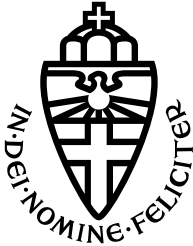


RADBOUD UNIVERSITEIT NIJMEGEN



FACULTEIT DER NATUURWETENSCHAPPEN, WISKUNDE EN INFORMATICA

Connectieve constante

BIJ LADDER FIGUUR EN HEXAGONAAL ROOSTER

BACHELORSRIPTIE WISKUNDE

Auteur:
Roy WILLEMS

Begeleider:
dr. ir. Henk DON

Tweede lezer:
Wieb BOSMA

Mei 2022

Inhoudsopgave

1	Inleiding	2
1.1	Introductie	2
1.2	Overzicht	2
1.3	Benodigde definities	3
2	Programmeren	4
3	Connectieve constante van het ladder figuur	6
3.1	Inleiding	6
4	Connectieve constante van hexagonaal figuur	16
4.1	Inleiding	16
4.2	Bewijs van de stelling	19
5	Conclusie	28
6	Bronnenlijst	29

1 Inleiding

1.1 Introductie

In deze scriptie wordt gekeken naar het aantal paden van een lengte, n , in specifieke grafen. Deze specifieke grafen zijn oneindige roosters. De factor tussen het aantal paden van lengte n en lengte $n + 1$ zal bij deze roosters naar een constante gaan als n naar oneindig gaat. Deze constante noemen we de connectieve constante van deze specifieke graaf.

De connectieve constante wordt vooral gebruikt bij percolatie. Bij percolatie zijn alle lijnen uit een rooster met een bepaalde kans p aanwezig en met kans $1 - p$ niet aanwezig. Vervolgens kan gekeken worden of vanuit een vast startpunt een oneindig lang pad gemaakt kan worden. Het moment dat de kans op het aanwezig zijn van een oneindig pad groter is dan 0 wordt de kritieke waarde genoemd. De kans dat een oneindig pad aanwezig is hangt af van p .

Met de connectieve constante kan iets over de kritieke waarde worden gezegd. In sommige gevallen kan de kritieke waarde exact worden bepaald met de connectieve constante. Als dit niet het geval is, dan kan er een bovengrens worden berekend met behulp van de connectieve constante.

1.2 Overzicht

Mocht nog enige voorkennis ontbreken, dan zijn alle benodigde definities, welke niet in de volgende hoofdstukken staan, opgenomen in paragraaf 1.3. Dit is vooral bedoeld als een korte opfrissing.

Om een idee te krijgen hoe de connectieve constante eruit ziet en hoe snel de factor naar deze constante gaat zijn twee programma's geschreven. Een programma voor het vierkants rooster en een programma voor het ladder figuur. De informatie hierover is te vinden in hoofdstuk 2.

Aangezien een bekende constante (gulden snede) uit het programma voor het ladderfiguur leek te komen, ben ik dit gaan bewijzen.. Dit bewijs en het idee ervan is zelf bedacht en is te vinden in hoofdstuk 3.

Als laatste is het bewijs van de connectieve constante van de hexagonaal rooster, geschreven door H. Duminil-Copin and S. Smirnov, bestudeerd en op sommige punten aangevuld. Het heeft dertig jaar om geduurd het vermoeden van B. Nienhuis voor de connectieve constante te bewijzen.

1.3 Benodigde definities

Definitie 1.1. Een **graaf** G is een paar (V, E) , waarbij V een eindige verzameling van punten is. E is de verzameling van paren $\{u, v\}$ met $u, v \in V$ waartussen een lijn loopt.

Definitie 1.2. Twee punten $u, v \in V$ in een graaf $G = (V, E)$ heten **verbonden** als het paar $\{u, v\}$ een lijn vormt. Als u en v verbonden zijn, dan heet v een **buur** van u .

Definitie 1.3. Een **wandeling** in een graaf $G = (V, E)$ is een rij punten:

$$(v_0, v_1, \dots, v_k)$$

zodanig dat v_{i-1} en v_i verbonden zijn, voor elke $i = 1, \dots, k$

Definitie 1.4. Een **pad** in een graaf $G = (V, E)$ is een wandeling met $v_i \neq v_j, \forall i \neq j$. De lengte, $l(\gamma)$, van een pad is het aantal punten die γ tegenkomt.

Definitie 1.5. Zij $G = (V, E)$ een graaf

- $A_{n,x}$ is de verzameling van alle paden van lengte n startend vanuit een vast punt x .
- $c_{n,x} = |A_{n,x}|$ is het aantal paden startend vanuit een vast punt x .

Opmerking. In een rooster is $c_{n,x}$ onafhankelijk van het startpunt x . Vanaf nu wordt c_n het aantal paden an lengte n .

Lemma 1.6. Zij $G = (V, E)$ een graaf, dan geldt $c_{n+m} \leq c_n c_m, \forall n, m \in \mathbb{N}$

Bewijs. Uit de defintie van c_n volgt $c_{n+m} = |A_{n+m}|$.

Neem een pad $p \in A_{n+m}$, dit is een pad van lengte $n+m$. 'Knip' dit pad in twee stukken van lengtes n en m . Hieruit volgen twee nieuwe paden, een pad van lengte n en een pad van lengte m . Dus geldt $v \in A_n A_m$. Daaruit volgt $A_{n+m} \subseteq A_n A_m$.

Dus geldt $c_{n+m} \leq c_n c_m, \forall n, m \in \mathbb{N}$. □

Merk op:

Hieruit volgt: $c_n \leq c_{n-1} c_1 \leq c_{n-2} c_1^2 \leq \dots \leq c_1^n$

Dus geldt: $0 \leq c_n^{\frac{1}{n}} \leq c_1$

Definitie 1.7. Een rij $c_n, n \geq 1$ is subadditief als het voldoet aan de volgende ongelijkheid:

$$c_{n+m} \leq c_n + c_m$$

Lemma 1.8. (Fekete's Lemma) Voor elke subadditieve rij $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, het limiet $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{n}$ bestaat.

Met behulp van Lemma 1.6 verkrijgen we dat de rij $\{\log(c_n)\}_{n=1}^{\infty}$ subadditief is. Dus volgt met Fekete's Lemma dat een limiet $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(c_n)}{n}$ bestaat met $l = \log(\mu)$.

$$\log(\mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(c_n)}{n}$$

$$\log(\mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \log(c_n^{\frac{1}{n}})$$

$$\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n^{\frac{1}{n}}$$

Definitie 1.9. De connectieve constante, μ , is

$$\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n^{\frac{1}{n}}$$

2 Programmeren

Allereerst is een programma geschreven in python. Dit programma berekent het aantal paden van lengte n in een ladder rooster. De definitie voor de laddergraaf is te vinden in Definitie 3.1. De uitkomsten staan in de tabel hieronder gegeven.

Lengte Pad (n)	Aantal paden	$\frac{\text{Aantal paden}(n)}{\text{Aantal paden}(n-1)}$
0	1	-
1	3	3
2	6	2
3	12	2
4	20	1.6667
5	36	1.8
6	58	1.6111
7	100	1.7241
8	160	1.6
9	268	1.675
10	430	1.6045
11	708	1.6465
12	1140	1.6012
13	1860	1.6316
14	3002	1.6140
15	4876	1.6243
16	7880	1.6161
17	12772	1.6208
18	20654	1.6171
19	33444	1.6193
20	54100	1.6176
21	87564	1.6186
22	141666	1.6179
23	229252	1.6183
24	370921	1.6180

Uit de gegevens voor het ladder rooster kan iets worden voorspeld. Na het begin alterneert de factor telkens om 1.6180 heen, waarbij de factor steeds dichterbij 1.6180 komt. De hypothese is dat de connectieve constante van het ladder figuur de gulden snede is, waarbij de gulden snede het getal $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = 1.6180339887\dots$ is. Dit wordt verderop in deze scriptie bewezen.

Daarnaast is nog een ander programma geschreven in python. Dit programma berekent het aantal zelfontwikkende paden van lengte n in een vierkanten rooster. Aangezien het een vierkant rooster is, geldt dat alle paden geroteerd kunnen worden over 90 graden. Dit leidt naar een ander pad. Vanaf het startpunt kunnen dus alleen de paden genomen worden die naar rechts gaan. De rest kan worden berekend door het aantal paden die naar rechts starten te vermenigvuldigen met 4. Aangezien de factor het belangrijkste is, staan in de tabel de resultaten die gegeven zijn door python. Dit betekent dat het aantal paden nog vermenigvuldigt moet worden met 4, behalve de paden van lengte 0. De uitkomsten staan in de tabel hieronder gegeven.

Lengte Pad (n)	Aantal paden	$\frac{\text{Aantal paden}(n)}{\text{Aantal paden}(n-1)}$
0	1	-
1	1	1
2	3	3
3	9	3
4	25	2.7778
5	71	2.84
6	195	2.7465
7	543	2.7846
8	1479	2.7238
9	4067	2.7498
10	11025	2.7108
11	30073	2.7277
12	81233	2.7012
13	220375	2.7129
14	593611	2.6936
15	1604149	2.7024
16	4311333	2.6876

Uit de gegevens van het vierkante rooster kan men enkele dingen concluderen. De factor voor paden met even lengte en oneven lengte zijn beide strikt dalend. Daarnaast is het getal waarmee de factor daalt steeds kleiner. Het lijkt dus dat de factor gaat convergeren naar een bepaald getal, wat al bekend is. Uit de tabel is nog niet te concluderen welk getal de connectieve constante gaat worden.

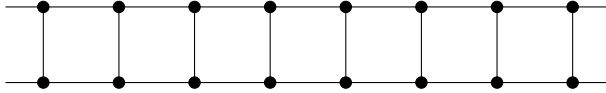
Voor het vierkante rooster is nog geen connectieve constante gevonden en bewezen dat dit de connectieve constante is. Er zijn wel al numerieke benaderingen voor het vierkante rooster.

Aangezien er voor maar twee roosters een bewijs is voor de connectieve constante wordt er aan het einde van deze scriptie gekeken naar het hexagonaal rooster. 30 jaar na het vermoeden van B. Nienhuis is het bewijs pas bedacht. Vandaar dat er in deze scriptie niet verder meer wordt gekeken naar het vierkante rooster, maar wel naar het hexagonaal rooster.

3 Connectieve constante van het ladder figuur

3.1 Inleiding

Voor het ladder is gebruik gemaakt van een ladder die op zijn kant ligt. Deze is weergegeven in onderstaande figuur.

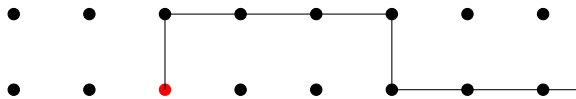


Definitie 3.1. Zij $G = (V, E)$ de laddergraaf waarvoor geldt:

- $V = \{v \mid v \in \mathbb{Z} \times \{0, 1\}\}$
- $E = \{(v, u) \mid |v - u| = 1, v, u \in V\}$

Definitie 3.2. In onderstaande afbeeldingen wordt het startpunt aangegeven met een rood punt. Voor het bewijs zijn de mogelijke paden opgedeeld in de volgende groepen:

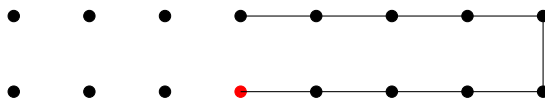
- X_n is het aantal paden van lengte n waarbij niet naar links wordt gegaan.



- $X_{n,k,l}$ is het aantal paden van lengte n die eerst k keer naar rechts gaat, zonder omhoog of omlaag, en dan op het einde exact l keer naar rechts. Met $l, k > 0$.
Let op, hierbij gaat het pad nadat het k keer naar rechts gaan, een lijn omhoog/omlaag en dan minstens $k + 1$ naar links. Indien het pad niet naar links gaat, dan resulteert dat in een pad uit het eerste geval.



- $X_{n,k}$ is het aantal paden van lengte n die beginnen met k keer naar rechts, zonder omhoog of omlaag, daarna minstens k keer naar links en nooit meer naar rechts.



- $\hat{X}_{n,l}$ is het aan aantal paden van lengte n waarbij elk pad begint met naar rechts en daarnaast omhoog/omlaag. Op het einde gaat het pad l keer naar links.



Opmerking. Alle paden worden precies één keer geteld. De volgende waarden worden aangenomen:

- $X_0 = 1$
- $X_{-1} = 1$

Propositie 3.3. *De recursieve formule voor X_n is: $X_n = X_{n-1} + X_{n-2}$ voor $n > 1$*

Bewijs. X_n is het aantal paden van lengte n waarbij niet naar links wordt gegaan. De opties zijn dus naar rechts of omhoog/omlaag. Omhoog of omlaag is altijd maar een optie, aangezien het figuur maar twee lagen heeft.

Naar rechts kan vanaf elk pad van lengte $n - 1$. Dus alle paden die eindigen met naar rechts kunnen gemaakt worden uit de paden van lengte $n - 1$.

Omhoog/omlaag kan alleen als de vorige lijn naar rechts is. Dus de paden, van lengte n , die eindigen met omhoog/omlaag kunnen gemaakt worden uit de paden van lengte $n - 2$. Bij deze paden kan namelijk altijd een lijn naar rechts gezet worden en daarna omhoog/omlaag en dus geïndigd worden met een pad van lengte n met aan het einde een lijn omhoog/omlaag.

Dus geldt: $X_n = X_{n-1} + X_{n-2}$ voor $n > 1$

□

Propositie 3.4. *De recursieve formule voor $X_{n,k,l}$ is:*

$$X_{n,k,l} = X_{n-1,k,l} + X_{n-2,k,l} \text{ voor } l \leq \left\lfloor \frac{n-7}{2} \right\rfloor \text{ en } k \leq \left\lfloor \frac{n-5}{2} \right\rfloor - l$$

Voor $l = \lfloor \frac{n-5}{2} \rfloor$, $k = 1$ en $l = 1$, $k = \lfloor \frac{n-5}{2} \rfloor$ geldt dit niet, maar geldt $X_{n,k,l} = 1$

Bewijs. Voor $X_{n,k,l}$ geldt dat tussendoor ook nog een keer naar links gegaan moet worden, aangezien anders alleen naar rechts wordt gegaan. Dat geval zit al bij het voorgaande geval X_n . Dit betekent dat nadat k naar rechts is gedaan, er omhoog wordt gegaan. Dan verplicht $k + 1$ stappen naar links zet. Op het einde wordt altijd geïndigd met l stappen naar rechts. Daarvoor een omhoog/omlaag. Daar weer voor verplicht $l + 1$ stappen naar links.

Door al deze specificaties zijn al $2l + 2k + 4$ verplichte stappen gezet. Tussen het verplichte begin en verplichte einde kunnen dan nog $n - 2l - 2k - 4$ stappen gezet worden. Deze stappen kunnen alleen naar links en omhoog/omlaag gedaan worden. Naar rechts kan niet meer, aangezien daarna alleen nog maar naar rechts gegaan kan worden en meer lijnen gezet moeten worden dan naar rechts mogelijk is.

X_n is het aantal paden van lengte n waarbij niet naar links gegaan mag worden. Deze paden kunnen worden gespiegeld, wat resulteert in het aantal paden van lengte n waarbij niet naar rechts mag worden gegaan.

Dit kunnen we gebruiken voor de overige $n - 2l - 2k - 4$ stappen en dan krijgen we:

$$X_{n,k,l} = X_{n-2l-2k-4} \text{ voor } l \leq \left\lfloor \frac{n-5}{2} \right\rfloor \text{ en } k \leq \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor - l$$

Het geldt maar voor maximaal deze l en k vanwege de volgende reden:

Er staan al drie lijnen vast, namelijk twee keer omhoog/omlaag en een lijn na het einde van k keer naar links. Dan zijn nog maximaal $k = \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor - l$ opties over voor k en voor $l = \lfloor \frac{n-5}{2} \rfloor$ aangezien k minstens 1 is.

De volgende gelijkheden gelden ook vanwege dezelfde redenatie:

$$X_{n-1,k,l} = X_{n-2l-2k-5} \text{ voor } l \leq \left\lfloor \frac{n-6}{2} \right\rfloor \text{ en } k \leq \left\lfloor \frac{n-4}{2} \right\rfloor - l$$

$$X_{n-2,k,l} = X_{n-2l-2k-6} \text{ voor } l \leq \left\lfloor \frac{n-7}{2} \right\rfloor \text{ en } k \leq \left\lfloor \frac{n-5}{2} \right\rfloor - l$$

Deze begrenzings op l en k zorgen ervoor dat $n - 2l - 2k - 3 \geq -1$.

Omdat geldt: $X_{n-2l-2k-4} = X_{n-2l-2k-5} + X_{n-2l-2k-6}$ volgt hieruit dat geldt:

$$X_{n,k,l} = X_{n-1,k,l} + X_{n-2,k,l} \text{ voor } l \leq \left\lfloor \frac{n-7}{2} \right\rfloor \text{ en } k \leq \left\lfloor \frac{n-5}{2} \right\rfloor - l$$

Voor $l = \left\lfloor \frac{n-5}{2} \right\rfloor$, $k = 1$ en $l = 1$, $k = \left\lfloor \frac{n-5}{2} \right\rfloor$ geldt dit niet.

$$X_{n,k,l} = X_{n-2l-2k-4} = X_{n-2 \cdot (\left\lfloor \frac{n-5}{2} \right\rfloor) - 2 \cdot 1 - 4} = X_{n-2 \cdot \left\lfloor \frac{n-5}{2} \right\rfloor - 6} = X_{n-2 \cdot \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} = 1$$

Ongeacht of n even/oneven is wordt bovenstaand antwoord verkregen. □

Propositie 3.5. *De recursieve formule voor $X_{n,k}$ is:*

$$X_{n,k} = X_{n-1,k} + X_{n-2,k} \text{ voor } k \leq \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor$$

Voor $k = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ geldt dit niet, maar geldt $X_{n, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} = 1$

Bewijs. Voor $X_{n,k}$ dient eerst k keer naar rechts, dan 1 keer omhoog/omlaag en dan $k+1$ keer naar links gegaan te worden. Dit kan maar op een manier. Verder gaan vanaf dit punt mag alleen omhoog/omlaag en naar links. Zodra het pad naar rechts gaat kan het alleen nog maar naar rechts en hoort het bij $X_{n,k,l}$.

Het pad moet na deze verplichte $k+1+k+1=2k+2$ stappen dan nog een pad maken van lengte $n-2k-2$. Dit kan op X_{n-2k-2} mogelijke manieren, aangezien alleen naar links en omhoog/omlaag gegaan mag worden.

Dus geldt:

$$X_{n,k} = X_{n-2k-2} \text{ met } k = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$$

Het geldt maar voor maximaal deze k vanwege de volgende reden:

Er staat al één lijn vast, namelijk één keer omhoog/omlaag. Dan zijn nog maximaal $k = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ opties over voor k .

De volgende gelijkheden gelden ook vanwege dezelfde redenatie:

$$X_{n-1,k} = X_{n-2k-3} \text{ met } k \leq \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor$$

$$X_{n-2,k} = X_{n-2k-4} \text{ met } k \leq \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor$$

Omdat geldt: $X_{n-2k-2} = X_{n-2k-3} + X_{n-2k-4}$ volgt hieruit dat geldt:

$$X_{n,k} = X_{n-1,k} + X_{n-2,k} \text{ voor } k \leq \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor$$

Voor $k \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ geldt dit niet.

$$X_{n,k} = X_{n-2k-2} = X_{n-2 \cdot \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - 2} = X_{n-2 \cdot \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} = 1$$

Ongeacht of n even/oneven is wordt bovenstaand antwoord verkregen. □

Propositie 3.6. *De recursieve formule voor $\hat{X}_{n,l}$ is:*

$$\hat{X}_{n,l} = \hat{X}_{n-1,l} + \hat{X}_{n-2,l} \text{ voor } l \leq \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor$$

Voor $l = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ geldt dit niet, maar geldt $\hat{X}_{n, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} = 1$

Bewijs. Voor $X_{n,l}$ wordt gekeken naar hoe het einde van deze paden eruit ziet. Op het einde van deze paden wordt verplicht l keer naar links gegaan, zonder omhoog/omlaag te gaan. Daarvoor wordt één keer omhoog/omlaag gegaan. Daarvoor wordt $l+1$ keer naar rechts gegaan. Dit kan maar op 1 manier worden gedaan.

Daarvoor kan vanaf het beginpunt onbeperkt naar rechts en omhoog/omlaag gegaan worden, zonder naar links te gaan. Een pad van lengte $n-l-1-(l+1) = n-2l-2$ moet gemaakt worden. Dit kan op X_{n-2l-2} mogelijke manieren.

Dus geldt:

$$\hat{X}_{n,l} = X_{n-2l-2} \text{ met } l = \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor$$

Het geldt maar voor maximaal deze k vanwege de volgende reden:

Er staan al twee lijnen vast, namelijk één keer omhoog/omlaag en één keer naar rechts voor je l keer naar rechts gaat. Indien deze namelijk niet vast worden gezet, dan kan l keer naar rechts, een keer omhoog en dan l keer naar links verkregen worden, waarbij $l = \frac{n-1}{2}$. Maar dit geval hebben we al gehad bij $X_{n,k}$.

Dus zijn er nog maximaal $l = \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor$ opties over voor l .

De volgende gelijkheden gelden ook vanwege dezelfde redenatie:

$$\hat{X}_{n-1,l} = X_{n-2l-3} \text{ met } l \leq \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor$$

$$\hat{X}_{n-2,l} = X_{n-2l-4} \text{ met } l \leq \left\lfloor \frac{n-4}{2} \right\rfloor$$

Omdat geldt: $X_{n-2l-2} = X_{n-2l-3} + X_{n-2l-4}$ volgt hieruit dat geldt:

$$\hat{X}_{n,l} = \hat{X}_{n-1,l} + \hat{X}_{n-2,l} \text{ voor } l \leq \left\lfloor \frac{n-4}{2} \right\rfloor$$

Voor $l \leq \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor$ geldt dit niet.

$$\hat{X}_{n,l} = X_{n-2l-2} = X_{n-2, \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor - 2} = X_{n-2, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \begin{cases} 1 & \text{als } n \text{ even} \\ 2 & \text{als } n \text{ oneven} \end{cases}$$

□

Gevolg 3.6.1. *Het aantal paden van lengte n in de laddergraaf is te berekenen met de*

volgende formule: $c_n = 2 \cdot (X_n + \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{n-5}{2} \rfloor} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor - l} X_{n,k,l} + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} X_{n,k} + \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \hat{X}_{n,l})$

Uit de verdeling van alle paden van definitie 3.2 blijkt dat alle paden zijn gemaakt. Vervolgens dienen alleen alle paden gespiegeld bij deze paden opgeteld te worden. Dit resulteert in de vermenigvuldiging, van alle sommen opgeteld, met 2.

Aangezien in de formule voor c_n afgerond wordt naar onder, is het noodzakelijk om een gevalsonderscheiding te maken voor even en voor oneven n .

Lemma 3.7. *De recursieve formule voor c_n is:*

$$c_n = \begin{cases} c_{n-1} + c_{n-2} + n - 1 & \text{als } n \text{ oneven} \\ c_{n-1} + c_{n-2} + 2 & \text{als } n \text{ even} \end{cases}$$

Bewijs. Oneven:

$$\begin{aligned} Y_n &= 2 \cdot (X_n + \sum_{l=1}^{\frac{n-5}{2}} \sum_{k=1}^{\frac{n-3}{2} - l} X_{n,k,l} + \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} X_{n,k} + \sum_{l=1}^{\frac{n-3}{2}} X_{n,l}) \\ Y_{n-1} &= 2 \cdot (X_n + \sum_{l=1}^{\frac{n-7}{2}} \sum_{k=1}^{\frac{n-5}{2} - l} X_{n-1,k,l} + \sum_{k=1}^{\frac{n-3}{2}} X_{n-1,k} + \sum_{l=1}^{\frac{n-3}{2}} X_{n-1,l}) \\ Y_{n-2} &= 2 \cdot (X_n + \sum_{l=1}^{\frac{n-7}{2}} \sum_{k=1}^{\frac{n-5}{2} - l} X_{n-2,k,l} + \sum_{k=1}^{\frac{n-3}{2}} X_{n-2,k} + \sum_{l=1}^{\frac{n-5}{2}} X_{n-2,l}) \end{aligned}$$

$$Y_n = 2 \cdot (X_n + \sum_{l=1}^{\frac{n-7}{2}} \sum_{k=1}^{\frac{n-5}{2}-l} X_{n,k,l} + \sum_{l=1}^{\frac{n-5}{2}} X_{n, \frac{n-3}{2}-l, l} + \sum_{k=1}^{\frac{n-3}{2}} X_{n,k} + \sum_{l=1}^{\frac{n-5}{2}} X_{n,l} + X_{n, \frac{n-1}{2}} + X_{n, \frac{n-3}{2}})$$

$$Y_n = 2 \cdot (X_{n-1} + X_{n-2} + \sum_{l=1}^{\frac{n-7}{2}} \sum_{k=1}^{\frac{n-5}{2}-l} (X_{n-1,k,l} + X_{n-2,k,l}) + \sum_{l=1}^{\frac{n-5}{2}} X_{n-2, \frac{n-3}{2}-l-2, l-4} \sum_{k=1}^{\frac{n-3}{2}} X_{n,k} + \sum_{l=1}^{\frac{n-5}{2}} X_{n,l} + X_{n-2, \frac{n-1}{2}-2} + X_{n-2, \frac{n-3}{2}-2})$$

$$Y_n = 2 \cdot (X_{n-1} + X_{n-2} + \sum_{l=1}^{\frac{n-7}{2}} \sum_{k=1}^{\frac{n-5}{2}-l} (X_{n-1,k,l} + X_{n-2,k,l}) + \sum_{l=1}^{\frac{n-5}{2}} X_{n-(n-3-2l)-2, l-4} + \sum_{k=1}^{\frac{n-3}{2}} (X_{n-1,k} + X_{n-2,k}) + \sum_{l=1}^{\frac{n-5}{2}} (X_{n-1,l} + X_{n-2,l}) + X_{n-(n-1)-2} + X_{n-(n-3)-2})$$

$$Y_n = 2 \cdot (X_{n-1} + X_{n-2} + \sum_{l=1}^{\frac{n-7}{2}} \sum_{k=1}^{\frac{n-5}{2}-l} (X_{n-1,k,l} + X_{n-2,k,l}) + \sum_{l=1}^{\frac{n-5}{2}} X_{-1} + \sum_{k=1}^{\frac{n-3}{2}} (X_{n-1,k} + X_{n-2,k}) + \sum_{l=1}^{\frac{n-3}{2}} X_{n-1,l} - X_{n-1, \frac{n-3}{2}} + \sum_{l=1}^{\frac{n-5}{2}} X_{n-2,l} + X_{-1} + X_1)$$

$$Y_n = 2 \cdot (X_{n-1} + X_{n-2} + \sum_{l=1}^{\frac{n-7}{2}} \sum_{k=1}^{\frac{n-5}{2}-l} (X_{n-1,k,l} + X_{n-2,k,l}) + \sum_{l=1}^{\frac{n-5}{2}} X_{-1} + \sum_{k=1}^{\frac{n-3}{2}} (X_{n-1,k} + X_{n-2,k}) + \sum_{l=1}^{\frac{n-3}{2}} X_{n-1,l} - X_{n-1, \frac{n-3}{2}} + \sum_{l=1}^{\frac{n-5}{2}} X_{n-2,l} + X_{-1} + X_1)$$

$$Y_n = 2 \cdot (X_{n-1} + X_{n-2} + \sum_{l=1}^{\frac{n-7}{2}} \sum_{k=1}^{\frac{n-5}{2}-l} (X_{n-1,k,l} + X_{n-2,k,l}) + \frac{n-5}{2} + \sum_{k=1}^{\frac{n-3}{2}} (X_{n-1,k} + X_{n-2,k}) + \sum_{l=1}^{\frac{n-3}{2}} X_{n-1,l} - X_0 + \sum_{l=1}^{\frac{n-5}{2}} X_{n-2,l} + 1 + 2)$$

$$Y_n = Y_{n-1} + Y_{n-2} + 2 \cdot (\frac{n-5}{2} - 1 + 1 + 2)$$

$$Y_n = Y_{n-1} + Y_{n-2} + n - 5 + 4$$

$$Y_n = Y_{n-1} + Y_{n-2} + n - 1$$

Even:

$$Y_n = 2 \cdot (X_n + \sum_{l=1}^{\frac{n-6}{2}} \sum_{k=1}^{\frac{n-6}{2}-l} X_{n,k,l} + \sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} X_{n,k} + \sum_{l=1}^{\frac{n-2}{2}} X_{n,l})$$

$$Y_{n-1} = 2 \cdot (X_n + \sum_{l=1}^{\frac{n-8}{2}} \sum_{k=1}^{\frac{n-6}{2}-l} X_{n-1,k,l} + \sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} X_{n-1,k} + \sum_{l=1}^{\frac{n-4}{2}} X_{n-1,l})$$

$$Y_{n-2} = 2 \cdot (X_n + \sum_{l=1}^{\frac{n-8}{2}} \sum_{k=1}^{\frac{n-6}{2}-l} X_{n-2,k,l} + \sum_{k=1}^{\frac{n-4}{2}} X_{n-2,k} + \sum_{l=1}^{\frac{n-4}{2}} X_{n-2,l})$$

$$Y_n = 2 \cdot (X_n + \sum_{l=1}^{\frac{n-6}{2}} \sum_{k=1}^{\frac{n-4}{2}-l} X_{n,k,l} + \sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} X_{n,k} + \sum_{l=1}^{\frac{n-2}{2}} X_{n,l})$$

$$Y_n = 2 \cdot (X_n + \sum_{l=1}^{\frac{n-8}{2}} \sum_{k=1}^{\frac{n-6}{2}-l} X_{n,k,l} + X_{n, \frac{n-6}{2}, 1} + X_{n, 1, \frac{n-6}{2}} + \sum_{k=1}^{\frac{n-4}{2}} X_{n,k} + X_{n, \frac{n-2}{2}} + \sum_{l=1}^{\frac{n-4}{2}} X_{n,l} + X_{n, \frac{n-2}{2}})$$

$$Y_n = 2 \cdot (X_{n-1} + X_{n-2} + \sum_{l=1}^{\frac{n-8}{2}} \sum_{k=1}^{\frac{n-6}{2}-l} (X_{n-1,k,l} + X_{n-2,k,l}) + 2 + \sum_{k=1}^{\frac{n-4}{2}} (X_{n-1,k} + X_{n-2,k}) + 1 + \sum_{l=1}^{\frac{n-4}{2}} (X_{n-1,l} + X_{n-2,l}) + 1)$$

$$Y_n = 2 \cdot (X_{n-1} + \sum_{l=1}^{\frac{n-8}{2}} \sum_{k=1}^{\frac{n-6}{2}-l} X_{n-1,k,l} + \sum_{k=1}^{\frac{n-4}{2}} X_{n-1,k} + \sum_{l=1}^{\frac{n-4}{2}} X_{n-1,l} + X_{n-2} + \sum_{l=1}^{\frac{n-8}{2}} \sum_{k=1}^{\frac{n-6}{2}-l} X_{n-2,k,l} + \sum_{k=1}^{\frac{n-4}{2}} X_{n-2,k} + \sum_{l=1}^{\frac{n-4}{2}} X_{n-2,l} + 4)$$

$$Y_n = 2 \cdot (X_{n-1} + \sum_{l=1}^{\frac{n-8}{2}} \sum_{k=1}^{\frac{n-6}{2}-l} X_{n-1,k,l} + \sum_{k=1}^{\frac{n-4}{2}} X_{n-1,k} + \sum_{l=1}^{\frac{n-4}{2}} X_{n-1,l} + 4) + Y_{n-2}$$

$$Y_n = 2 \cdot (X_{n-1} + \sum_{l=1}^{\frac{n-6}{2}} \sum_{k=1}^{\frac{n-4}{2}-l} X_{n-1,k,l} - X_{n-1, \frac{n-6}{2}, 1} - X_{n-1, 1, \frac{n-6}{2}} + \sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} X_{n-1,k} - X_{n-1, \frac{n-2}{2}} + \sum_{l=1}^{\frac{n-4}{2}} X_{n-1,l} + 4) + Y_{n-2}$$

$$Y_n = 2 \cdot (X_{n-1} + \sum_{l=1}^{\frac{n-6}{2}} \sum_{k=1}^{\frac{n-4}{2}-l} X_{n-1,k,l} - 2 + \sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} X_{n-1,k} - 1 + \sum_{l=1}^{\frac{n-4}{2}} X_{n-1,l} + 4) + Y_{n-2}$$

$$Y_n = 2 \cdot (X_{n-1} + \sum_{l=1}^{\frac{n-6}{2}} \sum_{k=1}^{\frac{n-4}{2}-l} X_{n-1,k,l} + \sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} X_{n-1,k} + \sum_{l=1}^{\frac{n-4}{2}} X_{n-1,l} + 1) + Y_{n-2}$$

$$Y_n = Y_{n-1} + Y_{n-2} + 2$$

□

Definitie 3.8 (Fibonacci). De Fibonacci getallen worden als volgt gedefinieerd:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ waarbij } F_0 = 0 \text{ en } F_1 = 1$$

De directe formule voor de Fibonacci getallen is onderstaande formule:

$$F_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \cdot \sqrt{5}}$$

Opmerking. Hieruit kunnen we de volgende getallen opmaken: $F_5 = 5$ en $F_6 = 8$

Propositie 3.9.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n^{\frac{1}{n}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Bewijs.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} F_n^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \cdot \sqrt{5}} \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(1 + \sqrt{5})^n (1 - (\frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}})^n)}{2^n \sqrt{5}} \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(1 + \sqrt{5}) (1 - (\frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}})^n)^{\frac{1}{n}}}{2 \cdot \sqrt{5}^{\frac{1}{n}}} \right) \\ &= \frac{(1 + \sqrt{5}) \cdot 1}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

□

Stelling 3.10 (Connectieve constante ladder figuur). *De connectieve constante van het ladder figuur is $\mu = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5}$*

Bewijs. Neem voor \hat{c}_n het volgende aan:

$$\hat{c}_n = \hat{c}_{n-1} + \hat{c}_{n-2} \text{ met } \hat{c}_5 = 36 \text{ en } \hat{c}_6 = 58$$

Te bewijzen: $\hat{c}_n \leq c_n$ voor $n \geq 5$

Inductiebasis: $\hat{c}_5 = c_5$ en $\hat{c}_6 = c_6$, dus de basis geldt.

Inductiehypothese: Neem aan dat geldt: $\hat{c}_{n-1} \leq c_{n-1}$ en $\hat{c}_{n-2} \leq c_{n-2}$

Inductiestap:

$$\begin{aligned} \hat{c}_n &= \hat{c}_{n-1} + \hat{c}_{n-2} \\ &\leq c_{n-1} + c_{n-2} \\ &\leq c_n \end{aligned}$$

Dus geldt de volgende vergelijking: $\hat{c}_n \leq c_n$ voor $n \geq 5$

De volgende vergelijking $c_n \leq c_n + n + 3$ geldt voor alle $n \geq 5$

Neem voor \tilde{c}_n het volgende aan:

$$\tilde{c}_n = c_{n-1} + c_{n-2} \text{ met } \tilde{c}_5 = 72 \text{ en } \tilde{c}_6 = 116$$

Te bewijzen: $c_n + n + 3 \leq \tilde{c}_n$

Inductiebasis: $44 = c_5 + 5 + 3 \leq \tilde{c}_5 = 72$ en $67 = c_6 + 6 + 3 \leq \tilde{c}_6 = 116$

Inductiehypothese: Neem aan dat geldt:

$$c_{n-1} + (n-1) + 3 \leq \tilde{c}_{n-1} \text{ en } c_{n-2} + (n-2) + 3 \leq \tilde{c}_{n-2}$$

Inductiestap:

$$\begin{aligned} c_n + n + 3 &\leq c_{n-1} + c_{n-2} + n + n + 3 \\ &= c_{n-1} + (n-1) + 3 + c_{n-2} + (n-2) + 3 \\ &\leq \tilde{c}_{n-1} + \tilde{c}_{n-2} \\ &= \tilde{c}_n \end{aligned}$$

Dus geldt de volgende vergelijking: $c_n \leq \tilde{c}_n$ voor $n \geq 5$

Te bewijzen:

$$F_n \leq \hat{c}_n \leq 8 \cdot F_n \quad \forall n \geq 5$$

Inductiebasis: $F_5 = 5 \leq 36 \leq 40 = 8 \cdot F_5$ en $F_6 = 8 \leq 58 \leq 64 = 8 \cdot F_6$

Inductiehypothese: $F_n \leq \hat{c}_n \leq 8 \cdot F_n$ en $F_{n-1} \leq \hat{c}_{n-1} \leq 8 \cdot F_{n-1}$

Inductiestap: $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \leq \hat{c}_n + \hat{c}_{n-1} = \hat{c}_{n+1} \leq 8 \cdot F_n + 8 \cdot F_{n-1} = 8 \cdot F_{n+1}$

Daaruit volgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{c}_n^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (8 \cdot F_n)^{\frac{1}{n}}$$

Dus geldt:

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{c}_n^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Te bewijzen:

$$F_n \leq \tilde{c}_n \leq 16 \cdot F_n \quad \forall n \geq 5$$

Inductiebasis: $F_5 = 5 \leq 72 \leq 80 = 16 \cdot F_5$ en $F_6 = 8 \leq 116 \leq 128 = 16 \cdot F_6$

Inductiehypothese: $F_n \leq \tilde{c}_n \leq 16 \cdot F_n$ en $F_{n-1} \leq \tilde{c}_{n-1} \leq 16 \cdot F_{n-1}$

Inductiestap: $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \leq \tilde{c}_n + \tilde{c}_{n-1} = \tilde{c}_{n+1} \leq 16 \cdot F_n + 16 \cdot F_{n-1} = 16 \cdot F_{n+1}$

Daaruit volgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{c}_n^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (16 \cdot F_n)^{\frac{1}{n}}$$

Dus geldt:

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{c}_n^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Met alle bovenstaande informatie volgt:

$$\begin{aligned}\hat{c}_n &\leq c_n \leq \tilde{c}_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{c}_n &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{c}_n \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

Dus de connectieve constante voor de laddergraaf is $\mu = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ □

Lemma 3.11 (Direct formule ladder figuur). *De directe formule, c_n , voor het aantal zelfontwikkende paden van lengte n in het ladder figuur is $c_n = \begin{cases} 8 \cdot F_n - n & \text{als } n \text{ even} \\ 8 \cdot F_n - 4 & \text{als } n \text{ oneven} \end{cases}$*
Voor $n \geq 5$ en met F_n het n 'de Fibonacci getal.

Bewijs. Dit lemma wordt bewezen met behulp van inductie over n
 Inductiebasis:

$$c_5 = 8 \cdot F_5 - 4 = 8 \cdot 5 - 4 = 36$$

$$c_6 = 8 \cdot F_6 - 6 = 8 \cdot 8 - 6 = 58$$

Inductiehypothese: Stel de formule geldt voor $n - 1$ en $n - 2$

Inductiestap:

n even:

$$\begin{aligned}c_n &= c_{n-1} + c_{n-2} + 2 \\ &= 8 \cdot F_{n-1} - 4 + 8 \cdot F_{n-2} - (n - 2) + 2 \\ &= 8 \cdot F_n - 4 - n + 2 + 2 \\ &= 8 \cdot F_n - n\end{aligned}$$

n oneven:

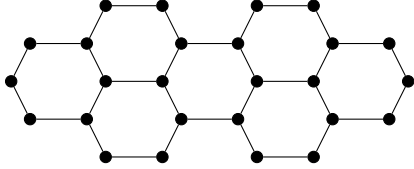
$$\begin{aligned}c_n &= c_{n-1} + c_{n-2} + (n - 1) \\ &= 8 \cdot F_{n-1} - (n - 1) + 8 \cdot F_{n-2} - 4 + (n - 1) \\ &= 8 \cdot F_n - n + 1 - 4 + n - 1 \\ &= 8 \cdot F_n - 4\end{aligned}$$

Dus de directe formule voor c_n geldt voor $n \geq 5$. □

4 Connectieve constante van hexagonaal figuur

4.1 Inleiding

In dit hoofdstuk gaan we kijken naar het hexagonaal rooster. Dit rooster staat ook wel bekend als het honeycomb rooster. Het rooster is opgebouwd uit allemaal 6-hoekige figuren aan elkaar. De punten van de graaf zijn de hoekpunten van de 6-hoeken. De kanten zijn de zijdes van de 6-hoeken. Hierdoor heeft elk punt van de graaf 3 burens.



Definitie 4.1. Zij $G = (\mathbb{H}, E)$ het hexagonaal rooster waarvoor geldt:

- $\mathbb{H} = \{3n + 3m \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{3}k} \mid n, m \in \mathbb{Z}, k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}\}$
- $E = \{(v, u) \mid |v - u| = 1, v, u \in V\}$

Aangezien het verderop in het bewijs beter uitkomt, wordt vanaf nu gekeken naar paden vanaf lijnmiddens, het midden van lijnen, uit \mathbb{H} .

Definitie 4.2. H is de verzameling van lijnmiddens, middens van lijnen

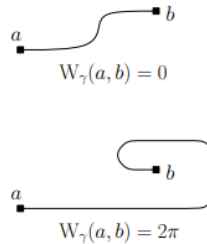
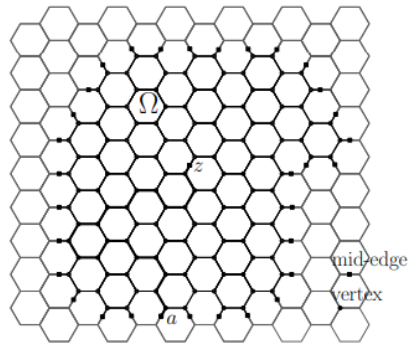
$\gamma : a \rightarrow E$ is een pad dat begint bij $a \in H$ en eindigt bij een lijnmidden uit $E \subset H$

Definitie 4.3. $Z(x) = \sum_{\gamma: a \rightarrow H} x^{l(\gamma)} \in (0, +\infty]$

Definitie 4.4. Een domein $\Omega \subset H$ is de verzameling van alle lijnmiddens die voortgebracht worden door een collectie punten $V(\Omega)$. Als ten minste een van de twee eindpunten van bijbehorende lijn bevat is in $V(\Omega)$, dan geldt voor lijnmidden $z \in \Omega$. Een lijnmidden behoort tot de rand, $z \in \delta\Omega$, als maar een van de twee eindpunten in $V(\Omega)$ zit.

Verder wordt Ω als een enkelvoudig samenhangende ruimte genomen. Dit betekent dat er geen losse stukken punten zijn.

Definitie 4.5. De draaiing $W_\gamma(a, b)$ voor een zelf ontwijkend pad γ tussen lijnmiddens a en b , niet noodzakelijk het begin en het einde van het pad, is de netto rotatie van de richting in radialen wanneer het pad γ van a naar b gaat.



Definitie 4.6. De parafermionische waarneming, $F(z)$ voor $a \in \delta\Omega, z \in \Omega$ is als volgt gedefinieerd:

$$F(z) = F(a, z, x, \sigma) = \sum_{\gamma \subset \Omega: a \rightarrow z} e^{-i\sigma W_\gamma(a, z)} x^{l(\gamma)}$$

Lemma 4.7. Als $x = x_c = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ en $\sigma = \frac{5}{8}$, dan geldt $\forall v \in V(\Omega)$ de volgende relatie voor F :

$$(p-v)F(p) + (q-v)F(q) + (r-v)F(r) = 0$$

met p, q, r de lijnmiddens van de drie zijdes grenzend aan punt v .

Merk op dat voor $\sigma = \frac{5}{8}$, het complexe gewicht $e^{-i\sigma W_\gamma(a, z)}$ kan worden geïnterpreteerd als termen λ en $\bar{\lambda}$ met $\lambda = e^{-i \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{\pi}{3}} = e^{-i \cdot \frac{5\pi}{24}}$, voor elke lijnrichting naar rechts/links.

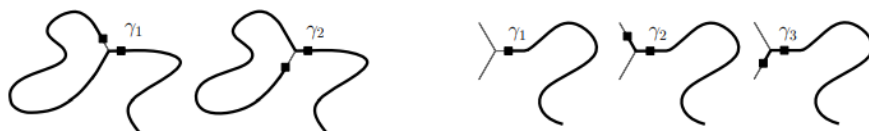
Bewijs. Allereerst worden de punten p, q en r als volgt gedefinieerd: p, q en r zijn de punten grenzend aan v tegen de klok in. Deze punten kunnen gekozen worden zonder verlies van algemeenheid. De toegevoegde waarde van een pad γ , aan de formule bij lemma 4.7, wat eindigt in punt p kan geschreven worden als:

$$c(\gamma) = (p-v) \cdot e^{-i\sigma W_\gamma(a, p)} x^{l(\gamma)}$$

De formule van lemma 4.7 kan dan worden omgeschreven naar sommaties over alle paden die eindigen in het punt p . Dit geldt ook voor alle punten die eindigen in de punten q en r .

De paden die eindigen in de punten p, q en r kunnen worden onderverdeeld in paren en drielingen op de volgende manier:

- Voor een pad die door alle drie de punten (p, q en r) gaat geldt dat het pad een zelfontwijkend pad maakt en daarna een lus van v tot v maakt. Twee paden γ_1 en γ_2 kunnen genomen worden als paar, waarvoor geldt dat het zelfontwijkend pad hetzelfde is (tot op een halve lijn na), en de lus hetzelfde is alleen in tegengestelde richting wordt doorlopen. Op deze manier kunnen alle paden die door alle drie de punten gaan in paren worden gezet.
- Voor een pad, γ_1 , dat door maar een punt (p, q of r) gaat geldt dat het pad eindigt in dit punt. Dit pad kan worden gekoppeld aan de twee paden γ_2 en γ_3 die precies hetzelfde zijn alleen dan met een punt verlengd, dit verlengen kan maar op twee manieren. γ_2 en γ_3 zijn dus paden die door twee punten uit p, q, r gaan. Als een pad door twee punten uit p, q, r gaat kan altijd het pad met verkort worden door het laatste punt weg te halen. Dan wordt namelijk nog steeds met een punt uit p, q, r oftewel met γ_1 geëindigd. Dus kan op deze manier drielingen worden gemaakt van deze paden.



Nu zijn alle paden die eindigen in p, q en r ingedeeld in een paar of een drieling. Als nu bewezen kan worden dat de toegevoegde waarde van de som van een paar of drieling aan de oorspronkelijke formule nul is dan hebben we Lemma 4.7 bewezen.

Twee paden γ_1 en γ_2 zoals bij het eerste punt worden genomen. Zonder verlies van algemeenheid kan worden aangenomen dat γ_1 eindigt in punt q en γ_2 eindigt in punt r. Merk op dat γ_1 en γ_2 overlappen tot middelpunt p. Daarna volgen ze bijna dezelfde lus alleen in tegengestelde richting. Hieruit volgt dat:

$$l(\gamma_1) = l(\gamma_2)$$

$$W_{\gamma_1}(a, q) = W_{\gamma_1}(a, p) + W_{\gamma_1}(p, q) = W_{\gamma_1}(a, p) - \frac{4\pi}{3}$$

$$W_{\gamma_2}(a, r) = W_{\gamma_2}(a, p) + W_{\gamma_2}(p, r) = W_{\gamma_1}(a, p) + \frac{4\pi}{3}$$

Hieruit volgt dat:

$$\begin{aligned} c(\gamma_1) + c(\gamma_2) &= (q - v) \cdot e^{-i\sigma W_{\gamma_1}(a, q)} x^{l(\gamma_1)} + (r - v) \cdot e^{-i\sigma W_{\gamma_2}(a, r)} x^{l(\gamma_2)} \\ &= (p - v) \cdot e^{i \cdot \frac{2\pi}{3}} \cdot e^{-i\sigma(W_{\gamma_1}(a, p) - \frac{4\pi}{3})} x^{l(\gamma_1)} + (p - v) \cdot e^{i \cdot \frac{-2\pi}{3}} \cdot e^{-i\sigma(W_{\gamma_1}(a, p) + \frac{4\pi}{3})} x^{l(\gamma_2)} \\ &= (p - v) \cdot e^{i \cdot \frac{2\pi}{3}} \cdot (e^{-i\sigma W_{\gamma_1}(a, p)} \cdot e^{-i\sigma \cdot \frac{4\pi}{3}}) x^{l(\gamma_1)} + (p - v) \cdot e^{i \cdot \frac{-2\pi}{3}} \cdot (e^{-i\sigma W_{\gamma_1}(a, p)} \cdot e^{-i\sigma \frac{4\pi}{3}}) x^{l(\gamma_2)} \\ &= (p - v) \cdot e^{-i\sigma W_{\gamma_1}(a, p)} \cdot (e^{i\sigma \frac{4\pi}{3}} \cdot e^{i \cdot \frac{2\pi}{3}} + e^{-i\sigma \frac{4\pi}{3}} \cdot e^{i \cdot \frac{-2\pi}{3}}) \\ &= (p - v) \cdot e^{-i\sigma W_{\gamma_1}(a, p)} \cdot (e^{i \frac{5}{8} \frac{4\pi}{3}} \cdot e^{i \cdot \frac{2\pi}{3}} + e^{-i \frac{5}{8} \frac{4\pi}{3}} \cdot e^{i \cdot \frac{-2\pi}{3}}) \\ &= (p - v) \cdot e^{-i\sigma W_{\gamma_1}(a, p)} \cdot (e^{i \frac{20\pi}{24}} \cdot e^{i \cdot \frac{2\pi}{3}} + e^{-i \frac{20\pi}{24}} \cdot e^{i \cdot \frac{-2\pi}{3}}) = (p - v) \cdot e^{-i\sigma W_{\gamma_1}(a, p)} \cdot (e^{i \frac{36\pi}{24}} + e^{-i \frac{36\pi}{24}}) \\ &= (p - v) \cdot e^{-i\sigma W_{\gamma_1}(a, p)} \cdot (-i + i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

γ_1 , γ_2 en γ_3 worden genomen, zoals bij het tweede punt. Zonder verlies van algemeenheid kan worden aangenomen dat γ_1 eindigt in punt p. γ_2 is het pad dat hetzelfde is als γ_1 en op het einde verlengd is met een lijn van punt p naar q. γ_3 is het pad dat hetzelfde is als γ_1 en op het einde verlengd is met een lijn van punt p naar r.

Hieruit volgt dat:

$$l(\gamma_1) + 1 = l(\gamma_2) = l(\gamma_3)$$

$$W_{\gamma_2}(a, q) = W_{\gamma_2}(a, p) + W_{\gamma_2}(p, q) = W_{\gamma_1}(a, p) - \frac{\pi}{3}$$

$$W_{\gamma_3}(a, r) = W_{\gamma_3}(a, p) + W_{\gamma_3}(p, r) = W_{\gamma_1}(a, p) + \frac{\pi}{3}$$

Hieruit volgt dat:

$$\begin{aligned}
c(\gamma_1) + c(\gamma_2) + c(\gamma_3) &= (p-v) \cdot e^{-i\sigma W_{\gamma_1}(a,p)} x^{l(\gamma_1)} + (q-v) \cdot e^{-i\sigma W_{\gamma_2}(a,q)} x^{l(\gamma_2)} + (r-v) \cdot e^{-i\sigma W_{\gamma_3}(a,r)} x^{l(\gamma_3)} \\
&= (p-v) \cdot e^{-i\sigma W_{\gamma_1}(a,p)} x^{l(\gamma_1)} + (q-v) \cdot e^{-i\sigma(W_{\gamma_1}(a,p) - \frac{\pi}{3})} x^{l(\gamma_1)+1} \\
&\quad + (r-v) \cdot e^{-i\sigma(W_{\gamma_1}(a,p) + \frac{\pi}{3})} x^{l(\gamma_1)+1} \\
&= (p-v) \cdot e^{-i\sigma W_{\gamma_1}(a,p)} x^{l(\gamma_1)} + (p-v) \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} \cdot (e^{-i\sigma W_{\gamma_1}(a,p)} \cdot e^{-i\sigma \cdot \frac{\pi}{3}} x^{l(\gamma_1)+1}) \\
&\quad + (p-v) \cdot e^{-i\frac{2\pi}{3}} \cdot (e^{-i\sigma W_{\gamma_1}(a,p)} \cdot e^{-i\sigma \frac{\pi}{3}} x^{l(\gamma_1)+1}) \\
&= (p-v) \cdot e^{-i\sigma W_{\gamma_1}(a,p)} x^{l(\gamma_1)} (1 + e^{i\sigma \frac{\pi}{3}} \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} \cdot x + e^{-i\sigma \frac{\pi}{3}} \cdot e^{-i\frac{2\pi}{3}} \cdot x) \\
&= (p-v) \cdot e^{-i\sigma W_{\gamma_1}(a,p)} x^{l(\gamma_1)} (1 + e^{i\frac{5\pi}{8} \frac{\pi}{3}} \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} \cdot x + e^{-i\frac{5\pi}{8} \frac{\pi}{3}} \cdot e^{-i\frac{2\pi}{3}} \cdot x) \\
&= (p-v) \cdot e^{-i\sigma W_{\gamma_1}(a,p)} x^{l(\gamma_1)} (1 + e^{i\frac{5\pi}{24}} \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} \cdot x + e^{-i\frac{5\pi}{24}} \cdot e^{-i\frac{2\pi}{3}} \cdot x) \\
&= (p-v) \cdot e^{-i\sigma W_{\gamma_1}(a,p)} x^{l(\gamma_1)} (1 + e^{i\frac{21\pi}{24}} \cdot x + e^{-i\frac{21\pi}{24}} \cdot x) \\
&= (p-v) \cdot e^{-i\sigma W_{\gamma_1}(a,p)} x^{l(\gamma_1)} (1 - 2 \cdot \cos(\frac{\pi}{8}) \cdot x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Waar het volgende wordt aangenomen $x = \frac{1}{2 \cdot \cos(\frac{\pi}{8})} = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

Aangezien alle paden tegen elkaar weg vallen geldt:

$$(p-v)F(p) + (q-v)F(q) + (r-v)F(r) = 0$$

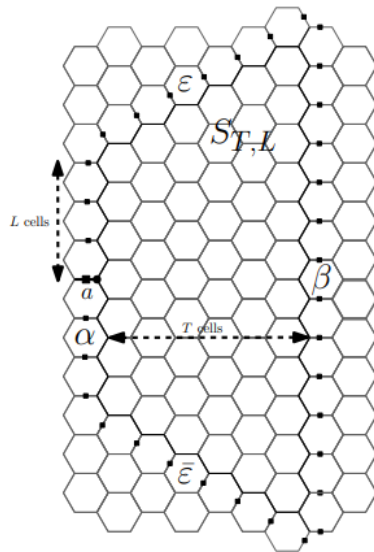
□

4.2 Bewijs van de stelling

Definitie 4.8. Het hexagonaal rooster \mathbb{H} met meshsize 1 in \mathbb{C} word gepositioneerd zodanig dat er een horizontale lijn e , met lijnmidden a als 0, is. Dan:

$$V(S_T) = \{z \in V(\mathbb{H}) : 0 \leq \text{Re}(z) \leq \frac{3T+1}{2}\}$$

$$V(S_{T,L}) = \{z \in V(S_T) : |\sqrt{3} \cdot \text{Im}(z) - \text{Re}(z)| \leq 3L\}$$



Uit deze definitie volgt een strook met in de breedte T hexagonaal stroken. De hoogte heeft boven midden punt a L hexagonaal cellen. Daarna is de strook met een hoek van $\pm \frac{\pi}{3}$ afgeknipt.

De linkse zijkant van S_T wordt genoteerd met α , de rechtse zijkant wordt genoteerd met β . De boven en onderkant wordt genoteerd met ϵ en $\bar{\epsilon}$.

Definitie 4.9. Drie partitie functies, $A_{T,L}^x, B_{T,L}^x$ en $E_{T,L}^x$ worden op de volgende manier gedefinieerd:

$$A_{T,L}^x = \sum_{\gamma \subset S_{T,L}: a \rightarrow \alpha \setminus \{a\}} x^{l(\gamma)}, \quad B_{T,L}^x = \sum_{\gamma \subset S_{T,L}: a \rightarrow \beta} x^{l(\gamma)}, \quad E_{T,L}^x = \sum_{\gamma \subset S_{T,L}: a \rightarrow \epsilon \cup \bar{\epsilon}} x^{l(\gamma)}$$

Lemma 4.10. Voor $x = x_c$, the following identity holds:

$$1 = c_\alpha A_{T,L}^{x_c} + A_{T,L}^{x_c} + c_\epsilon E_{T,L}^{x_c}$$

met positieve constanten $c_\alpha = \cos \frac{3\pi}{8}$ en $c_\epsilon = \cos \frac{\pi}{4}$

Bewijs. Voor elke lijnmidden $u \in S_{T,L}$ geldt $(u - z)F(u) + (u - z')F(u) = 0$ voor de punten $z, z' \in V(\mathbb{H})$ op het uiteinde van de lijn met daarop u .

Sommeren over alle lijnmiddens in $S_{T,L}$ geeft $\sum_{u \in S_{T,L}} (u - z)F(u) + (u - z')F(u) = 0$ $\forall z \in V(S_{T,L})$ staan de aangrenzende lijnmiddens in bovenstaande som.

Met behulp van Lemma 4.6 wordt de volgende vergelijking verkregen:

$$\sum_{u \in \alpha} (u - z)F(u) + \sum_{u \in \beta} (u - z)F(u) + \sum_{u \in \epsilon} (u - z)F(u) + \sum_{u \in \bar{\epsilon}} (u - z)F(u) = 0$$

Waarbij $z \in V(\mathbb{H}) \setminus V(S_{T,L})$ op het uiteinde van de lijn met daarop u ligt en z ligt dus net buiten het domein.

Vervangen van $(u - z)$ geeft:

$$-\sum_{u \in \alpha} F(u) + \sum_{u \in \beta} F(u) + \sum_{u \in \epsilon} e^{i \cdot \frac{2\pi}{3}} F(u) + \sum_{u \in \bar{\epsilon}} e^{-i \cdot \frac{2\pi}{3}} F(u) = 0$$

$$\begin{aligned} \sum_{u \in \alpha} F(u) &= F(a) + \sum_{u \in \alpha \setminus a} F(u) \\ &= F(a) + \frac{1}{2} \sum_{u \in \alpha \setminus a} (F(u) + F(\bar{u})) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \sum_{u \in \alpha \setminus a} \sum_{\gamma \subset S_{T,L}: a \rightarrow u} (e^{-i\sigma W_\gamma(a,u)} x^{l(\gamma)} + e^{-i\sigma W_\gamma(a,\bar{u})} x^{l(\gamma)}) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \sum_{\gamma \subset S_{T,L}: a \rightarrow \alpha \setminus u} (e^{-i\sigma\pi} x^{l(\gamma)} + e^{-i\sigma-\pi} x^{l(\gamma)}) \\ &= 1 + \frac{e^{-i\sigma\pi} + e^{i\sigma\pi}}{2} \sum_{\gamma \subset S_{T,L}: a \rightarrow \alpha \setminus u} x^{l(\gamma)} \\ &= 1 + \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) A_{T,L}^x \\ &= 1 - c_\alpha A_{T,L}^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{u \in \beta} F(u) &= \sum_{u \in \beta} \sum_{\gamma \subset S_{T,L}: a \rightarrow u} e^{-i\sigma W_\gamma(a,u)} x^{l(\gamma)} \\
&= \sum_{u \in \beta} \sum_{\gamma \subset S_{T,L}: a \rightarrow u} e^{-i\sigma 0} x^{l(\gamma)} \\
&= \sum_{\gamma \subset S_{T,L}: a \rightarrow \beta} x^{l(\gamma)} \\
&= B_{T,L}^x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{u \in \epsilon} F(u) &= \sum_{u \in \epsilon} \sum_{\gamma \subset S_{T,L}: a \rightarrow u} e^{-i\sigma W_\gamma(a,u)} x^{l(\gamma)} \\
&= \sum_{u \in \epsilon} \sum_{\gamma \subset S_{T,L}: a \rightarrow u} e^{-i\sigma \frac{2\pi}{3}} x^{l(\gamma)} \\
&= e^{-i\sigma \frac{2\pi}{3}} \sum_{\gamma \subset S_{T,L}: a \rightarrow \epsilon} x^{l(\gamma)} \\
&= e^{-i\sigma \frac{2\pi}{3}} \cdot \frac{1}{2} \sum_{\gamma \subset S_{T,L}: a \rightarrow \epsilon \cup \bar{\epsilon}} x^{l(\gamma)} \\
&= \frac{e^{-i\sigma \frac{2\pi}{3}}}{2} \cdot E_{T,L}^x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{u \in \bar{\epsilon}} F(u) &= \sum_{u \in \bar{\epsilon}} \sum_{\gamma \subset S_{T,L}: a \rightarrow u} e^{-i\sigma W_\gamma(a,u)} x^{l(\gamma)} \\
&= \sum_{u \in \bar{\epsilon}} \sum_{\gamma \subset S_{T,L}: a \rightarrow u} e^{-i\sigma \cdot -\frac{2\pi}{3}} x^{l(\gamma)} \\
&= e^{-i\sigma \cdot -\frac{2\pi}{3}} \sum_{\gamma \subset S_{T,L}: a \rightarrow \bar{\epsilon}} x^{l(\gamma)} \\
&= e^{i\sigma \frac{2\pi}{3}} \cdot \frac{1}{2} \sum_{\gamma \subset S_{T,L}: a \rightarrow \epsilon \cup \bar{\epsilon}} x^{l(\gamma)} \\
&= \frac{e^{i\sigma \frac{2\pi}{3}}}{2} \cdot E_{T,L}^x
\end{aligned}$$

Vervangen door bovenstaande formules geeft:

$$-(1 - c_\alpha A_{T,L}^x) + B_{T,L}^x + e^{i \cdot \frac{2\pi}{3}} \cdot \frac{e^{-i\sigma \frac{2\pi}{3}}}{2} \cdot E_{T,L}^x + e^{-i \cdot \frac{2\pi}{3}} \cdot \frac{e^{i\sigma \frac{2\pi}{3}}}{2} \cdot E_{T,L}^x = 0$$

$$1 = c_\alpha A_{T,L}^x + B_{T,L}^x + \frac{e^{i \cdot \frac{2\pi}{3}} \cdot e^{-i \cdot \frac{5}{8} \frac{2\pi}{3}}}{2} \cdot E_{T,L}^x + \frac{e^{-i \cdot \frac{2\pi}{3}} \cdot e^{i \cdot \frac{5}{8} \frac{2\pi}{3}}}{2} \cdot E_{T,L}^x$$

$$1 = c_\alpha A_{T,L}^x + B_{T,L}^x + \frac{e^{i \cdot \frac{6\pi}{24}}}{2} \cdot E_{T,L}^x + \frac{e^{-i \cdot \frac{6\pi}{24}}}{2} \cdot E_{T,L}^x$$

$$1 = c_\alpha A_{T,L}^x + B_{T,L}^x + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot E_{T,L}^x$$

$$1 = c_\alpha A_{T,L}^x + B_{T,L}^x + c_\epsilon \cdot E_{T,L}^x$$

□

De reeksen $(A_{T,L}^x)_{L>0}$ en $(B_{T,L}^x)_{L>0}$ zijn oplopend als L groter wordt.

$$A_{T,L}^x = \sum_{\gamma \subset S_{T,L}: a \rightarrow \alpha \setminus \{a\}} x^{l(\gamma)} < \sum_{\gamma \subset S_{T,L+1}: a \rightarrow \alpha \setminus \{a\}} x^{l(\gamma)} = A_{T,L+1}^x$$

Dit volgt uit de definitie van $A_{T,L}^x$ (en $B_{T,L}^x$). Er komen namelijk alleen maar paden bij en dit vergroot de som.

Bekend is dat $A_{T,L}^x$, $B_{T,L}^x$ en $E_{T,L}^x$ positief zijn.

Uit

$$1 = c_\alpha A_{T,L}^x + B_{T,L}^x + c_\epsilon \cdot E_{T,L}^x$$

volgt dan dat $A_{T,L}^x$ (en $B_{T,L}^x$) begrensd zijn.

Voor $x < x_c$ geldt:

$$A_{T,L}^x = \sum_{\gamma \subset S_{T,L}: a \rightarrow \alpha \setminus \{a\}} x^{l(\gamma)} < \sum_{\gamma \subset S_{T,L}: a \rightarrow \alpha \setminus \{a\}} x_c^{l(\gamma)} = A_{T,L}^{x_c}$$

Dus de reeksen $(A_{T,L}^x)_{L>0}$ en $(B_{T,L}^x)_{L>0}$ zijn stijgend in L en zijn begrensd voor $x \leq x_c$. Dus hebben de reeksen limieten namelijk:

$$A_T^x = \lim_{L \rightarrow \infty} A_{T,L}^x = \sum_{\gamma \subset S_T: a \rightarrow \alpha \setminus \{a\}} x^{l(\gamma)}, \quad B_T^x = \lim_{L \rightarrow \infty} B_{T,L}^x = \sum_{\gamma \subset S_T: a \rightarrow \beta} x^{l(\gamma)}$$

Met behulp van Lemma 4.10 volgt dan dat de reeks $(E_{T,L}^x)_{L>0}$ daalt en convergeert naar een limiet:

$$E_T^{x_c} = \lim_{L \rightarrow \infty} E_{T,L}^{x_c}$$

Evaluëren van Lemma 4.10 in het limiet van L geeft de volgende vergelijking:

$$1 = c_\alpha A_T^{x_c} + B_T^{x_c} + c_\epsilon E_T^{x_c}$$

Lemma 4.11. Voor $T \geq 1$ als

$$c_\alpha \frac{1}{x_c} (B_{T+1}^{x_c})^2 + B_{T+1}^{x_c} \geq B_T^{x_c}$$

geldt dan:

$$B_T^{x_c} \geq \frac{\min[B_1^{x_c}, \frac{x_c}{c_\alpha}]}{T}$$

Opmerking. Bij het bewijs door H. Duminil-Copin and S. Smirnov staat een iets andere constante voor $(B_{T+1}^{x_c})^2$. Dit heeft invloed op het bewijs van Lemma 4.11, maar geeft geen significante verandering in het algehele bewijs.

Bewijs. Neem eerst de reeks $C_T^{x_c}$, waarvoor geldt:

$$C_1^{x_c} = B_1^{x_c} \text{ en } c_\alpha \frac{1}{x_c} (C_{T+1}^{x_c})^2 + C_{T+1}^{x_c} = C_T^{x_c}$$

Waaruit volgt dat voor alle T geldt: $C_T^{x_c} \geq C_{T+1}^{x_c}$

Eerst bewijzen we dat geldt: $C_T^{x_c} \geq \frac{\min[C_1^{x_c}, \frac{x_c}{c_\alpha}]}{T}$ voor alle $T \geq 1$. Dit bewijs volgt met inductie over T .

Inductiebasis ($T = 1$): Te bewijzen $C_1^{x_c} \geq \min[C_1^{x_c}, \frac{x_c}{c_\alpha}]$.

Stel $C_1^{x_c} \geq \frac{x_c}{c_\alpha}$, dan $\min[C_1^{x_c}, \frac{x_c}{c_\alpha}] = \frac{x_c}{c_\alpha} \implies C_1^{x_c} \geq \frac{x_c}{c_\alpha} = \min[C_1^{x_c}, \frac{x_c}{c_\alpha}]$

Stel $C_1^{x_c} < \frac{x_c}{c_\alpha}$, dan $\min[C_1^{x_c}, \frac{x_c}{c_\alpha}] = C_1^{x_c} \implies C_1^{x_c} \geq C_1^{x_c} = \min[C_1^{x_c}, \frac{x_c}{c_\alpha}]$

Dus geldt de inductiebasis.

Inductiehypothese: Stel $C_T^{x_c} \geq \frac{\min[C_1^{x_c}, \frac{x_c}{c_\alpha}]}{T}$ voor T

Inductiestap: dit verdelen we in twee mogelijkheden.

1. $C_1^{x_c} \geq \frac{x_c}{c_\alpha}$ Dan:

$$\begin{aligned} C_{T+1} &\geq \frac{C_T}{1 + c_\alpha \frac{1}{x_c} C_{T+1}} \\ &\geq \frac{C_T}{1 + c_\alpha \frac{1}{x_c} C_T} \\ &\geq \frac{\min[C_1^{x_c}, \frac{x_c}{c_\alpha}]/T}{1 + c_\alpha \frac{1}{x_c} \frac{x_c}{c_\alpha T}} \\ &\geq \frac{\min[C_1^{x_c}, \frac{x_c}{c_\alpha}]/T}{1 + \frac{1}{T}} \\ &\geq \frac{\min[C_1^{x_c}, \frac{x_c}{c_\alpha}]}{T+1} \end{aligned}$$

2. $C_1^{x_c} < \frac{x_c}{c_\alpha}$ Dan:

$$\begin{aligned} C_{T+1} &\geq \frac{C_T}{1 + c_\alpha \frac{1}{x_c} C_{T+1}} \\ &\geq \frac{C_T}{1 + c_\alpha \frac{1}{x_c} C_T} \\ &\geq \frac{\min[C_1^{x_c}, \frac{x_c}{c_\alpha}]/T}{1 + c_\alpha \frac{1}{x_c} \frac{\min[C_1^{x_c}, \frac{x_c}{c_\alpha}]}{T}} \\ &\geq \frac{\min[C_1^{x_c}, \frac{x_c}{c_\alpha}]}{T + \frac{c_\alpha}{x_c} C_1} \\ &\geq \frac{\min[C_1^{x_c}, \frac{x_c}{c_\alpha}]}{T + \frac{c_\alpha}{x_c} \frac{x_c}{c_\alpha}} \\ &\geq \frac{\min[C_1^{x_c}, \frac{x_c}{c_\alpha}]}{T+1} \end{aligned}$$

Dus $C_T^{x_c} \geq \frac{\min[C_1^{x_c}, \frac{x_c}{c_\alpha}]}{T}$ geldt voor alle $T \geq 1$,
als $c_\alpha x_c (C_{T+1}^{x_c})^2 + C_{T+1}^{x_c} = C_T^{x_c}$ geldt voor alle $T \geq 1$.

Claim: $B_T^{x_c} \geq C_T^{x_c}$ voor alle $T \geq 1$.

Bewijs volgt met inductie.

Inductiebasis is de aanname $B_1^{x_c} = C_1^{x_c}$

Inductiehypothese: Stel $B_T^{x_c} \geq C_T^{x_c}$ voor T .

Inductiestap:

$$B_{T+1}^{x_c} \geq B_T^{x_c} - c_\alpha \frac{1}{x_c} (B_{T+1}^{x_c})^2$$

$$C_{T+1}^{x_c} + c_\alpha \frac{1}{x_c} (C_{T+1}^{x_c})^2 = C_T^{x_c} \leq B_T^{x_c} \leq c_\alpha \frac{1}{x_c} (B_{T+1}^{x_c})^2 + B_{T+1}^{x_c}$$

$$(C_{T+1}^{x_c} - B_{T+1}^{x_c}) + c_\alpha \frac{1}{x_c} ((C_{T+1}^{x_c})^2 - (B_{T+1}^{x_c})^2) \leq 0$$

Waaruit volgt dat:

$$(C_{T+1}^{x_c})^2 - (B_{T+1}^{x_c})^2 \leq 0 \text{ of } C_{T+1}^{x_c} - B_{T+1}^{x_c} \leq 0$$

Stel $B_{T+1}^{x_c} < C_{T+1}^{x_c}$, dan moet $(C_{T+1}^{x_c})^2 - (B_{T+1}^{x_c})^2 \leq 0$.

Oftewel $(C_{T+1}^{x_c})^2 \leq (B_{T+1}^{x_c})^2 \rightarrow C_{T+1}^{x_c} - B_{T+1}^{x_c} \leq 0$ en dat geeft een tegenspraak.

Dus geldt $C_{T+1}^{x_c} \leq B_{T+1}^{x_c}$ voor alle T .

Daaruit volgt voor alle T :

$$B_T^{x_c} \geq C_T^{x_c} \geq \frac{\min[C_1^{x_c}, \frac{x_c}{c_\alpha}]}{T} = \frac{\min[B_1^{x_c}, \frac{x_c}{c_\alpha}]}{T}$$

□

Lemma 4.12. *De connectieve constante, $\mu \geq \sqrt{2 + \sqrt{2}}$*

Bewijs. Neem aan dat voor een willekeurige T , $E_T^{x_c} > 0$. Zoals eerder vermeld is bekend dat $E_{T,L}^{x_c}$ dalend is in L en dus geldt:

$$Z(x_c) \geq \sum_{L>0} E_{T,L}^{x_c} \geq \sum_{L>0} E_T^{x_c} = +\infty$$

Dus moet gelden dat $E_T^{x_c} = 0$ voor alle T . Waardoor de volgende vergelijking geldt:

$$1 = c_\alpha A_T^{x_c} + B_T^{x_c}$$

Bekijk nu een pad γ die meetelt bij $A_{T+1}^{x_c}$ en niet meetelt bij $A_T^{x_c}$. Dit pad γ moet een punt bevatten grenzend aan de rechterzijde van S_{T+1} . Knip γ bij het eerste punt dat aan voorgaande eis voldoet. Dit resulteert in twee paden, γ_1 en γ_2 . γ_1 en γ_2 zijn afhankelijk van γ . Deze twee paden kunnen beide met een halve zijde verlengd worden, zodat de paden tot de rand S_{T+1} komen. Dit zijn dan twee paden die beide meetellen bij $B_{T+1}^{x_c}$. Daarnaast geldt $l(\gamma) + 1 = l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$.

$$x_c(A_{T+1}^{x_c} - A_T^{x_c}) = \sum_{\gamma \subset S_{T+1}: a \rightarrow \alpha \setminus \{a\}} x_c^{l(\gamma)+1} - \sum_{\gamma \subset S_T: a \rightarrow \alpha \setminus \{a\}} x_c^{l(\gamma)+1}$$

Dit zijn alle paden die meetellen bij $A_{T+1}^{x_c}$ en niet bij $A_T^{x_c}$ en deze paden γ zijn een langer.

Laat γ paden zijn die meetellen in $A_{T+1}^{x_c}$ en niet meetellen in $A_T^{x_c}$. Dan:

$$\begin{aligned} x_c(A_{T+1}^{x_c} - A_T^{x_c}) &= \sum_{\gamma \subset S_{T+1}: a \rightarrow \alpha \setminus \{a\}} x_c^{l(\gamma_1)+l(\gamma_2)} = \sum_{\gamma \subset S_{T+1}: a \rightarrow \alpha \setminus \{a\}} x_c^{l(\gamma_1)} \cdot x_c^{l(\gamma_2)} \leq \\ &\sum_{\gamma_1 \subset S_{T+1}: a \rightarrow \beta} x_c^{l(\gamma_1)} \cdot \sum_{\gamma_2 \subset S_{T+1}: a \rightarrow \beta} x_c^{l(\gamma_2)} = B_{T+1}^{x_c} \cdot B_{T+1}^{x_c} = (B_{T+1}^{x_c})^2 \end{aligned}$$

Dus volgt de volgende vergelijking:

$$x_c(A_{T+1}^{x_c} - A_T^{x_c}) \leq (B_{T+1}^{x_c})^2$$

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - 1 \\ &= (c_\alpha A_{T+1}^{x_c} + B_{T+1}^{x_c}) - (c_\alpha A_T^{x_c} + B_T^{x_c}) \\ &= c_\alpha (A_{T+1}^{x_c} - A_T^{x_c}) + B_{T+1}^{x_c} - B_T^{x_c} \\ &\leq c_\alpha \frac{1}{x_c} (B_{T+1}^{x_c})^2 + B_{T+1}^{x_c} - B_T^{x_c} \end{aligned}$$

Dus geldt de volgende vergelijking:

$$c_\alpha \frac{1}{x_c} (B_{T+1}^{x_c})^2 + B_{T+1}^{x_c} \geq B_T^{x_c}$$

Met Lemma 4.11 volgt hieruit

$$B_T^{x_c} \geq \frac{\min[B_1^{x_c}, \frac{x_c}{c_\alpha}]}{T} \text{ voor alle } T \geq 1$$

Dus

$$Z(x_c) \geq \sum_{T>0} B_T^{x_c} = +\infty$$

□

Lemma 4.13. *Elk pad kan worden opgedeeld in een reeks van bruggen met breedtes $T_{-i} < \dots < T_{-1}$ en $T_0 > \dots > T_j$. Als het startpunt, een lijnmidden, en het eerste bezochte punt vast staan dan bepaalt de opdeling een uniek pad.*

Bewijs. Allereerst wordt aangenomen dat γ een pad is waarvoor het startpunt een extreme reële waarde heeft. Dit wordt bewezen met behulp van inductie over de breedte T_0 .

Zonder verlies van algemeenheid nemen we aan dat T_0 een minimum reël startpunt heeft. Uit alle punten met maximale reële waarde wordt het punt dat als laatste wordt bezocht gekozen. Neem aan dat dit punt na n stappen wordt bezocht. De n eerste punten vormen samen de brug γ_1 met breedte T_0 . Dit is de eerste brug uit de opdeling als het pad bij het laatste punt met een lijnmidden naar rechts wordt verlengd.

Het $n + 1$ punt wordt vergeten, aangezien dit al vastligt. Er is namelijk maar een mogelijkheid waar dit punt kan liggen, omdat punt n het laatste punt is met maximale reële waarde.

Het overige pad, γ_2 heeft dan weer een startpunt met extreme reële waarde, in dit geval een maximum, met breedte $T_1 < T_0$. Door de inductiehypothese te gebruiken kan γ_2 opgedeeld worden in bruggen met breedte $T_1 > \dots > T_j$. De opdeling van γ kan worden gedaan door γ_1 aan de voorkant van de opdeling van γ_2 toe te voegen.

Als γ een pad is waarvoor het eindpunt een extreme reële waarde heeft, kan de volgende opdeling worden gebruikt. Neem de opdeling van het pad in tegengestelde richting. Vervolgens worden bruggen met breedtes $T_{-i} < \dots < T_{-1}$ verkregen.

Als γ een pad is zonder begin/eind punt met een extreme reële waarde, dan kan het pad in twee stukken γ_1 en γ_2 geknipt worden. Waarbij alle punten tot het eerste punt met extreme reële waarde bij γ_1 horen en de overige punten bij γ_2 . De opdeling van γ is opgebouwd uit de verdeling van γ_1 (met breedtes $T_{-i} < \dots < T_{-1}$) en γ_2 (met breedtes $T_0 > \dots > T_j$).

□

Lemma 4.14. *De connectieve constante, $\mu \leq \sqrt{2 + \sqrt{2}}$*

Bewijs. Om van $Z(x_c)$ een bovengrens te bepalen, worden de paden in bruggen verdeeld met behulp van Lemma 4.13. Een brug met breedte T is een pad in S_T van α naar β uniek bepaald op verticale verschuiving na. De verdelingsfunctie van de bruggen met breedte T is $B_T^{x_c}$. Bekend is dat $B_T^x \leq 1$ volgens Lemma 4.9. Daarnaast heeft een brug van breedte T minstens lengte T . Dus geldt:

$$B_T^x = \sum_{\gamma \subset S_T: \alpha \rightarrow \beta} x^{l(\gamma)} \leq \left(\frac{x}{x_c}\right)^T \sum_{\gamma \subset S_T: \alpha \rightarrow \beta} x_c^{l(\gamma)} \leq \left(\frac{x}{x_c}\right)^T B_T^{x_c} \leq \left(\frac{x}{x_c}\right)^T$$

Voor $x < x_c$ convergeert de reeks $\sum_{T>0} B_T^x$, want:

$$\sum_{T>0} B_T^x < \sum_{T>0} \left(\frac{x}{x_c}\right)^T = \frac{1}{1 - \left(\frac{x}{x_c}\right)}$$

Het product $\prod_{T>0} (1 + B_T^x)$ convergeert desda $\sum_{T>0} \ln(1 + B_T^x)$ convergeert.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} B_T^x = 0 \implies \lim_{T \rightarrow \infty} \ln(1 + B_T^x) = 0$$

Dus convergeert $\sum_{T>0} \ln(1 + B_T^x)$ en convergeert $\prod_{T>0} (1 + B_T^x)$ dus ook.

We passen nu Lemma 4.13 toe op de paden startend vanaf een vast middenpunt a . Dit resulteert in de eerste ongelijkheid:

$$Z(x) \leq 2 \sum_{\substack{T_{-i} < \dots < T_{-1} \\ T_j < \dots < T_0}} \left(\prod_{k=-i}^j B_{T_k}^x \right)$$

De factor twee is noodzakelijk, omdat vanuit a twee kanten op mogelijk zijn. Al deze paden kunnen worden gespiegeld ten opzichte van middenpunt a en elk pad kan uniek opgedeeld worden volgens Lemma 4.13, dit gebeurt in de som. Hierbij wordt alleen de lengte's van deze bruggen verkregen. Dan vermenigvuldig je alle mogelijke bruggen van deze lengtes keer elkaar. Hierbij kan het voorkomen dat sommige bruggen elkaar overlappen, aangezien niet wordt gekeken naar voorgaande bruggen. Daardoor wordt de kleiner gelijk in de vergelijking verkregen.

$$2 \sum_{\substack{T_{-i} < \dots < T_{-1} \\ T_j < \dots < T_0}} \left(\prod_{k=-i}^j B_{T_k}^x \right) = 2 \prod_{T > 0} (1 + B_T^x)^2 < \infty$$

Aan de linkse kant van de vergelijking wordt per verdeling van alle lengtes van bruggen gesommeerd. Dit resulteert in een vermenigvuldiging van alle mogelijke lengtes van bruggen. Voor elke lengte, z , van een brug zijn er maximaal twee bruggen van deze lengte. Een brug van lengte z kan horen bij T_i, \dots, T_i of T_j, \dots, T_0 . Er zijn ook paden, waarbij geen bruggen zijn (in de verdeling) van lengte z .

Indien gesomeerd wordt over lengte T aan de rechterzijde, moet ervoor gezorgd worden dat alle bovenstaande combinaties erbij zitten. Dus $(B_T^x)^2$ voor paden waar de brug met lengte T twee keer in voor komt. $2 \cdot (B_T^x)$ voor paden waar de brug met lengte T één keer in voor komt, dit is vermenigvuldigt omdat deze brug op twee plekken kan voorkomen. 1 voor alle paden waarbij er geen brug met lengte T voorkomt.

$$(B_T^x)^2 + 2 \cdot (B_T^x) + 1 = (1 + B_T^x)^2$$

Dus de vergelijking geldt. Wat het volgende impliceert:

$$Z(x) \leq 2 \sum_{\substack{T_{-i} < \dots < T_{-1} \\ T_j < \dots < T_0}} \left(\prod_{k=-i}^j B_{T_k}^x \right) = 2 \prod_{T > 0} (1 + B_T^x)^2 < \infty$$

Oftewel $Z(x) < \infty$ als $x < x_c$, waaruit volgt:

$$\mu \leq \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

□

Stelling 4.15. *De connectieve constante, μ , voor het hexagonaal rooster is:*

$$\mu = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

Bewijs. Uit Lemma 4.12 en Lemma 4.14 volgt direct dat deze stelling waar is.

□

5 Conclusie

In deze scriptie is er gekeken naar de connectieve constante bij roosters. Voor het vierkante rooster is er met behulp van het python script nog geen duidelijke waarde te schatten. Hiervoor is een ander manier van code schrijven nodig of een krachtigere computer.

Er is aangetoond dat de connectieve constante voor de laddergraaf $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5}$ is. Daarnaast is aangetoond dat de connectieve constante voor het hexagonaal rooster $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ is.

Voor vervolg onderzoek kan er een programma worden geschreven om de connectieve constante voor andere roosters en figuren te bepalen. Daarnaast is er bij veel roosters een vermoeden wat de connectieve constante is, maar is er nog geen bewijs voor.

6 Bronnenlijst

Referenties

- [1] H. Duminil-Copin and S. Smirnov (2011) The connective constant of the honeycomb lattice equals $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$
- [2] M. Fekete (1923) Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten.
- [3] N. Madras and G. Slade (1993) Self-avoiding walks
- [4] A. Schrijver Grafen: Kleuren en Routeren