3 met 5 kleuren net gekleurd is en dat $c(p) \neq c(q)$. Uit lemma 3.2 uitspraak *ii* geldt dat óf (p, p_2) óf (p_1, q) en dat óf (\bar{p}, \bar{p}_2) óf (\bar{p}_1, \bar{q}) . Zoals we in het bewijs van Lemma 3.2 zagen mag er niet gelden dat $c(p) = c(p_2)$ én $c(\bar{p}) = c(\bar{p}_2)$ of $c(p_1) = c(q)$ én $c(\bar{p}_1) = c(\bar{q})$. Dus mogen we zegen dat óf (p_1, q) óf (\bar{p}_1, \bar{q}) geldt. Maar dan volgt dat alle punten van de cirkel $C_{\{p_1, \bar{p}_1\}}$ niet de kleur $c(q)$ mogen hebben. De rotatie van $C_{\{p_1, \bar{p}_1\}}$ om de lijn $l(p, q)$ mag dan ook geen punten met de kleur $c(q)$ hebben. □

Nu gaan we $|p - q|$ en $|p - p_2| = |p_1 - q|$ berekenen. We geven als eerst het middelpunt van $C_{\{s, t\}}$ de naam m . Nu bekijken we de driehoek mtp . Er geldt $mt = \frac{1}{2}$ en $pt = 1$ en daarom is $mp = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.



Figuur 3.1: Situatieschets.

Dus de straal van cirkel in figuur 3.1 is $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Verder noemen we $\angle pmp_1 = \alpha$. Er geldt natuurlijk dat $\angle pmp_1 = \angle p_1mp_2 = \angle p_2mq$.

We kunnen nu berekenen dat

$$\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{6}.$$

Het is duidelijk dat $|p - p_2| = |p_1 - q| = 2 \cdot \sin \alpha \cdot mp$. Er geldt $mp = mp_1 = mp_2 = mq$, omdat m het middelpunt van de cirkel is. Het is ook duidelijk dat $|p - q| = 2 \cdot \sin \frac{3}{2}\alpha \cdot mp$. Maar om dit uit te kunnen rekenen moeten we eerst weten wat $\sin \alpha$ en $\sin \frac{3}{2}\alpha$ zijn.

Om dit te kunnen berekenen maken we gebruik van:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + i(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta). \end{aligned}$$

Dan volgt:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sin\left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha\right) = \sin \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\alpha + \cos \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\alpha \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{6} + \frac{1}{3}\sqrt{6} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{2}{3}\sqrt{2}. \end{aligned}$$

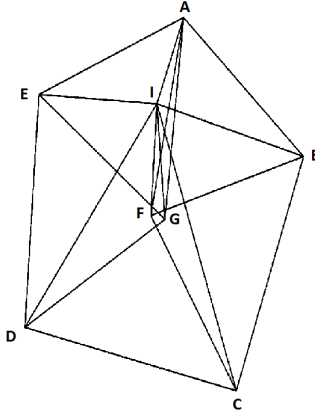
Dus $|p - p_2| = |p_1 - q| = 2 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{2}{3}\sqrt{6} = \sqrt{\frac{24}{9}} = \sqrt{\frac{8}{3}}$.

Nu gaan we $\sin \frac{3}{2}\alpha$ berekenen

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos\left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha\right) = \cos \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\alpha + \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\alpha \\ &= \left(\frac{1}{3}\sqrt{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{1}{3}, \\ \sin \frac{3}{2}\alpha &= \sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\alpha\right) = \sin \alpha \cos \frac{1}{2}\alpha + \cos \alpha \sin \frac{1}{2}\alpha \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{2}{9}\sqrt{12} + \frac{1}{9}\sqrt{3} = \frac{5}{9}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Dus $|p - q| = 2 \cdot \frac{5}{9}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{5}{9}\sqrt{9} = \frac{5}{3}$.

We gaan nu de driedimensionale spindel bekijken.

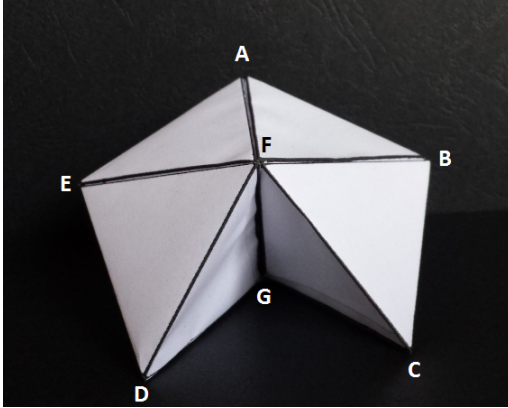


Figuur 3.2: Driedimensionale spindel [5].

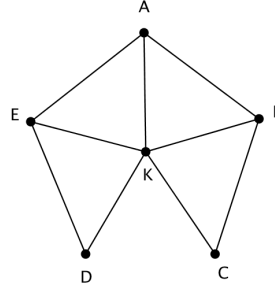
Lemma 3.4. *De driedimensionale spindel met 4 kleuren gekleurd bevat altijd twee punten op afstand 1 van elkaar die dezelfde kleur hebben.*

Bewijs. Stel dat de spindel net gekleurd is met 4 kleuren. De punten A, B, C, D, E, F en G komen ook voor in de Moser spindel. We weten dan ook dat we 4 kleuren nodig hebben om deze net te kleuren (zie paragraaf 2.1). Maar dan krijgt het punt I dus dezelfde kleur als een van deze punten. Maar punt I ligt op afstand 1 van alle punten. Twee punten op afstand 1 hebben dezelfde kleur. Dus is de spindel niet net gekleurd. \square

Er zijn dus minimaal 5 kleuren nodig om de driedimensionale spindel net te kleuren.



Figuur 3.3: Situatie.



Figuur 3.4: Doorsnede.

Lemma 3.5. *De driedimensionale spindel is bevat in een bol met straal $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.*

Bewijs. We tonen aan dat figuur 3.3 in een bol met straal $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ past. Het is makkelijk in te zien dat de driedimensionale spindel in figuur 3.3 past en dus ook in een bol met straal $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Nu bekijken we de doorsnede van het figuur met de punten A, B, C, D en E . Punt K ligt precies op het midden van zijde FG . Er geldt $AK^2 = AF^2 - KF^2$ met $AF = 1$ en $KF = \frac{1}{2}$. Dus $AK = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. En net zo $EK = DK = BK = CK = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Dus kunnen we concluderen dat de driedimensionale spindel in een bol van straal $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ past. \square

Stelling 3.6. *Het kleurgetal van een nette kleuring van \mathbb{R}^3 is minimaal 6.*

Bewijs. Neem twee punten q, q_1 op afstand $\frac{5}{3}$ van elkaar. Definieer vervolgens

$$C = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid |q_1 - p| = 1, |q - p| = |q_1 - q| = \frac{5}{3}\}.$$

We bekijken nu eerst het geval dat dat cirkel C niet de kleur van punt q heeft, met andere woorden $\forall p \in C \ c(p) \neq c(q)$. Nu stel dat \mathbb{R}^3 net gekleurd is met 5 kleuren. Dan volgt nu uit Lemma 3.3 dat de rotatie van de cirkel $C_{\{p_1, \bar{p}_1\}}$ om de lijn $l(q, p)$ voor elke $p \in C$ niet de kleur $c(q)$ heeft. Volgens Nechushtan [2] bevat het lichaam dat we krijgen door deze rotatie een bol met straal $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Maar dan bevat het rotatiefiguur ook de driedimensionale spindel en dus kan het rotatiefiguur niet net met 4 kleuren gekleurd worden. Maar dan mogen we concluderen dat \mathbb{R}^3 niet met 5 kleuren net te kleuren is. In het geval dat cirkel C wel punten met de kleur van punt q heeft, draaien we q_1 met q vast zodat $c(q_1) = c(q)$ geldt. Nu hebben we weer precies het eerste geval. Dus er zijn minimaal 6 kleuren nodig om \mathbb{R}^3 net te kleuren. \square

3.2 Minimale bovengrens voor kleurgetal van \mathbb{R}^3

In deze paragraaf gaan we bewijzen dat met een nette rooster-deelrooster kleuring in \mathbb{R}^3 er altijd minimaal $2^4 - 1 = 15$ kleuren nodig zijn. Maar voor we hier aan kunnen beginnen moeten we enkele definities en enkele lemma's bekijken. Voor verdere details en bewijzen zie het artikel van Coulson [3].

Definitie 3.7. Een *rooster* van \mathbb{R}^3 is het discrete \mathbb{Z} -opsansel van vectoren uit \mathbb{R}^3 met de eigenschap dat het discrete \mathbb{R} -opsansel \mathbb{R}^3 vormt.

Definitie 3.8. De *Voronoi gebieden* van een roostervector $\lambda \in \Lambda$ zijn gedefinieerd als volgt $\mathcal{V}_\Lambda(\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x - \lambda\| \leq \|x - \lambda'\| \text{ voor alle } \lambda' \in \Lambda\}$.

Opmerking 3.9. Voor $\lambda = 0$ noteren we $\mathcal{V}_\Lambda(\lambda)$ met \mathcal{V}_Λ .

Definitie 3.10. Een *geïmproviseerd Voronoi gebied* is een Voronoi gebied waarbij telkens maar één punt van elk paar diametraal gelegen Voronoi punten tot het gebied behoort.

Definitie 3.11. De *overdekkingsstraal* van Λ is $\rho_\Lambda = \max\{\|x\| : x \in \mathcal{V}_\Lambda\}$ en de *overdekkingsdiameter* van Λ is $\max\{\|x - y\| : x, y \in \mathcal{V}_\Lambda\} = 2\rho_\Lambda$.

Definitie 3.12. Een *convex omhulsel* van X is de kleinste convexe verzameling die X bevat.

Definitie 3.13. De *minimum afstand* $d(\mathcal{V}_\Lambda - \Gamma)$ is de kleinste afstand tussen \mathcal{V}_Λ en $\gamma + \mathcal{V}_\Lambda$ voor $\gamma \in \Gamma$.

Opmerking 3.14. Als $d(\mathcal{V}_\Lambda - \Gamma)$ groter is dan de overdekkingsdiameter, dan hoeven we bij het kleuren van het vlak niet specifiek naar grenspunten van de Voronoi gebieden te kijken. Deze voorwaarde kunnen we ook versoepelen naar $d(\mathcal{V}_\Lambda - \Gamma) \geq 2\rho_\Lambda$ als we van het Voronoi gebied een geïmproviseerd Voronoi gebied maken. Dit komt doordat alle punten in het geïmproviseerde Voronoi gebied altijd op afstand strict minder dan $2\rho_\Lambda$ liggen.

Lemma 3.15. *Als we de geïmproviseerde Voronoi gebieden kleuren volgens de klassen van $\Lambda(\text{mod } \Gamma)$ en $d(\mathcal{V}_\Lambda, \Gamma) \geq 2\rho_\Lambda$, dan is het kleurgetal van de kleuring gelijk aan $|\Lambda/\Gamma| = \text{index van } \Gamma \text{ in } \Lambda$.*

Definitie 3.16. Een vector $\lambda \in \Lambda$ *maakt contact* met \mathcal{V}_Λ als de verzameling $F_\lambda = \{x \in \mathcal{V}_\Lambda \mid d(x, 0) = d(x, \lambda)\}$ niet leeg is.

Voronoi heeft bewezen dat een niet lege F_λ de rand van \mathcal{V}_Λ is, zie [8]. En dus zeggen we dat λ contact maakt met \mathcal{V}_Λ op de rand F_λ .

Definitie 3.17. Een rooster vector λ is *minimaal* als λ de minimale lengte van alle vectoren uit dezelfde klasse van $\Lambda/2\Lambda$ heeft, met andere woorden $\|\lambda\| \leq \|\lambda'\| \forall \lambda' \in \Lambda/2\Lambda$.

In deze paragraaf wordt met een kleuring een rooster-deelrooster kleuring met rooster Λ en deelrooster Γ bedoeld. Verder gaan we ervan uit dat alle Voronoi gebieden geïmproviseerd zijn.

Lemma 3.18. *Als $v \in \mathbb{R}^3$, dan $v \in \mathcal{V}_\Lambda \Leftrightarrow 2(v \cdot \gamma) \leq (\gamma \cdot \gamma)$ voor elke $\gamma \in \Lambda$.*

Bewijs. Neem $v \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
 v \in \mathcal{V}_\Lambda &\iff \forall \lambda' \in \Lambda \quad \|v\| \leq \|v - \lambda'\| \\
 &\iff \forall \lambda' \in \Lambda \quad \sqrt{\sum_{i=1}^n (v_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (v_i - \lambda'_i)^2} \\
 &\iff \forall \lambda' \in \Lambda \quad \sum_{i=1}^n (v_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (v_i - \lambda'_i)^2 \\
 &\iff \forall \lambda' \in \Lambda \quad \sum_{i=1}^n (v_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (v_i^2 - 2v_i\lambda'_i + (\lambda'_i)^2) \\
 &\iff \forall \lambda' \in \Lambda \quad \sum_{i=1}^n (v_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n v_i^2 - \sum_{i=1}^n 2v_i\lambda'_i + \sum_{i=1}^n (\lambda'_i)^2 \\
 &\iff \forall \lambda' \in \Lambda \quad \sum_{i=1}^n 2v_i\lambda'_i \leq \sum_{i=1}^n (\lambda'_i)^2 \\
 &\iff \forall \gamma \in \Lambda \quad 2(v \cdot \gamma) \leq (\gamma \cdot \gamma).
 \end{aligned}$$

□

Lemma 3.19. *Als $v \in \mathbb{R}^3$, dan ligt v op gelijke afstand van 0 en van λ dan en slechts dan als $2(v \cdot \lambda) = (\lambda \cdot \lambda)$.*

Bewijs. Neem $v \in \mathbb{R}^3$.

v ligt op gelijke afstand van 0 en van $\lambda \Leftrightarrow d(v, 0) = d(v, \lambda) \Leftrightarrow \|v - 0\| = \|v - \lambda\|$.
Nu is op dezelfde wijze als bij Lemma 3.18 dit equivalent aan $2(v \cdot \lambda) = (\lambda \cdot \lambda)$ □

Lemma 3.20. *Een vector λ maakt contact met \mathcal{V}_Λ desda λ minimaal is.*

Bewijs. \Rightarrow

Neem aan dat λ contact maakt met \mathcal{V}_Λ .

Stel nu dat λ niet minimaal is.

$$\begin{aligned}
 &\text{Dan volgt } \exists \gamma \in \Lambda \text{ zodanig dat } ((\lambda + 2\gamma) \cdot (\lambda + 2\gamma)) < (\lambda \cdot \lambda) \\
 &\Rightarrow \exists \gamma \in \Lambda \text{ zdd } (\lambda \cdot \lambda) + 2(\lambda \cdot 2\gamma) + (2\gamma \cdot 2\gamma) < (\lambda \cdot \lambda) \\
 &\Rightarrow \exists \gamma \in \Lambda \text{ zdd } 2(\lambda \cdot 2\gamma) + (2\gamma \cdot 2\gamma) < 0 \\
 &\Rightarrow \exists \gamma \in \Lambda \text{ zdd } 4(\lambda \cdot \gamma) + 4(\gamma \cdot \gamma) < 0
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \exists \gamma \in \Lambda \text{ zdd } (\lambda \cdot \gamma) + (\gamma \cdot \gamma) < 0.$$

Maar omdat λ contact maakt met \mathcal{V}_Λ , geldt dat F_λ niet leeg is. Neem nu $v \in F_\lambda$. Dan volgt uit Lemma 3.19 dat $2(v \cdot \lambda) = (\lambda \cdot \lambda)$. Maar ook volgt uit Lemma 3.18 dat $2(v \cdot (\lambda + \gamma)) \leq ((\lambda + \gamma) \cdot (\lambda + \gamma))$ en $2(v \cdot (-\gamma)) \leq (\gamma \cdot \gamma)$.

Uit deze vergelijkingen volgt dan

$$\begin{aligned} 2(v \cdot \lambda) &= 2(v \cdot (\lambda + \gamma)) + 2(v \cdot (-\gamma)) \\ &\leq ((\lambda + \gamma) \cdot (\lambda + \gamma)) + (\gamma \cdot \gamma) \\ &= (\lambda \cdot \lambda) + 2(\lambda \cdot \gamma) + (\gamma \cdot \gamma) + (\gamma \cdot \gamma) \\ &= (\lambda \cdot \lambda) + 2(\lambda \cdot \gamma) + 2(\gamma \cdot \gamma) \\ &< (\lambda \cdot \lambda). \end{aligned}$$

Maar dit is in tegenspraak met Lemma 3.19. Dus volgt dat λ minimaal moet zijn.

←

Neem aan dat λ minimaal is.

Stel dat λ geen contact maakt met \mathcal{V}_Λ , dan geldt dat $F_\lambda = \emptyset$. Dus er is geen $v \in \mathcal{V}_\Lambda$ zodanig dat $d(v, 0) = d(v, \lambda)$. Maar dan is $\frac{1}{2}\lambda \notin \mathcal{V}_\Lambda$.

$$\text{Dan volgt uit Lemma 3.18 dat } \exists \gamma \in \Lambda \text{ zodanig dat } 2(\frac{1}{2}\lambda \cdot \gamma) > (\gamma \cdot \gamma)$$

$$\Rightarrow \exists \gamma \in \Lambda \text{ zdd } (\lambda \cdot \gamma) > (\gamma \cdot \gamma)$$

$$\Rightarrow \exists \gamma \in \Lambda \text{ zdd } 0 > -(\lambda \cdot \gamma) + (\gamma \cdot \gamma)$$

$$\Rightarrow \exists \gamma \in \Lambda \text{ zdd } 0 > (-\lambda \cdot \gamma) + (\gamma \cdot \gamma).$$

Verder geldt:

$$\begin{aligned} ((\lambda - 2\gamma) \cdot (\lambda - 2\gamma)) &= (\lambda \cdot \lambda) + 4(-\lambda \cdot \gamma) + 4(\gamma \cdot \gamma) \\ &= (\lambda \cdot \lambda) + 4((-\lambda \cdot \gamma) + (\gamma \cdot \gamma)) \\ &< (\lambda \cdot \lambda). \end{aligned}$$

Dus $(\lambda \cdot \lambda) > ((\lambda - 2\gamma) \cdot (\lambda - 2\gamma))$.

Dit is in tegenspraak met λ maximaal is. Dus volgt dat λ contact maakt met \mathcal{V}_Λ . □

Opmerking 3.21. Voronoi [8] heeft bewezen dat er geldt: $\lambda \in \Lambda$ maakt contact met \mathcal{V}_Λ op een $(n - 1)$ dimensionale rand dan en slechts dan als er precies één minimale vector equivalent aan $\lambda(\text{mod}2\Lambda)$ is, namelijk $-\lambda$.

Definitie 3.22. Een *generiek rooster* is een rooster waar het Voronoi gebied $2(2^n - 1)$ randen heeft. Iedere klasse van de 2^n klassen van $\Lambda/2\Lambda$ heeft namelijk één paar klasserepresentatoren, behalve de klasse $0 + \Lambda$.

Lemma 3.23. \mathbb{R}^3 gekleurd met een generiek rooster Λ vereist minstens 15 kleuren om de afstand $2\rho_\Lambda$ uit te sluiten.

Bewijs. Voor twee willekeurige Voronoi gebieden die contact maken met \mathcal{V}_Λ geldt: óf ze liggen minder dan $2\rho_\Lambda$ van elkaar óf beide gebieden maken contact met \mathcal{V}_Λ op de Voronoi punten v en $-v$. De punten v en $-v$ liggen op afstand ρ_Λ van de oorsprong en diametraal tegenover elkaar. Omdat het geïmproviseerde Voronoi gebieden zijn geldt dus dat alle Voronoi gebieden die contact maken met \mathcal{V}_Λ op afstand $< 2\rho_\Lambda$ van elkaar liggen. Dus zijn er voor de 14 randen van dimensie 2 van \mathcal{V}_Λ allemaal verschillende kleuren nodig. Verder is er voor \mathcal{V}_Λ ook een aparte kleur nodig. Dus uiteindelijk zijn er $14 + 1 = 15$ kleuren nodig. \square

Lemma 3.24. \mathbb{R}^3 gekleurd met een willekeurig rooster Λ vereist minstens 15 kleuren om de afstand $2\rho_\Lambda$ uit te sluiten.

Bewijs. Neem twee willekeurige vectoren die contact maken met \mathcal{V}_Λ . Dan geldt dat als de vectoren of op afstand $\geq 2\rho_\Lambda$ liggen dan maken de twee vectoren contact met \mathcal{V}_Λ op Voronoi punten die op afstand $2\rho_\Lambda$ van elkaar liggen. Noem deze vectoren λ en $-\lambda$. De Voronoi punten zijn geen 2-dimensionale zijden en dan geldt volgens Voronoi [8] dat λ en $-\lambda$ in een minimale verzameling met meer dan twee elementen zitten. We kunnen nu de gebieden $\lambda + \mathcal{V}_\Lambda$ en $-\lambda + \mathcal{V}_\Lambda$ dezelfde kleur geven. Maar toch hebben we minimaal 2 kleuren nodig om de minimale verzameling te kleuren. En zo volgt dat voor klasse $0 + \mathcal{V}_\Lambda$ één kleur nodig hebben en voor alle andere 7 klassen minstens 2 kleuren. \square

Definitie 3.25. Een lijnstuk heet *lokaal maximaal* in \mathcal{V}_Λ als het lijnstuk geheel in \mathcal{V}_Λ ligt en kleine veranderingen binnen \mathcal{V}_Λ de lengte van het lijnstuk niet groter maken.

Lemma 3.26. Een lijnstuk in \mathcal{V}_Λ is lokaal maximaal dan en slechts dan als de uiteinden van het lijnstuk op diametraal gelegen Voronoi punten van \mathcal{V}_Λ liggen.

Bewijs. De verzameling van afstanden tussen de eindpunten $\{u = v - w : v, w \in \mathcal{V}_\Lambda\}$ is gelijk aan $2\mathcal{V}_\Lambda$. Deze verzameling bevat het element $2v$. Dit is uniek verkregen door het verschil van diametraal gelegen Voronoi punten v en $-v$. \square

Stelling 3.27. Als \mathbb{R}^3 gekleurd is met een willekeurig rooster Λ , dan zijn er minimaal 15 kleuren nodig om een afstand uit te sluiten.

Bewijs. Veronderstel dat we \mathbb{R}^3 kleuren met minder dan 15 kleuren. Dan zijn er twee Voronoi gebieden $\lambda_1 + V_\Lambda$ en $\lambda_2 + V_\Lambda$ met $(\lambda_1 - \lambda_2 \in \Gamma)$ die noodzakelijk dezelfde kleur hebben, zeg kleur 1, en contact maken met V_Λ , welke kleur 0 heeft. We kiezen λ_1 en λ_2 zodat ze niet op diametraal gelegen punten contact maken met V_Λ . Nu bekijken we de lijn die door de centra van de contactvlakken van \mathcal{V}_Λ , $\lambda_1 + \mathcal{V}_\Lambda$ en $\lambda_2 + \mathcal{V}_\Lambda$ gaat. Laat nu l de lengte van een van de Voronoi gebieden zijn. De lengte van het lijnstuk is binnen alle Voronoi gebieden hetzelfde. De enige

mogelijke uitgesloten afstanden zijn oneven veelvouden van l oftewel $(2m + 1)l$ met $m \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Nu gaan we \mathbb{R}^3 samentrekken door x naar $x/(2m + 1)$ te sturen. De eindpunten van de lijn zien eruit zoals bij de grenzen van \mathcal{V}_Λ .

Het lijnstuk kan microscopisch verkleind worden zodat beide uiteinden dezelfde kleur krijgen. Verder geldt dat als de eindpunten niet diametraal tegenover elkaar liggende punten van \mathcal{V}_Λ zijn, de lijn niet lokaal maximaal is in \mathcal{V}_Λ . Maar dan kunnen we de lijn microscopisch verlengen, zodat de eindpunten dezelfde kleur hebben. Door de continuïteit van de lijn blijft de lengte van de lijn hetzelfde en hebben de uiteinden dezelfde kleur. Dan kan worden geconcludeerd dat we minimaal 15 kleuren nodig hebben om \mathbb{R}^3 te kleuren om een afstand uit te sluiten. \square

3.3 Bovengrens voor kleurgetal van \mathbb{R}^3

Om aan te tonen dat de bovengrens voor het kleurgetal van \mathbb{R}^3 15 is [3], zullen we expliciet deze kleurig geven en aantonen dat deze voldoet.

Stelling 3.28. \mathbb{R}^3 is net te kleuren met 15 kleuren.

Bewijs. Nu definiëren we het rooster Λ in \mathbb{R}^3 als het \mathbb{Z} -opspansel van de basis $\{(2, 3, 0), (-2, 0, 3), (2, -3, 0)\}$.

We gaan \mathbb{R}^3 vullen met Voronoi gebieden van het rooster Λ , maar eerst moeten we deze gaan definiëren. We definiëren de groep G bestaande uit het teken van de coördinaten veranderen en de tweede en derde coördinaten omwisselen van de vectoren $(0, 5/6, 13/6)$, $(1, 3/2, 3/2)$, $(2, 5/6, 5/6)$. De groep G heeft dus 24 elementen. Het Voronoi gebied van Λ om de oorsprong is het convexe omhulsel gegenereerd door de drie vectoren $(0, 5/6, 13/6)$, $(1, 3/2, 3/2)$, $(2, 5/6, 5/6)$ onder de groep G . De overdekkingsdiameter van dit Voronoi gebied is $2\rho_\Lambda$ met

$\rho_\Lambda = \max \{ \|x\| : x \in (0, 5/6, 13/6), (1, 3/2, 3/2), (2, 5/6, 5/6) \}$. Dus

$$\rho_\Lambda = \sqrt{1^2 + \frac{3^2}{2} + \frac{3^2}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{22}, \text{ maar dan is de overdekkingsdiameter } \sqrt{22}.$$

Neem nu het deelrooster Γ opgespannen door $(6, 6, 3)$, $(-6, -3, 6)$ en $(6, -6, -3)$. Omdat $(6, 6, 3) = 3(2, 3, 0) + 1(-2, 0, 3) + 2(2, -3, 0)$, $(-6, -3, 6) = -1(2, 3, 0) + 2(-2, 0, 3)$ en $(6, -6, -3) = -1(-2, 0, 3) + 2(2, -3, 0)$ geldt dat we de matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

hebben. De determinant van deze matrix is 15 en dus is de index van Γ in Λ 15. Dan volgt uit Lemma 3.15 dat als de Voronoi gebieden omgezet worden naar geïmproviseerde Voronoi gebieden en $d(\mathcal{V}_\Lambda - \Gamma) \geq 2\rho_\Lambda$ het kleurgetal van \mathbb{R}^3 15 is. We maken dan ook geïmproviseerde Voronoi gebieden van de Voronoi gebieden door consequent één van de diametraal gelegen Voronoi punten tot het gebied te

rekenen.

Nu kunnen we Γ ook schrijven als de rechthoekrooster R met de basis $(12, 0, 0), (0, 3, 9), (0, -9, 3)$ met de translatie $(6, -3, 6) + R$. Verder geldt ook dat de translatie $(6, -3, 6) + R$ alle Voronoi gebieden van R bevat.

De vectoren met de kleinste lengte ($\neq 0$) in Γ zijn $\pm(6, 6, 3), \pm(-6, -3, 6), \pm(6, -6, -3), \pm(-6, 3, -6)$. De lengte van deze vectoren is 9. De één na langste vectoren zijn $\pm(0, 3, 9)$ en $\pm(0, -9, 3)$ met lengte $3\sqrt{10}$.

Neem nu $\gamma' = (6, 6, 3)$. We gaan nu laten zien dat γ' en $\gamma' + V_\Lambda$ op afstand $\sqrt{\frac{389}{17}}$ van elkaar liggen. Als dit zo is dan geldt namelijk dat de afstand tussen γ' en $\gamma' + V_\Lambda$ groter is dan de overdekkingsdiameter.

Neem nu de vector $v = (\frac{26}{17}, \frac{39}{34}, \frac{39}{34})$. We kunnen makkelijk nagaan dat $v \in V_\Lambda$. Verder hebben we $u = ((6, 6, 3) - (\frac{26}{17}, \frac{39}{34}, \frac{39}{34})) \in \gamma' + V_\Lambda$. De afstand tussen v en u is $\sqrt{\frac{389}{17}}$.

Neem nu de vector $w = (50, 63, 12)$ en maak de vlakken $(x \cdot w) = \frac{325}{2}$ en $(x \cdot w) = \frac{1103}{2}$. Nu kunnen we nagaan door uit ieder vlak een punt te nemen dat de afstand tussen beide vlakken $\sqrt{\frac{389}{17}}$ is. Verder geldt dat voor alle $x \in \mathcal{V}_\Lambda$ $(x \cdot w) \leq \frac{325}{2}$ en voor alle $y \in \lambda + \mathcal{V}_\Lambda$ geldt $(x \cdot w) \geq \frac{1103}{2}$. Er geldt dat \mathcal{V}_Λ en $\gamma + \mathcal{V}_\Lambda$ met de kleinste niet-triviale $\gamma \in \Gamma$ altijd $\sqrt{\frac{389}{17}}$, omdat alle kortste niet-triviale vectoren in Γ equivalent onder G zijn. Nu gaan we kijken naar de volgende laag van vectoren in Γ , deze liggen op afstand $3\sqrt{10}$ van de oorsprong. Als λ zo'n vector is dan geldt dat \mathcal{V}_Λ en $\lambda + \mathcal{V}_\Lambda$ op minstens afstand $3\sqrt{10} - \sqrt{22} > \sqrt{\frac{389}{17}}$ liggen. Dus de afstanden in het interval $(\sqrt{22}, \sqrt{\frac{389}{17}})$ zijn uitgesloten in de 15-kleuring. Door herschalen hebben punten op de afstanden in het interval $(1, \sqrt{\frac{389}{22 \cdot 17}})$ niet dezelfde kleur. \square

Hoofdstuk 4

Kleurgetal van \mathbb{R}^n

Ook voor \mathbb{R}^n voor alle $n > 1$ hebben we een ondergrens en minimale bovengrens voor het kleurgetal. Deze grenzen laten echter wel heel veel mogelijkheden voor het kleurgetal over.

4.1 Ondergrens voor kleurgetal van \mathbb{R}^n

De best bekende ondergrens voor het kleurgetal van \mathbb{R}^n met $n > 1$ is momenteel $n + 2$, zie [6].

We kunnen dit bewijzen door de laten zien dat als we \mathbb{R}^n in $n + 1$ verzamelingen verdelen er een verzameling is waar alle afstanden in voor komen. Dit laat namelijk zien dat als we $n + 1$ kleuren gebruiken de kleuring niet net is.

Stelling 4.1. Als $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i$ voor $n > 1$ met $A_i \cap A_j = \emptyset$ met $i \neq j$ en $i, j \in \{1, \dots, n + 1\}$, dan is er een A_i die alle afstanden d ($0 < d < \infty$) bevat.

Definitie 4.2. Neem $n + 1$ punten $u_0, \dots, u_k \in \mathbb{R}^n$ waarvoor geldt dat $u_1 - u_0, \dots, u_k - u_0$ lineair onafhankelijk zijn. Een simplex is dan de verzameling punten

$$C = \{\lambda_0 u_0 + \dots + \lambda_k u_k \mid \lambda_i \geq 0, 0 \leq i \leq k, \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1\}.$$

Definitie 4.3. Een verzameling $V(\alpha, \beta, d)$ met $n + 2$ punten in \mathbb{R}^n is een spindel met beginpunt α , eindpunt β en zijde met lengte d als alle punten aan de volgende voorwaarden voldoen:

- α en β zijn verschillende punten van de verzameling $V(\alpha, \beta, d)$,
- ieder punt van $V(\alpha, \beta, d)$ behalve β is een punt van het simplex met zijden met lengte d ,

- ieder punt van $V(\alpha, \beta, d)$ behalve α is een punt van een andere simplex met zijden met lengte d .

We kunnen altijd een spindel $V(\alpha, \beta, d)$ in \mathbb{R}^n maken door een punt van een simplex met zijden van lengte d te spiegelen in \mathbb{R}^{n-1} gedefinieerd door de overige punten van de simplex.

Definitie 4.4. Een vereniging $S(\alpha, d)$ van twee spindels $V(\alpha, \beta, d)$ en $V(\alpha, \gamma, d)$ heet een *sonde* als de afstand tussen β en γ precies d is en als het enige punt dat de twee spindels gezamenlijk hebben α is.

Iedere sonde bestaat uit $2(n+1) - 1 = 2n + 1$ punten.

Lemma 4.5. *Voor elk drietal punten uit $S(\alpha, d)$ geldt dat er altijd twee punten op afstand d van elkaar liggen.*

Bewijs. Neem $S(\alpha, d) = V(\alpha, \beta, d) \cup V(\alpha, \gamma, d)$. Maak nu de verzamelingen B bestaande uit alle punten van $V(\alpha, \beta, d)$ zonder α en β en de verzameling C van $V(\alpha, \gamma, d)$ zonder α en γ .

Neem nu drie verschillende punten a_1, a_2 en $a_3 \in S(\alpha, d)$. Nu gaan we verschillende situaties onderscheiden:

- een van de punten is α . We kunnen dan zeggen dat $a_1 = \alpha$. Ook nu kunnen we verschillende situaties onderscheiden:
 - a_2 of a_3 is een punt van de verzameling $B \cup C$.
De afstand tussen het punt uit $B \cup C$ en a_1 is d .
 - a_2 en a_3 zijn geen punten van de verzameling $B \cup C$.
Dan moet gelden dat $a_2 = \beta$ en $a_3 = \gamma$ of precies andersom. Maar dan is de afstand tussen a_2 en a_3 gelijk aan d .
- geen van de punten is α . Ook nu kunnen we weer verschillende situaties onderscheiden:
 - a_1, a_2 en $a_3 \in B \cup C$. Dan moet gelden dat er minstens twee elementen a_i van B of van C zijn. En dan is het duidelijk dat de afstand tussen deze twee elementen d is.
 - $a_i \notin B \cup C$. Zeg $a_1 \notin B \cup C$. Dan geldt dat:
 - * $a_1 = \beta$. In dit geval geldt dat:
 - $a_j \in B \cup \gamma$ voor $j = 2$ of 3 . Nu geldt dat de afstand tussen a_1 en a_j d is.
 - a_2 en $a_3 \in C$. Dan geldt dat de afstand tussen a_2 en a_3 d is.
 - * of $a_1 = \gamma$. Dit gaat identiek aan het geval dat $a_1 = \beta$.

□

Lemma 4.6. *Zij $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Er bestaat geen rijtje van begrensde functies $f_i(r)$ met $i = 1, \dots, k$ gedefinieerd op \mathbb{R}^n en een rijtje van punten a_1, a_2, \dots, a_k in \mathbb{R}^n zodat voor elke $r \in \mathbb{R}^n$,*

$$\sum_{i=1}^k \{f_i(r) - f_i(r - a_i)\} \geq 1. \quad (4.1)$$

Bewijs. Neem aan dat er wel zo'n rijtje van begrensde functies bestaat. Noem dan $M = \max_{i=1, \dots, k} \sup_{r \in \mathbb{R}^n} |f_i(r)|$.

We bekijken voor $l \in \mathbb{N}_{>0}$ de som

$$S(l) = \sum_{m_1=1}^l \dots \sum_{m_k=1}^l \sum_{i=1}^k \{f_i(r(m)) - f_i(r(m) - a_i)\} \quad (4.2)$$

met $r(m) = m_1 a_1 + \dots + m_k a_k$. Vanwege de aanname (4.1) geldt dat $S(l) \geq l^k$. Maar we weten ook dat geldt:

$$\begin{aligned} & \sum_{m_i=1}^l \{f_i(r + m_i a_i) - f_i(r + (m_i - 1) a_i)\} \\ &= f_i(r + a_i) - f_i(r + 0 \cdot a_i) + f_i(r + 2a_i) - f_i(r + a_i) - \dots + f_i(r + l \cdot a_i) \\ &= -f_i(r + 0 \cdot a_i) + f_i(r + l \cdot a_i) \\ &= f_i(r + l \cdot a_i) - f_i(r) \\ &\leq 2M. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Als we nu $r(m)$ in formule (4.2) vervangen door $r_i(m) + m_i a_i$ en vergelijking (4.3) toepassen krijgen we:

$$\begin{aligned} S(l) &= \sum_{m_1=1}^l \dots \sum_{m_k=1}^l \sum_{i=1}^k \{f_i(r_i(m) + m_i a_i) - f_i(r_i(m) + (m_i - 1) a_i)\} \\ &= \sum_{m_1=1}^l \dots \sum_{m_{i-1}=1}^l \sum_{m_{i+1}=1}^l \dots \sum_{m_k=1}^l \sum_{i=1}^k \{f_i(r_i(m) + l \cdot a_i) - f_i(r_i(m))\} \\ &\leq 2kl^{k-1}M \end{aligned}$$

Voor $l > 2klM$ geldt dat $S(l) \leq (2klM)^k$ is. Maar dat is in tegenspraak met de uitspraak dat $S(l) \geq l^k$. \square

Bewijs van stelling 4.1. Neem aan dat er geen A_i is die alle afstanden d bevat. Dus met andere woorden, dat voor alle $i = 1, \dots, n + 1$ er een d_i te vinden is zodat de afstand tussen twee willekeurige punten nooit d_i is. Maak nu voor iedere i een

sonde $S(0, d_i)$. De punten van $S(0, d_i)$ noemen we a_{ij} met $j = 1, \dots, 2n + 3$. Definieer nu de functies $f_{ij}(r)$ voor $i = 1, \dots, n + 1$ en $j = 1, \dots, 2n + 3$ door

$$f_{ij}(r) = \begin{cases} 0 & r + a_{ij} \in A_i \\ 1 & \text{anders.} \end{cases}$$

Neem nu een vaste i . Uit de aanname volgt dat de punten $r + a_{ij}$ een sonde $S_i(r, d_i)$ vormen. Stel dat er drie nullen tussen de $2n + 3$ waarden van $f_{ij}(r)$ zijn. Dan zijn er minimaal drie elementen $r + a_{ij}$ van A_i . Maar dan volgt uit Lemma 4.5 dat er twee punten op afstand d_i van elkaar liggen. Dit is in tegenspraak met onze aanname. Er kunnen dus maximaal twee nullen tussen de waarden van $f_{ij}(r)$ zijn. Maar hieruit volgt dat er minimaal $(n + 1)(2n + 1)$ enen zijn en dat

$$\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{2n+3} f_{ij}(r) \geq (n + 1)(2n + 1).$$

Neem nu een vaste j . Er geldt dat $f_{ij}(r - a_{ij}) = 0 \Leftrightarrow r - a_{ij} + a_{ij} \in A_i \Leftrightarrow r \in A_i$. Dus is er één nul en n enen onder de waarden van $f_{ij}(r - a_{ij})$ voor $i = 1, \dots, n + 1$.

Dan volgt dat $\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{2n+3} f_{ij}(r - a_{ij}) \geq n(2n + 3)$.

Uit deze twee vergelijkingen volgt

$$\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{2n+3} f_{ij}(r) - f_{ij}(r - a_{ij}) \geq (n + 1)(2n + 1) - n(2n + 3) = 1.$$

Het is duidelijk dat de functies $f_{ij}(r)$ begrensd zijn. Maar dan hebben we nu een tegenspraak met Lemma 4.6. \square

Voor $n > 1$ is de ondergrens voor het kleurgetal van \mathbb{R}^n dus $n + 2$.

Voor $n = 2$ is de best bekende ondergrens 4 zoals uit deze stelling volgt, maar voor $n = 3$ hebben we een betere ondergrens gevonden.

4.2 Bovengrens voor kleurgetal van \mathbb{R}^n

Er zijn voor de bovengrens voor het kleurgetal van \mathbb{R}^n minimaal $2^{n+1} - 1$ kleuren nodig. Het bewijs gaat op identieke wijze als het bewijs bij \mathbb{R}^3 . Zie dan ook voor het complete bewijs het artikel van Coulson [3].

Literatuurlijst

- [1] Bruijn, N. G. De, & Erdős, P. (1951). A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations. *Konink. Nederl. Akademie van Wetenschappen*, 13(5).
- [2] Conway, J.H., & Sloane, N.J.A. (1988) *Sphere packings, lattices and groups*. New York: Springer-Verlag.
- [3] Coulson, D. (2002). A 15-coloring of 3-space omitting distance one. *Discrete Mathematics*, 2002, 83-90
- [4] Natanson, I.P. (1955) *Theory of functions of a real variable*. New York: Frederick Ungar Publishing Co.
- [5] Nechushtan, O. (2002). On the space chromatic number. *Discrete Mathematics*, 256, 499-507
- [6] Raiskii, D.E. (1970). Realization of all distances in a decomposition of the space \mathbb{R}^n into $n + 1$ parts. *Math. notes* (1970(7)), 194-196
- [7] Soifer, A. (2009). *The mathematical coloring book*. New York: Springer.
- [8] Voronoi, G.F. (1908) Recherches sur les paralleloedres primitifs (Part 1). *J. Reine Angew. Math*, 1908, (134), 198-287
- [9] Woodall, D.R. (1971). Distances realized by sets covering the plane*. *Journal of combinatorial theory*, 1973, (14), 187-200