Radboud Universiteit Nijmegen

Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica

Geloei op Sicilië

Over het runderprobleem van Archimedes en de vergelijking van Pell

Bachelorscriptie Wiskunde

Auteur:
Thomas Peeters BA
s4378660

Begeleider:
dr. W.H.M. Veldman

Tweede lezer:
dr. W. Bosma

23 augustus 2019

Voorwoord

Archimedes van Syracuse (287 - 212 v.Chr.) wordt vaak tot één der grootste wis- en natuurkundigen aller tijden gerekend. Bijna iedereen kent hem wel vanwege zijn natuurkundige uitvindingen, vanwege zijn ingenieuze oorlogswapens of toch in ieder geval wel om zijn beroemde kreet «Εὕρηκα, εὕρηκα!» "Ik heb het, ik heb het!",[1] die hij slaakte toen hij de wet van Archimedes ontdekte. Onder wiskundigen genieten ook Archimedes' wiskundige werken bekendheid, maar bijna niemand kent zijn runderprobleem.
Het runderprobleem van Archimedes lijkt in eerste instantie niet meer dan een eenvoudig raadsel: bereken het aantal runderen van de zonnegod Helios aan de hand van een aantal voorwaarden. Dat raadsel blijkt echter zo pittig te zijn, dat velen zich erop hebben stukgebeten, totdat aan het einde van de negentiende eeuw werd aangetoond dat het totale aantal runderen in het gunstigste geval een getal is van 206 545 cijfers. Pas in 1965 werd dit getal ook volledig uitgerekend. Dit bedrieglijk lastige probleem staat centraal in deze scriptie, met bijzondere aandacht voor de zogenaamde Pellvergelijking, die optreedt bij het zoeken naar een oplossing.

Deze scriptie is een bachelorscriptie voor de opleiding Wiskunde. Naast bachelorstudent Wiskunde ben ik, na een bacheloropleiding Griekse en Latijnse Taal en Cultuur te hebben afgerond, tevens masterstudent Oudheidstudies. In deze scriptie combineer ik dan ook mijn kennis van beide vakgebieden: niet alleen heb ik gekeken naar het wiskundige aspect van het runderprobleem, maar tevens heb ik kritisch naar de originele probleemstelling gekeken. Uiteraard is al het Grieks voorzien van vertalingen en uitleg, zodat deze scriptie ook zonder kennis van het Oudgrieks gelezen kan worden.
Ik wil graag mijn begeleider, dr. Wim Veldman, bedanken voor het enthousiasme waarmee hij mij begeleid heeft bij dit ingewikkelde onderwerp. Voor zijn hulp bij de voorbereiding van de eindpresentatie van deze scriptie bedank ik dr. Wieb Bosma. Een bijzonder woord van dank gaat uit naar dr. Floris Overduin, die bereid was samen met mij een kritische blik te werpen op de Griekse tekst.

[1] Vaak wordt deze kreet vertaald als "Ik heb het gevonden, ik heb het gevonden!". Het Griekse perfectum legt echter nadruk op het resultaat van de handeling en niet op de handeling zelf. Het resultaat is in dit geval dat Archimedes de oplossing heeft (en dat komt doordat hij hem gevónden heeft). "Ik heb het, ik heb het!" geeft dus beter weer dat het in het Grieks om een perfectum gaat.

Inhoudsopgave

1 Inleiding

Lange tijd kenden we van Archimedes, naast verhalen door andere auteurs, alleen wetenschappelijke verhandelingen, geschreven in het Dorisch dialect. In 1773 ontdekte Gotthold Ephraim Lessing, een bekend Duits schrijver en dramaturg, in de bibliotheek van Wolfenbüttel enkele uit het oog verloren teksten, waaronder een probleem waarbij vermeld werd dat het van Archimedes was. In tegenstelling tot de wetenschappelijke verhandelingen is dit probleem gesteld in de vorm van een epigram, poëzie dus, in het Ionisch dialect. Het gedicht bestaat uit 22 elegische disticha[2] waarin de lezer wordt gevraagd het aantal runderen van de zonnegod Helios te bepalen aan de hand van enkele voorwaarden.
Dergelijke opgaven zijn geen vreemde verschijning in de Griekse literatuur: boek 14 van de *Anthologia Palatina*[3] staat er zelfs helemaal vol mee. Meestal gaat het om korte raadsels die gemakkelijk op te lossen zijn of strikvragen met een verrassende wending. Eén van de overgeleverde problemen is het volgende kleine runderprobleem, dat gesteld is in acht dactylische hexameters.[4]

Εἰς τὴν Αὐγείου κόπρον

Αὐγείην ἐρέεινε μέγα σθένος Ἀλκείδαο,
πληθὺν βουκολίων διζήμενος· ὃς δ᾽ ἀπάμειτο·
«Ἀμφὶ μὲν Ἀλφειοῖο ῥοάς, φίλος, ἥμισυ τῶνδε·
μοίρη δ᾽ ὀγδοάτη ὄχθον Κρόνου ἀμφινέμονται·
δωδεκάτη δ᾽ ἀπάνευθε Ταραξίπποιο παρ᾽ ἱρόν·
ἀμφὶ δ᾽ ἄρ᾽ Ἦλιδα δῖαν ἐεικοστὴ νεμέθονται·
αὐτὰρ ἐν Ἀρκαδίη ⟨γε⟩ τριηκοστὴν προλέλοιπα·
λοιπὰς δ᾽ αὖ λεύσσεις ἀγέλας τόδε πεντήκοντα.»

Over de mest van Augeias

Aan Augeias vroeg de sterke Herakles[5]
naar het aantal runderen in zijn kudde, en hij antwoordde:
“Bij de rivier de Alpheios, vriend, is de helft ervan;
en een achtste deel wordt geweid bij de Kronosheuvel;
een twaalfde is ver weg bij het heiligdom van Taraxippos;
en in het heilige Elis wordt een twintigste gevoed;
maar in Arkadië heb ik een dertigste achtergelaten;
en wat je hier ziet is wat nog over is: vijftig stuks.”

Deze korte opgave is gemakkelijk: er hoeft slechts één lineaire vergelijking in één onbekende opgelost te worden. Met x voor het totale aantal runderen vinden we de vergelijking

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{12} - \frac{1}{20} - \frac{1}{30}\right) x = 50.$$

Na het gelijknamig maken van de breuken vinden we $\frac{25}{120}\,x = 50$, waaruit onmiddellijk volgt dat het totale aantal runderen 240 was.

[2] Een elegisch distichon bestaat steeds uit twee verzen, achtereenvolgens een dactylische hexameter en een dactylische pentameter. Het gedicht telt dus 44 verzen in totaal.

[3] De *Anthologia Palatina* is (letterlijk) een bloemlezing, bestaande uit zestien boeken gedichten, voornamelijk epigrammen. Hun datering loopt uiteen van de zevende eeuw v.Chr. tot de zesde eeuw n.Chr.

[4] *AP* 14.4, hier overgenomen uit Benson (2014), 191.

[5] Ἀλκείδης “Alkeides” is een alternatieve benaming voor Herakles.

Volgens de overlevering had Augeias echter wel 3 000 runderen.[6] Hieruit blijkt direct dat dergelijke raadsels vaak wel een mythologische of historische achtergrond hebben, terwijl het antwoord daar niet noodzakelijkerwijs direct iets mee te maken hoeft te hebben.

Het runderprobleem van Archimedes is vijf en een half keer zo lang als het runderprobleem over de mest van Augias en aanzienlijk ingewikkelder. De kleinste oplossing van het probleem blijkt immers voor het totale aantal runderen een getal op te leveren met maar liefst 206 545 cijfers. In deze scriptie wordt eerst de precieze formulering van het probleem besproken, evenals enige informatie over Archimedes' leven en werk, inclusief de vraag of het terecht is dat Archimedes' naam aan het runderprobleem gekoppeld is. Daarna komen de geschiedenis van de ontdekking en van de oplossing van het probleem aan de orde. Vervolgens worden oplossingen gepresenteerd voor vereenvoudigde versies van het probleem, inclusief een wiskundige uitleg hoe ingezien kan worden dat het complete probleem oneindig veel oplossingen heeft en hoe deze oplossingen berekend kunnen worden. In de traditionele methode hiervoor speelt de zogenaamde *Pellvergelijking* een belangrijke rol; om hiermee te kunnen werken wordt theorie over kettingbreuken gebruikt. Tot slot wordt kort ingegaan op alternatieve, eventueel efficiëntere, oplossingsmethoden en op alternatieve interpretaties van de tekst waardoor de opgave en daarmee dus ook de oplossing verandert. Omdat er veel oplossingen van subtiel wisselende problemen worden besproken, zijn voor de overzichtelijkheid alle oplossingen tevens terug te vinden in appendix B.

Bij het runderprobleem van Archimedes zijn we op zoek naar aantallen runderen en daarom alleen geïnteresseerd in positieve gehele getallen. In deze scriptie wordt daarom de conventie gehanteerd dat de natuurlijke getallen beginnen bij 1, zoals dat bij de Grieken ook gebruikelijk was. Dus $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

[6] Mačák (2001), 57.

2 Inhoud van het runderprobleem

In dit hoofdstuk wordt de inhoud van het runderprobleem in detail besproken. Steeds wordt een gedeelte van de tekst weergegeven, zowel in het Grieks als in vertaling, gevolgd door een toelichting met aandachtspunten.[7] Inhoudelijke overgangen in de tekst treden niet altijd op bij een verseinde. Daarom, en ook omdat het handig kan zijn de tekst van het probleem los te kunnen raadplegen, is het runderprobleem in zijn geheel ook opgenomen in appendix A. De tekst in de appendix dient nadrukkelijk ter snelle referentie: voetnoten bij de vertaling en verdere opmerkingen zijn in de appendix achterwege gelaten.

2.1 Inleiding op het gedicht

Πρόβλημα ὅπερ Ἀρχιμήδης ἐν ἐπιγράμμασιν εὑρὼν τοῖς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ περὶ ταῦτα πραγματευομένοις ζητεῖν ἀπέστειλεν ἐν τῇ πρὸς Ἐρατοσθένην τὸν Κυρηναῖον ἐπιστολῇ.

Probleem dat Archimedes, in epigrammen gevonden hebbend, aan degenen in Alexandrië die zich omtrent die dingen bezighouden om te bestuderen verzond in de brief aan Eratosthenes van Cyrene.

In de manuscripten wordt het runderprobleem voorafgegaan door deze inleidende zin. Er wordt overduidelijk geclaimd dat Archimedes iets met het probleem te maken heeft; het is echter onduidelijk wat precies zijn rol is: het woord «εὑρὼν» is voor meerdere interpretaties vatbaar.[8] Er zou bedoeld kunnen worden dat Archimedes het probleem ergens in epigrammen *ontdekt* had, waarmee de rol van Archimedes niet meer zou zijn dan een doorgeefluik. Er zou ook bedoeld kunnen worden dat Archimedes het probleem *opgelost* had, wat gezien de moeilijkheidsgraad onwaarschijnlijk lijkt, of zelfs dat Archimedes het probleem *bedacht* had.[9] In alle gevallen blijft onduidelijk wat Archimedes' bijdrage geweest zou zijn aan de poëtische formulering van de opgave. Deze kwestie komt nader aan de orde in hoofdstuk 3. De kwestie of Archimedes het probleem zelf op had kunnen lossen komt nader aan de orde in de hoofdstukken 3 en 8.
Het tweede deel van de zin brengt minder interpretatieproblemen met zich mee: de claim is dat Archimedes het probleem naar zijn collegawiskundigen in Alexandrië gestuurd heeft, specifiek naar Eratosthenes van Cyrene. Of men in Alexandrië een oplossing of op zijn minst een antwoord wist te bedenken op de opgave is helaas niet bekend. Meer informatie over Archimedes' Alexandrijnse contacten volgt in hoofdstuk 3.

2.2 Inleiding op het probleem

Πληθὺν Ἠελίοιο βοῶν, ὦ ξεῖνε, μέτρησον
    φροντίδ᾽ ἐπιστήσας, εἰ μετέχεις σοφίης,
πόσση ἄρ᾽ ἐν πεδίοις Σικελῆς ποτε βόσκετο νήσου
    Θρινακίης τετραχῇ στίφεα δασσαμένη
χροιὴν ἀλλάσσοντα· τὸ μὲν λευκοῖο γάλακτος,
    κυανέῳ δ᾽ ἕτερον χρώματι λαμπόμενον,
ἄλλο γε μὲν ξανθόν, τὸ δὲ ποικίλον·

[7] De tekst is ontleend aan Lloyd-Jones & Parsons (1983), 77-79. Omdat de tekst niet op alle punten even duidelijk is, heb ik geprobeerd in de vertaling zo dicht mogelijk bij het Grieks te blijven, zodat woord voor woord duidelijk is wat precies in de Griekse tekst staat.

[8] Het werkwoord εὑρίσκω betekent "vinden". Dit kan op verschillende manieren worden uitgelegd, waaronder "(een probleem) aantreffen", "(een oplossing) vinden", "(een opgave) uitvinden", etc.

[9] Zie Benson (2014), 172.

De menigte runderen van Helios, o vreemdeling,[10] tel die
    nadat je je gedachte erop hebt vastgepind, als je deelhebt aan wijsheid,
hoe groot graasde die eens op de vlakten van Sicilië, het eiland
    Thrinakia, in vieren in groepen verdeeld,
die hun huidskleur afwisselden: de ene [had die] van witte melk,
    en door zwarte huid schitterend was de volgende,
een andere weer roodbruin, en een gevlekt;

Het epigram valt onmiddellijk met de deur in huis: de opdracht is om het aantal runderen van Helios uit te rekenen. Helios was de Griekse zonnegod en zijn runderen waren bekend uit de epische traditie, in het bijzonder uit de *Odyssee*. Wanneer Odysseus tijdens zijn omzwervingen aankomt op het eiland Thrinakia, een andere benaming voor Sicilië,[11] treft hij daar de runderen van Helios aan. Van tevoren zijn Odysseus en zijn bemanning al meermaals gewaarschuwd dat ze absoluut van de runderen af moeten blijven, maar door slecht weer worden ze gedwongen langer op het eiland te verblijven. Wanneer het eten opraakt, besluit Odysseus' bemanning om toch een paar runderen te slachten, liever dan van de honger om te komen. De straf van de goden blijft niet uit: door bliksemschichten van Zeus komen alle mannen om, op Odysseus na.[12] In de *Odyssee* wordt ook het aantal runderen gegeven: er waren zeven kuddes bestaande uit elk vijftig runderen en dus 350 runderen in totaal; ook waren er nog net zo veel schapen. Volgens deze beschrijving zijn deze dieren onsterfelijk en krijgen ze geen jongen.[13]

Na een paar verzen uit het epigram weten we al dat de runderen van Helios deze keer anders gerangschikt zijn dan in de *Odyssee*. Er is namelijk sprake van slechts vier kuddes, die bovendien ingedeeld zijn op kleur: een witte kudde, een zwarte, een roodbruine[14] en een gevlekte. In deze scriptie wordt W gehanteerd voor wit, Z voor zwart, R voor roodbruin en G voor gevlekt. Met behulp van de subscripts $_{♂}$, $_{♀}$ en $_{♂+♀}$ wordt aangegeven dat het respectievelijk stieren, koeien en de hele kudde betreft. Zo wordt bijvoorbeeld het aantal zwarte stieren aangegeven met $Z_{♂}$, het aantal witte koeien met $W_{♀}$ en het aantal dieren in de gevlekte kudde - bestaande uit zowel stieren als koeien - met $G_{♂+♀}$. (Dus $G_{♂+♀} = G_{♂} + G_{♀}$.)

2.3 Runderprobleem deel I: verhoudingen van de stieren

                    ἐν δὲ ἑκάστῳ
    στίφει ἔσαν ταῦροι πλήθεσι βριθόμενοι
συμμετρίης τοιῆσδε τετευχότες· ἀργότριχας μὲν
    κυανέων ταύρων ἡμίσει ἠδὲ τρίτῳ
καὶ ξανθοῖς σύμπασιν ἴσους, ὦ ξεῖνε, νόησον,
    αὐτὰρ κυανέους τῷ τετράτῳ τε μέρει

[10] Het woord ξεῖνος kan zowel vreemdeling als vriend betekenen. In de context van een epigram, dat oorspronkelijk een in steen gebeiteld grafschrift was, al dan niet langs een openbare weg, ligt de vertaling "vreemdeling" het meest voor de hand. In de betekenis "vriend" wordt de aanspreekvorm ξεῖνε in elegieën niet gebruikt, en in feite ook niet bij echte vrienden. (Zie Sider (2016), 145.) Het woord wordt gebruikt om gasten welkom te heten, zodat een vertaling als "beste" wellicht beter is. Het is dus onwaarschijnlijk dat Archimedes direct zijn collegawiskundigen in Alexandrië aanspreekt als "vriend". Idem in vers 11, 27 en 42.

[11] In *Od.* 12.127 wordt het eiland waar de runderen van Helios zich bevinden aangeduid met «Θρινακρίη νῆσος» "het eiland Thrinakria". In de Oudheid is dit al geïdentificeerd met de vorm Τρινακρία "driepuntig", "met drie landtongen", wat overeenkomt met de driehoekige vorm van Sicilië. (Zie bijvoorbeeld Thuc. 6.2.) Met Θρινακίη zou dan Θρινακρίη bedoeld worden.

[12] *Od.* 12.261-425.

[13] *Od.* 12.127-141.

[14] Het is niet altijd duidelijk wat kleuren in het Oudgrieks voorstelden. Zodoende wordt ξανθός vaak vertaald als "geel", wat in combinatie met runderen een bijzonder ongelukkige vertaling is. Het lijkt waarschijnlijker dat hier "roodbruin" bedoeld wordt; "blond" zou eventueel ook nog kunnen.

μικτοχρόων καὶ πέμπτῳ, ἔτι ξανθοῖσί τε πᾶσιν.
Τοὺς δ᾽ ὑπολειπομένους ποικιλόχρωτας ἄθρει
ἀργεννῶν ταύρων ἕκτῳ μέρει ἑβδομάτῳ τε
καὶ ξανθοῖς αὐτοὺς πᾶσιν ἰσαζομένους.

en in iedere
groep waren stieren met hun aantallen zwaarwegend
die er toevallig met een zodanige verhouding waren: dat de witharigen
aan van de zwarte stieren de helft en een derde
en aan alle roodbruinen tezamen gelijk waren, o vreemdeling, begrijp dat,
maar de zwarten zowel aan het vierde deel
van de gemengdgekleurden als aan een vijfde, en nog aan alle roodbruinen.
En de overgelaten gevlektgekleurden, observeer dat
aan van de witte stieren een zesde deel en een zevende
en aan alle roodbruinen zij gelijk waren.

Ten eerste worden in vers 7 t/m 16 de verhoudingen tussen de verschillende kleuren stieren gegeven. Opvallend is dat wordt toegevoegd dat de stieren «πλήθεσι βριθόμενοι» waren, “met hun aantallen zwaarwegend”.[15] Men meent wel eens dat de betekenis zou moeten zijn dat er meer stieren waren dan koeien,[16] maar dat is niet wat letterlijk in de tekst staat en daarmee slechts één interpretatie. Als we de versregels omzetten in vergelijkingen, vinden we de volgende drie vergelijkingen voor de verhoudingen van de stieren.

$$W_{♂} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) Z_{♂} + R_{♂} \tag{1}$$

$$Z_{♂} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) G_{♂} + R_{♂} \tag{2}$$

$$G_{♂} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) W_{♂} + R_{♂} \tag{3}$$

2.4 Runderprobleem deel I: verhoudingen van de koeien

Θηλείαισι δὲ βουσὶ τάδ᾽ ἔπλετο· λευκότριχες μὲν
ἦσαν συμπάσης κυανέης ἀγέλης
τῷ τριτάτῳ τε μέρει καὶ τετράτῳ ἀτρεκὲς ἶσαι·
αὐτὰρ κυάνεαι τῷ τετράτῳ τε πάλιν
μικτοχρόων καὶ πέμπτῳ ὁμοῦ μέρει ἰσάζοντο
σὺν ταύροις πάσαις εἰς νομὸν ἐρχομέναις.
Ξανθοτρίχων δ᾽ ἀγέλης πέμπτῳ μέρει ἠδὲ καὶ ἕκτῳ
ποικίλαι ἰσάριθμον πλῆθος ἔχον τετραχῇ.
Ξανθαὶ δ᾽ ἠριθμεῦντο μέρους τρίτου ἡμίσει ἶσαι
ἀργεννῆς ἀγέλης ἑβδομάτῳ τε μέρει.

En voor de vrouwelijke runderen waren het deze [groepen]: de witharigen
waren aan van de gehele zwarte kudde tezamen
zowel het derde deel als een vierde precies gelijk;
maar de zwarten (♀) waren aan zowel het vierde deel weer
van de gemengdgekleurden als een vijfde deel tezamen gelijk,

[15] Zie Sider (2016), 146.
[16] Schreiber (1993). Zie ook Wurm (1830), 196.

terwijl zij allen met de stieren naar weidegrond gingen.[17]
Maar aan van de kudde der roodbruinharigen een vijfde deel en ook een zesde
hadden de gevlekten (♀) een gelijktallige hoeveelheid in vieren.
En de roodbruinen (♀) werden geteld als aan de helft van een derde deel gelijk
van de witte kudde en aan een zevende deel.

Vervolgens worden in vers 17 t/m 26 de verhoudingen tussen de verschillende kleuren koeien gegeven. Merk op dat in al deze vergelijkingen steeds de volledige hoeveelheid runderen van een bepaalde kleur optreedt, zodat de verhoudingen van de koeien mede afhankelijk zijn van de aantallen stieren. Omdat van iedere kleur de stieren slechts in één van deze nieuwe vergelijkingen een rol spelen, zijn de verhoudingen tussen de stieren echter onafhankelijk van de aantallen koeien. Als we de versregels omzetten in vergelijkingen, vinden we de volgende vier vergelijkingen voor de verhoudingen van de koeien.[18]

$$W_{\female} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) Z_{\male+\female} \tag{4}$$

$$Z_{\female} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) G_{\male+\female} \tag{5}$$

$$G_{\female} = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) R_{\male+\female} \tag{6}$$

$$R_{\female} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) W_{\male+\female} \tag{7}$$

2.5 Nawoord bij deel I van het probleem

Ξεῖνε, σὺ δ᾽ Ἠελίοιο βόες πόσαι ἀτρεκὲς εἰπών,
χωρὶς μὲν ταύρων ζατρεφέων ἀριθμόν,
χωρὶς δ᾽ αὖ θήλειαι ὅσαι κατὰ χροιὰν ἕκασται,
οὐκ ἄϊδρίς κε λέγοι᾽ οὐδ᾽ ἀριθμῶν ἀδαής,
οὐ μὴν πώ γε σοφοῖς ἐναρίθμιος.

En vreemdeling, als jij de aantallen (♀) runderen van Helios precies gezegd hebt,
afzonderlijk van goedgevoede stieren het nummer,
en afzonderlijk weer de vrouwelijke, hoeveel alle afzonderlijk (♀) per kleur [zijn],
zul je niet een onwetende genoemd worden, noch een met getallen onbekende,
maar toch ook nog niet een onder de wijzen gerekende.

De zeven vergelijkingen die de verhoudingen van de stieren en de verhoudingen van de koeien weergeven vormen samen het eerste deel van het runderprobleem. In vers 30 wordt voor het oplossen ervan een beloning in het vooruitzicht gesteld: je mag jezelf dan “niet onwetend” noemen en “niet met getallen onbekend”. In vers 31 wordt dit prettige vooruitzicht echter weer onmiddellijk teniet gedaan, omdat je jezelf als je de opgave weet op te lossen nog altijd niet tot de wijzen mag rekenen.

[17] De betekenis van vers 22 is niet geheel duidelijk. Voor deze vertaling, die gezien de context het meest logisch lijkt, zou «πάσαις ... ἐρχομέναις» eigenlijk vervangen moeten worden door «πάσῶν ... ἐρχομένων» zodat er een *genitivus absolutus* staat, zoals Struve voorstelt. (Zie Lloyd-Jones & Parsons (1983), 78.) Een *dativus absolutus* komt in het Grieks niet voor.

[18] De oplettende lezer zal het wellicht zijn opgevallen dat in de omzetting van tekst naar vergelijking het woord «τετραχῇ» “in vieren” in vers 24 verdwenen lijkt. Door de meeste wetenschappers die het runderprobleem bespreken wordt dit woord inderdaad genegeerd, omdat het de regelmaat in de vergelijkingen verstoort. Dit is wellicht niet helemaal terecht. In eerste instantie wordt in deze scriptie het probleem behandeld zoals gebruikelijk is, zonder inachtneming van het woord «τετραχῇ». In hoofdstuk 9 wordt deze kwestie nader besproken.

2.6 Runderprobleem deel II: geometrische condities

Ἀλλ᾽ ἴθι φράζευ
καὶ τάδε πάντα βοῶν Ἠελίοιο πάθη.
Ἀργότριχες ταῦροι μὲν ἐπεὶ μιξαίατο πληθὺν
κυανέοις, ἵσταντ᾽ ἔμπεδον ἰσόμετροι
εἰς βάθος εἰς εὖρός τε, τὰ δ᾽ αὖ περιμήκεα πάντη
πίμπλαντο πλίνθου Θρινακίης πεδία.
Ξανθοὶ δ᾽ αὖτ᾽ εἰς ἓν καὶ ποικίλοι ἀθροισθέντες
ἵσταντ᾽ ἀμβολάδην ἐξ ἑνὸς ἀρχόμενοι
σχῆμα τελειοῦντες τὸ τρικράσπεδον οὔτε προσόντων
ἀλλοχρόων ταύρων οὔτ᾽ ἐπιλειπομένων.

Maar kom, overdenk
ook al deze eigenschappen van de runderen van Helios.
Witgehaarde stieren mengden eens onderling hun menigte
met de zwarten, zij gingen stevig staan, gelijk in maat
naar diepte en naar breedte, en nu weer werden de heel grote
vlakten van Thrinakia in het geheel gevuld met een bouwsteen.
Maar nadat dan weer de roodbruinen tot één en de gevlekten verzameld waren,
gingen zij staan, met een omhoogwerping vanaf één beginnend
aan een figuur, completerend de driehoek,[19] terwijl noch andersgekleurde
stieren aanwezig waren, noch [er stieren] werden achtergelaten.

Dat zelfs het oplossen van het eerste deel van het runderprobleem nog niet betekent dat je jezelf tot de wijzen mag rekenen, vormt wellicht een teleurstelling. Daarom wordt de lezer met «Ἀλλ᾽ ἴθι» "Maar kom" snel aangespoord om ook nog twee aanvullende voorwaarden in beschouwing te nemen. Samen met de voorwaarden voor het eerste deel vormen deze het tweede deel van het runderprobleem. Hier gaat het niet langer om verhoudingen, maar worden twee geometrische condities toegevoegd. Het is echter niet volledig duidelijk hoe deze condities moeten worden opgevat.
Enerzijds wordt vermeld dat de witte stieren en de zwarte stieren samen een «πλίνθος» vormden, oftewel een "baksteen". Het is echter onduidelijk welke vorm een πλίνθος had: die van een rechthoek of die van een vierkant. In de traditionele benadering van het probleem wordt uitgegaan van een vierkant.[20] De versie waarbij van een rechthoek wordt uitgegaan staat bekend als *Wurms probleem* en wordt besproken in hoofdstuk 8. Anderzijds wordt vermeld dat de roodbruine en de gevlekte stieren samen een driehoek vormden, die begon bij één. Soms meent men dat het aantal roodbruine en gevlekte stieren min één een driehoek vormde,[21] maar de genoemde «ἀμβολάδη» "omhoogwerping" suggereert dat bedoeld wordt dat één stier op de eerste rij van de driehoek stond, twee op de tweede rij, etc. Als we de versregels omzetten in vergelijkingen, vinden we de volgende twee vergelijkingen voor de geometrische condities.

$$W_{\male} + Z_{\male} = x^2 \tag{8}$$

$$R_{\male} + G_{\male} = \frac{q\,(q+1)}{2} \tag{9}$$

[19] Letterlijk betekent τρικράσπεδον "drierand". Dit woord is een zogenaamde *hapax*, dat wil zeggen in de hele Griekse literatuur alleen op deze ene plek overgeleverd. (Sider (2016), 148.)
[20] Sider (2016), 148.
[21] Zie Bártlová (2012), 106.

2.7 Nawoord bij deel II van het probleem

Ταῦτα συνεξευρὼν καὶ ἐνὶ πραπίδεσσιν ἀθροίσας
καὶ πληθέων ἀποδούς, ξεῖνε, τὰ πάντα μέτρα
ἔρχεο κυδιόων νικηφόρος ἴσθι τε πάντως
κεκριμένος ταύτῃ γ᾽ ὄμπνιος ἐν σοφίῃ.

Nadat je die dingen samen uitgevonden hebt en in je geest verzameld hebt
en van de hoeveelheden, vreemdeling, al de metingen overgedragen hebt,
ga dan jubelend de overwinning dragend en weet dat je geheel en al
beoordeeld [bent] als goedgevoed in díé wijsheid.

Na het oplossen van het eerste deel van het runderprobleem mag je jezelf nog niet tot de wijzen rekenen. Als je echter ook de oplossing met inachtneming van het tweede deel weet te vinden, dan mag je jubelend de overwinning dragen. Merk op dat nu niet meer gevraagd wordt naar de precieze hoeveelheden, maar dat in plaats daarvan gevraagd wordt alles in je geest te verzamelen en de metingen over te dragen. Met andere woorden, het lijkt voldoende om een methode te presenteren waarmee je de gevraagde getallen kunt uitrekenen, zonder ze daadwerkelijk uit te rekenen. Aangezien de getallen zo ontzettend groot worden, is dat erg prettig.
Tot slot zou je verwachten dat je na het oplossen van het complete runderprobleem jezelf eindelijk tot de wijzen mag rekenen. Maar dan komt er toch een teleurstelling: je mag jezelf slechts goedgevoed noemen in één bepaalde wijsheid. Het woord «ὄμπνιος» "goedgevoed" is een ongebruikelijk woord, dat iets te maken heeft met mais of graan. Er is zelfs gesuggereerd dat het zou refereren aan de bemanning van Odysseus, die zich tegoed deed aan Helios' runderen.[22] Het is dus maar de vraag of het willen oplossen van het runderprobleem wijs is, en of je er wel wijs van wordt.

[22] Benson (2014), 185-186.

3 Leven en werk van Archimedes

Archimedes leefde in de tweede eeuw v.Chr. in Syracuse, een Griekse kolonie in het zuidoosten van Sicilië. Bij de lokale bevolking werd hij het bekendst door zijn verschillende soorten oorlogsmachines en hijskranen. Met de "klauw van Archimedes" kon hij bijvoorbeeld schepen laten kapseizen. Toen Syracuse in 212 v.Chr. door de Romeinen belegerd werd, wist hij hen met verschillende verdedigingsmachines lang buiten de deur te houden, maar uiteindelijk vonden de Romeinen toch een weg om de stad in te nemen. Er kwam een soldaat om de toen 75-jarige Archimedes mee te nemen. Deze had enige cirkels in het zand getekend en vroeg de soldaat om alsjeblieft de cirkels niet te verstoren. De soldaat verloor zijn geduld en stak Archimedes dood.
Toen hij nog jong was, had Archimedes wiskunde gestudeerd in Alexandrië bij leerlingen van Euclides, waaronder ook Eratosthenes van Cyrene, aan wie Archimedes het runderprobleem zou hebben gestuurd. Wiskundig gezien behaalde Archimedes enorme resultaten. Zo wist hij bijvoorbeeld de waarde van π te benaderen tot $\frac{223}{71} < \pi < \frac{220}{70}$ en had hij een op zes decimalen nauwkeurige rationale benadering voor de wortel uit 3: $\sqrt{3} \approx \frac{1351}{780}$. Deze beide resultaten verschenen in zijn werk «Κύκλου μέτρησις» "Het meten van de cirkel", onderdeel van een briefcorrespondentie met de wiskundige Dositheos van Pelousion. Ook met grote getallen hield Archimedes zich bezig, zoals blijkt uit het werk «Ψαμμίτης» "De zandrekenaar": een aan koning Gelon II van Syracuse gerichte verhandeling waarin Archimedes een bovengrens vindt voor het aantal zandkorrels op aarde. Dat doet hij door eerst aan de hand van astronomische berekeningen een bovengrens vast te stellen voor de grootte van het universum, om vervolgens te berekenen hoeveel zandkorrels maximaal in het universum zouden kunnen passen. De bovengrens voor het aantal zandkorrels komt uit op 10^{63}, wat nog lang niet zoveel is als de aantallen runderen in de kleinste oplossing van het runderprobleem. En passant ontwikkelde Archimedes een eigen systeem om grote getallen op te kunnen schrijven. Op beide werken zou Apollonius van Perga gereageerd hebben met eigen werken met verbeteringen; helaas zijn deze werken verloren gegaan. Naast deze twee werken bewees Archimedes ook nog veel meetkundige resultaten.

We weten niet zeker of en op welke manier Archimedes daadwerkelijk iets met het runderprobleem te maken had. Bedacht Archimedes het runderprobleem? En schreef hij zelf poëzie of goot iemand anders het in elegische disticha? Hier is veel over gespeculeerd, maar uiteraard zijn deze speculaties niet onomstotelijk bewijsbaar. Een interessant idee werd in 1986 door Knorr opgeworpen, namelijk dat Eratosthenes het eerste deel zou hebben geschreven en Archimedes als antwoord het probleem zou hebben aangevuld met het tweede gedeelte.[23] De gedachte van een reactie is populair, want er is bijvoorbeeld ook geopperd door Hultsch (eind negentiende eeuw) dat het runderprobleem een reactie was op Apollonius' reacties op Archimedes' werken.[24] Benson laat vanuit een filologische benadering zien dat het epigram met het runderprobleem poëtisch gezien heel vernuftig in elkaar zit, met veel woordspelingen en originaliteit.[25] Zijn conclusie is dat Archimedes het probleem en het gedicht zelf geschreven heeft, maar op dit punt is de argumentatie weinig overtuigend. Vanuit een hypothese dat Archimedes het gedicht geschreven heeft, wordt geconcludeerd dat dat inderdaad zo was, maar het enige argument lijkt te zijn dat het gedicht zoveel sporen van genialiteit bevat dat niemand anders dan Archimedes het geschreven zou kunnen hebben. Dat Archimedes over het algemeen proza in het Dorisch schreef en geen poëzie in het Ionisch wordt niet be-

[23] Zie Vardi (1998), 317; Bártlová (2012), 105.
[24] Zie Vardi (1998), 317; Bártlová (2012), 105. Bártlová merkt op dat deze hypothese in een uitgave van de encyclopedie voor oudheidkunde van Pauly is verschenen, maar in een latere uitgave wegens zijn speculatieve karakter weer verwijderd is.
[25] Benson (2014).

sproken. Krumbiegel houdt het midden en denkt dat Archimedes wel het probleem bedacht heeft, maar niet het gedicht geschreven heeft.[26] Een vaker geaccepteerde theorie is dat het probleem alleen aan Archimedes is toegeschreven omdat het zo ingewikkeld is.[27] We zouden uiteraard graag de geniale Archimedes alle krediet willen geven voor het runderprobleem, maar of dat realistisch is, dat blijft voorlopig de vraag.

Er is ook veel gespeculeerd over de vraag of Archimedes het probleem zelf kon of had kunnen oplossen. Gezien het zeer grote aantal runderen dat de oplossing vormt, is het zeer onwaarschijnlijk dat Archimedes ooit het precieze getal heeft uitgerekend: zelfs met een schrijfsnelheid van drie cijfers per seconde zou het meer dan negentien uur duren om alleen al het eindantwoord op te schrijven.[28] Een betere vraag is of Archimedes wist dat er een oplossing bestond en zo ja, of Archimedes ook een methode had waarmee deze oplossing theoretisch berekend zou kunnen worden. Tegenwoordig wordt vaak gedacht van wel, omdat de manier waarop Archimedes zijn goede benaderingen voor π en $\sqrt{3}$ vond, suggereert dat hij ook wel in staat was met de Pellvergelijking te werken, de traditionele methode om het runderprobleem op te lossen.[29]

[26] Krumbiegel (1880), 125-128.
[27] Bártlová (2012), 104-105.
[28] Bártlová (2012), 105.
[29] Vardi (1998), 317-318. Maar zie ook Nygrén (2001), die een alternatieve oplossingsmethode heeft gevonden, waarover meer in hoofdstuk 8, en claimt dat Archimedes die theoretisch zou kunnen hebben gehanteerd.

4 Ontdekking en oplossing van het runderprobleem

Het runderprobleem is lange tijd verloren geweest; het was niet samen met Archimedes' andere werken overgeleverd. Voor 1773 kenden we slechts twee hints naar het bestaan van een dergelijk probleem. Cicero (eerste eeuw v.Chr.) noemt twee keer in zijn brieven aan Atticus een lastig probleem een «πρόβλημα Ἀρχιμήδειον» "Archimedisch probleem".[30] De tweede hint is explicieter en is er in de vorm van een scholion[31] bij een dialoog van Plato. Daar wordt vermeld dat er een probleem is dat bekend staat als het door Archimedes bedachte runderprobleem.[32]
In 1773 werd in een bibliotheek in het Duitse Wolfenbüttel door Lessing het runderprobleem ontdekt, samen met nog een paar andere werken. Later is ook nog in Parijs een manuscript gevonden.[33] Bij het runderprobleem bevond zich tevens een scholion met een oplossing.[34] Het scholion bestaat uit twee delen. In het eerste deel worden zonder berekening aantallen gegeven voor de kuddes runderen en het totale aantal en vervolgens ook de afzonderlijke aantallen voor stieren en koeien van een bepaalde kleur. In het tweede deel wordt de opgave geparafraseerd; deze parafrase komt overeen met de negen vergelijkingen die we gevonden hebben in hoofdstuk 2. De oplossing in het scholion is correct voor deel I van het probleem (en is het tachtigvoudige van de kleinst mogelijke oplossing), maar helaas niet voor het complete probleem. Lessing heeft het probleem na ontdekking uitgegeven, helaas zonder vertaling, inclusief een oplossing door Leiste.[35] Leiste lost het eerste deel van het probleem op en weet het complete probleem te herleiden tot een Pellvergelijking. Hiervan meldt hij alleen dat deze theoretisch oplosbaar is, maar hij doet er geen poging toe.
Hierna storten enkele Duitse wetenschappers zich op het probleem, die in eerste instantie alleen maar verwarring zaaien. Vader en zoon Struve geven het runderprobleem opnieuw uit in 1821, maar noemen de verzen 31 t/m 44, deel II van het probleem, niet authentiek. Het probleem zou volgens hen door een niet nader genoemde wiskundige gemaakt zijn, die de rest van zijn leven in zijn vuistje zou hebben gelachen dat niemand het "Archimedische" probleem kon oplossen, hijzelf incluis.[36] Hierna volgen artikelen van Hermann in 1828 (in het Latijn) en van Wurm in 1830 als bespreking van het werk van Hermann. Wurm kijkt als eerste echt kritisch naar de tekst en doet allerlei suggesties voor alternatieve interpretaties. (Deze worden nader besproken in hoofdstuk 9.) Daarna volgen nog enkele besprekingen, de een nuttig, de ander verwarring zaaiend, en ook wordt er beweerd dat Gauß (1777-1855) een complete oplossing voor het runderprobleem zou hebben gevonden, alleen is daar verder helaas niets van bekend.[37] In 1880 komt de echte doorbraak. In een gezamenlijk artikel waarin Krumbiegel de literaire kant en Amthor de wiskundige kant voor zijn rekening neemt,[38] weet Amthor het aantal cijfers en de eerste vier cijfers van de eindoplossing te berekenen; van de eerste vier cijfers heeft hij de eerste drie goed. In 1895 weten Bell, Fish en Richard na vier jaar hard werk vervolgens de eerste 32 cijfers uit te rekenen, waarvan de eerste 30 ook daadwerkelijk correct zijn.[39]
Met de komst van computers waren Williams, German en Zarnke in 1965 voor het eerst in

[30] Cic. *Att.* XII, 4 & XIII, 28. Zie Bártlová (2012), 105.
[31] Een scholion is een aantekening bij een tekst, vaak een opmerking of een verklaring. Scholia zijn over het algemeen in later tijden toegevoegd (en dus niet van de oorspronkelijke auteur van de tekst) en over het algemeen slecht te dateren.
[32] Zie Wurm (1830), 194 en Bártlová (2012), 105.
[33] Sider (2016), 142.
[34] Een Duitse vertaling is opgenomen in Krumbiegel (1880), 135-136.
[35] Lessing (1773), 421-446. De oplossing van Leiste is te vinden in Lessing (1773), 438-446.
[36] Zie Wurm (1830), 194.
[37] Krumbiegel (1880), 123.
[38] Krumbiegel (1880) & Amthor (1880).
[39] Zie Vardi (1998), 317.

staat het complete getal uit te rekenen.[40] In 1981 was Nelson al in staat om deze berekening in 10 minuten te doen op een CRAY-1-supercomputer; tevens berekende hij vijf nieuwe (grotere) oplossingen. De kleinste oplossing printte hij volledig als 47 pagina's computeroutput in het *Journal of Recreational Mathematics*.[41] Een goede, moderne, volledige bespreking van alle wiskundige aspecten van het runderprobleem werd gegeven door Vardi in 1998;[42] uiteraard zijn er meerdere moderne besprekingen. Inmiddels is de techniek zo ver gevorderd dat een oplossing met behulp van *Mathematica* in slechts één seconde berekend kan worden.[43]

[40] Zie Vardi (1998), 317.
[41] Nelson (1981).
[42] Vardi (1998).
[43] Bártlová (2012), 104 & 106-107.

5 Niet onwetend, maar ook nog niet wijs (deel I)

Deel I van het runderprobleem (vers 1 t/m 31) lijkt wellicht een moeilijke opgave, maar met enige wiskundige handigheid is het vinden van een oplossing niet bijzonder lastig. Wie echter alleen met pen en papier mag rekenen heeft enig doorzettingsvermogen nodig, want ondanks dat het probleem er heel mooi uitziet treden in de berekening al snel vervelende breuken op. Het eerste deel van het probleem komt feitelijk neer op het oplossen van zeven lineaire vergelijkingen in acht onbekenden.

In de meeste artikelen over het runderprobleem wordt dit eerste deel slordig behandeld. Wiskundigen zijn geneigd om het aan te duiden als “makkelijk” en geven vaak ofwel een stukje computercode, ofwel een schets van de oplossingsmethode waar een kritische lezer zelf nog veel aan dient te rekenen om alle stappen te verifiëren. Classici slaan vaak iedere vorm van rekenen over en beperken zich liever tot literaire observaties. Daarom, en om inzichtelijk te maken dat voor de oplossing van het eerste deel van het probleem slechts elementaire wiskunde benodigd is, volgt in dit hoofdstuk een specifieke berekening voor het eerste deel van het runderprobleem.[44] In hoofdstuk 9 zullen alternatieve interpretaties van het runderprobleem worden besproken. Ook met het oog daarop is het nuttig om een goed beeld te hebben van deze relatief eenvoudige oplossingsmethode.

In hoofdstuk 2 hebben we de tekst van het runderprobleem omgezet in de zeven onderstaande lineaire vergelijkingen.

$$W_{♂} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) Z_{♂} + R_{♂} \qquad (1)$$

$$Z_{♂} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) G_{♂} + R_{♂} \qquad (2)$$

$$G_{♂} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) W_{♂} + R_{♂} \qquad (3)$$

$$W_{♀} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) Z_{♂+♀} \qquad (4)$$

$$Z_{♀} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) G_{♂+♀} \qquad (5)$$

$$G_{♀} = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) R_{♂+♀} \qquad (6)$$

$$R_{♀} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) W_{♂+♀} \qquad (7)$$

Omdat in de vergelijkingen (4) t/m (7) sprake is van gehele kuddes lijkt het er in eerste instantie wellicht op dat er 12 onbekenden zijn. Uiteraard is elke gehele kudde te schrijven als som van het aantal stieren en het aantal koeien, zodat er in feite toch maar 8 onbekenden zijn. Na het optellen van de breuken en het opsplitsen van de gehele kuddes in stieren en koeien zien de vergelijkingen er als volgt uit.

$$W_{♂} = \frac{5}{6} Z_{♂} + R_{♂} \qquad (1)$$

$$Z_{♂} = \frac{9}{20} G_{♂} + R_{♂} \qquad (2)$$

$$G_{♂} = \frac{13}{42} W_{♂} + R_{♂} \qquad (3)$$

$$W_{♀} = \frac{7}{12} \left(Z_{♂} + Z_{♀}\right) \qquad (4)$$

$$Z_{♀} = \frac{9}{20} \left(G_{♂} + G_{♀}\right) \qquad (5)$$

$$G_{♀} = \frac{11}{30} \left(R_{♂} + R_{♀}\right) \qquad (6)$$

$$R_{♀} = \frac{13}{42} \left(W_{♂} + W_{♀}\right) \qquad (7)$$

De eerste stap is om de verhoudingen van de hoeveelheden stieren uit te rekenen. Merk op dat alleen de eerste drie vergelijkingen hier invloed op hebben. Eerst berekenen we de

[44] Deze berekening is gebaseerd op Bártlová (2012), 100-101. Zij doet de berekening echter via een net iets andere route.

verhouding tussen $W_{\male}$ en $R_{\male}$ door de eerste vergelijking alleen in termen van $W_{\male}$ en $R_{\male}$ te schrijven. Hiervoor schrijven we $Z_{\male}$ uit met behulp van de tweede vergelijking en de dan optredende $G_{\male}$ met behulp van de derde vergelijking.

$$
\begin{aligned}
W_{\male} &\overset{(1)}{=} \frac{5}{6} Z_{\male} + R_{\male} \\
&\overset{(2)}{=} \frac{5}{6} \left(\frac{9}{20} G_{\male} + R_{\male} \right) + R_{\male} \\
&\overset{(3)}{=} \frac{5}{6} \left(\frac{9}{20} \left(\frac{13}{42} W_{\male} + R_{\male} \right) + R_{\male} \right) + R_{\male} \\
&= \frac{13}{112} W_{\male} + \frac{3}{8} R_{\male} + \frac{5}{6} R_{\male} + R_{\male}
\end{aligned}
$$

Dit is equivalent met $\frac{99}{112} W_{\male} = \frac{53}{24} R_{\male}$, oftewel $W_{\male} = \frac{112}{99} \cdot \frac{53}{24} R_{\male} = \frac{5\,936}{2\,376} R_{\male} = \frac{742}{297} R_{\male}$, en dus geldt dat $297\, W_{\male} = 742\, R_{\male}$. Omdat $297 = 3^3 \cdot 11$ en $742 = 2 \cdot 7 \cdot 53$ relatief priem zijn, volgt hieruit dat $W_{\male} = 742\, n$ en $R_{\male} = 297\, n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Met behulp van deze waarden kunnen we ook de waarden voor $G_{\male}$ en $Z_{\male}$ uitrekenen. Dit is nu alleen nog maar een kwestie van invullen.

$$
\begin{aligned}
G_{\male} &= \frac{13}{42} W_{\male} + R_{\male} = \frac{13}{42} \cdot 742\, n + 297\, n = \frac{689}{3} n + \frac{891}{3} n = \frac{1\,580}{3} n \\
Z_{\male} &= \frac{9}{20} G_{\male} + R_{\male} = \frac{9}{20} \cdot \frac{1\,580}{3} n + 297\, n = 237\, n + 297\, n = 534\, n
\end{aligned}
$$

Omdat het aantal stieren een geheel getal dient te zijn, geldt nu nog voor $G_{\male}$, en daarmee dus automatisch ook voor de andere stieren, dat $n \in 3\mathbb{N}$. Door overal met 3 te vermenigvuldigen kunnen we weer $n \in \mathbb{N}$ hanteren. We vinden zo alle oplossingen voor de eerste drie vergelijkingen: $W_{\male} = 2\,226\, n$, $Z_{\male} = 1\,602\, n$, $G_{\male} = 1\,580\, n$ en $R_{\male} = 891\, n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Met behulp van deze waarden kunnen we, met inachtneming van de verhoudingen tussen de stieren, ook de verhoudingen tussen de koeien toevoegen. Voor $W_{\female}$ houdt dat wederom herhaaldelijk substitueren in: door in de vierde vergelijking $Z_{\female}$ uit te schrijven met behulp van de vijfde vergelijking en de dan optredende $G_{\female}$ en $R_{\female}$ met behulp van respectievelijk de zesde en de zevende vergelijking, vinden we de waarde voor $W_{\female}$. Voor $W_{\male}$, $Z_{\male}$, $G_{\male}$ en $R_{\male}$ worden steeds de hierboven berekende verhoudingen ingevuld.

$$
\begin{aligned}
W_{\female} &\overset{(4)}{=} \frac{7}{12} \left(Z_{\male} + Z_{\female} \right) \\
&\overset{(5)}{=} \frac{7}{12} \cdot 1\,602\, n + \frac{7}{12} \left(\frac{9}{20} G_{\male} + \frac{9}{20} G_{\female} \right) \\
&\overset{(6)}{=} \frac{1\,869}{2} n + \frac{21}{80} \cdot 1\,580\, n + \frac{21}{80} \left(\frac{11}{30} R_{\male} + \frac{11}{30} R_{\female} \right) \\
&\overset{(7)}{=} \frac{1\,869}{2} n + \frac{1\,659}{4} n + \frac{77}{800} \cdot 891\, n + \frac{77}{800} \left(\frac{13}{42} W_{\male} + \frac{13}{42} W_{\female} \right) \\
&= \frac{1\,869}{2} n + \frac{1\,659}{4} n + \frac{68\,607}{800} n + \frac{143}{4\,800} \cdot 2\,226\, n + \frac{143}{4\,800} W_{\female} \\
&= \frac{747\,600}{800} n + \frac{331\,800}{800} n + \frac{68\,607}{800} n + \frac{53\,053}{800} n + \frac{143}{4\,800} W_{\female}
\end{aligned}
$$

Dit is equivalent met $\frac{4\,657}{4\,800} W_{\female} = \frac{1\,201\,060}{800} n = \frac{60\,053}{40} n$.

Hieruit volgt dat $W_{\female} = \frac{4\,800}{4\,657} \cdot \frac{60\,053}{40} n = \frac{288\,254\,400}{186\,280} n = \frac{7\,206\,360}{4\,657} n$.

Voor de overige koeien is het nu wederom slechts invulwerk.

$$
\begin{aligned}
R_{♀} &= \frac{13}{42}\left(W_{♂} + W_{♀}\right) = \frac{13}{42}\cdot 2\,226\,n + \frac{13}{42}\cdot\frac{7\,206\,360}{4\,657}\,n = 689\,n + \frac{2\,230\,540}{4\,657}\,n = \frac{5\,439\,213}{4\,657}\,n \\
G_{♀} &= \frac{11}{30}\left(R_{♂} + R_{♀}\right) = \frac{11}{30}\cdot 891\,n + \frac{11}{30}\cdot\frac{5\,439\,213}{4\,657}\,n = \frac{3\,267}{10}\,n + \frac{19\,943\,781}{46\,570}\,n = \frac{3\,515\,820}{4\,657}\,n \\
Z_{♀} &= \frac{9}{20}\left(G_{♂} + G_{♀}\right) = \frac{9}{20}\cdot 1\,580\,n + \frac{9}{20}\cdot\frac{3\,515\,820}{4\,657}\,n = 711\,n + \frac{1\,582\,119}{4\,657}\,n = \frac{4\,893\,246}{4\,657}n
\end{aligned}
$$

Opnieuw geldt nu dat we de breuken in de factoren weg moeten zien te krijgen, aangezien we oplossingen in gehele getallen zoeken. Na vermenigvuldiging van alle verhoudingen met 4 657 vinden we alle mogelijke oplossingen.

$$
\begin{aligned}
W_{♂} &= 10\,366\,482\,n & \qquad W_{♀} &= 7\,206\,360\,n \\
Z_{♂} &= 7\,460\,514\,n & Z_{♀} &= 4\,893\,246\,n \\
G_{♂} &= 7\,358\,060\,n & G_{♀} &= 3\,515\,820\,n \\
R_{♂} &= 4\,149\,387\,n & R_{♀} &= 5\,439\,213\,n
\end{aligned}
$$

Voor deel I van het runderprobleem geldt bovenstaande oplossing voor alle $n \in \mathbb{N}$. Wie tot hier is gekomen is volgens Archimedes noch een onwetende, noch een met getallen onbekende. Wie echter ook tot de wijzen gerekend wil worden, zal ook deel II van het probleem in acht moeten nemen en verder moeten rekenen aan het complete probleem.

6 De route tot het jubelen (deel II)

Voor het complete probleem hebben we, naast de voorwaarden uit deel I, te maken met twee extra voorwaarden. Zoals we al zagen in hoofdstuk 2 is de eerste extra voorwaarde dat het aantal witte en het aantal zwarte stieren samen een kwadraat vormt en is de tweede extra voorwaarde dat het aantal roodbruine en het aantal gevlekte stieren samen een driehoeksgetal vormt. In totaal komen we daarmee op negen vergelijkingen, namelijk de zeven die we in het vorige hoofdstuk al gebruikten en de twee nieuwe.

$$W_{♂} + Z_{♂} = x^2 \tag{8}$$

$$R_{♂} + G_{♂} = \frac{q\,(q+1)}{2} \tag{9}$$

De in het vorige hoofdstuk berekende oplossing voor de eerste zeven vergelijkingen is het uitgangspunt voor het oplossen van het complete probleem.

$$\begin{aligned} W_{♂} &= 10\,366\,482\,n & & & W_{♀} &= 7\,206\,360\,n \\ Z_{♂} &= 7\,460\,514\,n & W_{♂} + Z_{♂} &= 17\,826\,996\,n & Z_{♀} &= 4\,893\,246\,n \\ G_{♂} &= 7\,358\,060\,n & R_{♂} + G_{♂} &= 11\,507\,447\,n & G_{♀} &= 3\,515\,820\,n \\ R_{♂} &= 4\,149\,387\,n & & & R_{♀} &= 5\,439\,213\,n \end{aligned}$$

Een eerste stap om tot de oplossing van het complete probleem te komen, is het uitrekenen van de extra condities die de achtste vergelijking met zich meebrengt. De oplossing van deel I van het probleem moet nu dus ook voldoen aan de voorwaarde $W_{♂}+Z_{♂} = 17\,826\,996\,n = x^2$. Priemfactoriseren geeft dat $17\,826\,996\,n = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4\,657 \cdot n = x^2$ en daaruit volgt dat $n = 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4\,657 \cdot m^2 = 4\,456\,749\,m^2$. De oplossing van het runderprobleem met inachtneming van de eerste acht vergelijkingen wordt dus verkregen door in alle uitkomsten in de oplossing van deel I n te vervangen door $4\,456\,749\,m^2$. De oplossing geldt dan voor alle $m \in \mathbb{N}$. De getallen zijn iets groter dan bij de oplossing van slechts de eerste zeven vergelijkingen, maar met wat moeite nog steeds prima met de hand uit te rekenen. Voor de eerste acht vergelijkingen vinden we op deze manier de volgende oplossing.

$$\begin{aligned} W_{♂} &= 46\,200\,808\,287\,018\,m^2 & W_{♀} &= 32\,116\,937\,723\,640\,m^2 \\ Z_{♂} &= 33\,249\,638\,308\,986\,m^2 & Z_{♀} &= 21\,807\,969\,217\,254\,m^2 \\ G_{♂} &= 32\,793\,026\,546\,940\,m^2 & G_{♀} &= 15\,669\,127\,269\,180\,m^2 \\ R_{♂} &= 18\,492\,776\,362\,863\,m^2 & R_{♀} &= 24\,241\,207\,098\,537\,m^2 \end{aligned}$$

Goed uit te rekenen is de oplossing ook nog als we alleen de eerste zeven vergelijkingen bekijken in combinatie met de negende vergelijking. In dat geval moet de oplossing van het eerste deel van het probleem voldoen aan de voorwaarde $R_{♂} + G_{♂} = 11\,507\,447\,n = \frac{q\,(q+1)}{2}$, oftewel $q^2 + q - 2 \cdot 11\,507\,447\,n = 0$. Hierbij geeft q het aantal rijen van de driehoek aan.[45] Omdat het aantal rijen van de driehoek een geheel getal moet zijn en we dus een geheeltallige oplossing zoeken voor deze kwadratische vergelijking, moet de discriminant van de vergelijking een kwadraat zijn. Hieruit volgt dat $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2 \cdot 11\,507\,447\,n) = k^2$,

[45] Vardi vergeet een 0 bij de waarde van $G_{♂}$ wanneer hij $R_{♂}$ en $G_{♂}$ optelt en de kwadratische vergelijking opstelt, waarbij hij tweemaal foutief het getal 573 634 017 639 als som geeft in plaats van 1 351 238 949 081. Hij geeft wel de juiste oplossingen voor de aantallen stieren en koeien en voor q. Zie Vardi (1998), 308.

oftewel $D = 1 + 92\,059\,576\,n = k^2$, oftewel $k^2 \equiv 1 \pmod{92\,059\,576}$. Om deze vergelijking op te lossen is het handig om de Chinese reststelling te gebruiken.[46]

Stelling 6.1 (Chinese reststelling)**.** *Laten $m_1, m_2, \dots, m_n$ gehele getallen zijn die onderling relatief priem zijn, oftewel $ggd(m_i, m_j) = 1$ voor alle $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$. Bekijk $m = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n$ en de n vergelijkingen $x = a_1 \pmod{m_1}, x = a_2 \pmod{m_2}, \dots, x = a_n \pmod{m_n}$ voor gekozen $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$.*
Dan is er een unieke geheeltallige oplossing x waarvoor geldt dat $0 \leq x < m$. De oplossing wordt gegeven door $x = x^* \pmod{m}$ met $x^* = \sum_{i=1}^{n} a_i q_i \frac{m}{m_i} \pmod{m}$. Hierin is $q_i \equiv (\frac{m}{m_i})^{\varphi(m_i)-1} \pmod{m_i}$, waarin φ de Euler-φ-functie is (oftewel: $\varphi(m_i)$ is het aantal gehele getallen k met $1 \leq k \leq m_i$ waarvoor $ggd(k, m_i) = 1$).

Bewijs. Voor een bewijs verwijs ik naar het boek van Niven, Zuckerman & Montgomery.[47] □

Priemfactoriseren van 92 059 576 geeft $92\,059\,576 = 2^3 \cdot 7 \cdot 353 \cdot 4\,657$. Wanneer een $k \in \mathbb{Z}$ voldoet aan $k^2 \equiv 1 \pmod{92\,059\,576}$, dan geldt dus ook $k^2 \equiv 1 \pmod{2^3}$, $k^2 \equiv 1 \pmod{7}$, $k^2 \equiv 1 \pmod{353}$ en $k^2 \equiv 1 \pmod{4\,657}$. Wegens de Chinese reststelling geldt dit andersom ook. We zoeken dus een k waarvoor k^2 de waarde 1 oplevert, zowel modulo 2^3 als modulo 7 als modulo 353 als modulo 4 657.
Bekijk ten eerste de vergelijking $k^2 \equiv 1 \pmod{2^3}$. Modulo $2^3 = 8$ geldt dat $1^2 \equiv 3^2 \equiv 5^2 \equiv 7^2 \equiv 1$, dat $2^2 \equiv 6^2 \equiv 4$ en dat $0^2 \equiv 4^2 \equiv 0$. Hieruit volgt dat $k \equiv 1 \pmod{2}$.
Bekijk ten tweede de vergelijking $k^2 \equiv 1 \pmod{p}$ waarbij p een oneven priemgetal is. Stel dat k een oplossing is, dan geldt $k^2 - 1 \equiv 0 \pmod{p}$, oftewel $(k+1)(k-1) \equiv 0 \pmod{p}$, oftewel $p \mid (k+1)(k-1)$. Omdat p priem is geldt dat ofwel (a) $p \mid (k+1)$, ofwel (b) $p \mid (k-1)$. In geval (a) geldt dat $(k+1) \equiv 0 \pmod{p}$ zodat $k \equiv -1 \pmod{p}$. In geval (b) geldt dat $(k-1) \equiv 0 \pmod{p}$ zodat $k \equiv 1 \pmod{p}$. Het is gemakkelijk te controleren dat beide oplossingen aan de vergelijking voldoen. Hieruit volgt dat $k \equiv \pm 1 \pmod{p}$.
Om nu alle oplossingen k te verkrijgen die voldoen aan $k^2 \equiv 1 \pmod{92\,059\,576}$, moet bepaald worden voor welke k gelijktijdig aan de vier condities $k^2 \equiv 1 \pmod{2^3}$, $k^2 \equiv 1 \pmod{7}$, $k^2 \equiv 1 \pmod{353}$ en $k^2 \equiv 1 \pmod{4\,657}$ wordt voldaan. Zoals we net hebben gezien is dit equivalent met het gelijktijdig voldoen aan de vier condities $k \equiv 1 \pmod{2}$, $k \equiv \pm 1 \pmod{7}$, $k \equiv \pm 1 \pmod{353}$ en $k \equiv \pm 1 \pmod{4\,657}$.
Dit geeft $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ mogelijke combinaties die met behulp van de Chinese reststelling kunnen worden opgelost. Alle oplossingen worden gegeven door alle mogelijke combinaties van (k_1, k_2, k_3, k_4) met $k_1 = 1$, $k_2 = \pm 1$, $k_3 = \pm 1$ en $k_4 = \pm 1$ in de formule

$$\begin{aligned} k = {} & k_1((7 \cdot 353 \cdot 4\,657)^{\varphi(2)-1} \pmod{2}) \cdot 7 \cdot 353 \cdot 4\,657 + \\ & k_2((2 \cdot 353 \cdot 4\,657)^{\varphi(7)-1} \pmod{7}) \cdot 2 \cdot 353 \cdot 4\,657 + \\ & k_3((2 \cdot 7 \cdot 4\,657)^{\varphi(353)-1} \pmod{353}) \cdot 2 \cdot 7 \cdot 4\,657 + \\ & k_4((2 \cdot 7 \cdot 353)^{\varphi(4\,657)-1} \pmod{4\,657}) \cdot 2 \cdot 7 \cdot 353 \pmod{2 \cdot 7 \cdot 353 \cdot 4\,657}. \end{aligned}$$

Omdat $(7 \cdot 353 \cdot 4\,657)^{\varphi(2)-1} \pmod{2} \equiv 1$, $(2 \cdot 353 \cdot 4\,657)^{\varphi(7)-1} \pmod{7} \equiv 3$, $(2 \cdot 7 \cdot 4\,657)^{\varphi(353)-1} \pmod{353} \equiv 320$ en $(2 \cdot 7 \cdot 353)^{\varphi(4\,657)-1} \pmod{4\,657} \equiv 768$, geldt dat $k \equiv 11\,507\,447 \pm 9\,863\,526 \pm 20\,863\,360 \pm 3\,795\,456 \pmod{23\,014\,894}$.

[46] Deze methode wordt ook gehanteerd door Vardi; zie Vardi (1998), 308.
[47] Zie Niven, Zuckerman & Montgomery (1991), 64-65.

Dit geeft uiteindelijk de volgende oplossingen.[48]

$$
\begin{aligned}
k &\equiv 1 \pmod{23\,014\,894} & \qquad k &\equiv 15\,423\,983 \pmod{23\,014\,894}\\
k &\equiv 3\,287\,843 \pmod{23\,014\,894} & \qquad k &\equiv 18\,711\,825 \pmod{23\,014\,894}\\
k &\equiv 4\,303\,069 \pmod{23\,014\,894} & \qquad k &\equiv 19\,727\,051 \pmod{23\,014\,894}\\
k &\equiv 7\,590\,911 \pmod{23\,014\,894} & \qquad k &\equiv 23\,014\,893 \pmod{23\,014\,894}
\end{aligned}
$$

De oplossing $k = 1$ geeft $n = 0$ en daarmee een oplossing van het runderprobleem waarin alle aantallen runderen 0 zijn. Dat is uiteraard niet de bedoeling.[49] De kleinste oplossing van de vergelijkingen (1) t/m (7) + (9) treedt dus op bij $k = 3\,287\,843$.
Nu kunnen we weer terug naar de kwadratische vergelijking die uit de voorwaarden van het runderprobleem volgt, waarvoor we eerder hebben vastgesteld dat de discrimininant gelijk is aan $D = 1 + 92\,059\,576\,n = k^2$. Met $k = 3\,287\,843$ volgt dat $92\,059\,576\,n = 3\,287\,843^2 - 1 = 10\,809\,911\,592\,648$, oftewel $n = 117\,423$. Het aantal rijen van de driehoek is $\frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-1+k}{2} = \frac{3\,287\,842}{2} = 1\,643\,921$ en de kleinste oplossing van de vergelijkingen (1) t/m (7) + (9) is de volgende.

$$
\begin{aligned}
W_{♂} &= 1\,217\,263\,415\,886 & \qquad W_{♀} &= 846\,192\,410\,280\\
Z_{♂} &= 876\,035\,935\,422 & \qquad Z_{♀} &= 574\,579\,625\,058\\
G_{♂} &= 864\,005\,479\,380 & \qquad G_{♀} &= 412\,838\,131\,860\\
R_{♂} &= 487\,233\,469\,701 & \qquad R_{♀} &= 638\,688\,708\,099
\end{aligned}
$$

Met inachtneming van alle negen vergelijkingen wordt het probleem aanzienlijk ingewikkelder. Voor het uitrekenen van de condities die de negende vergelijking met zich meebrengt moeten we immers niet langer met de vergelijking $11\,507\,447\,n = \frac{q\,(q+1)}{2}$ rekenen als we ook de achtste vergelijking in onze berekening meenemen. We moeten er dan namelijk ook nog rekening mee houden dat $n = 4\,456\,749\,m^2$. Hieruit ontstaat de kwadratische vergelijking $q^2 + q - 2 \cdot 11\,507\,447 \cdot 4\,456\,749\,m^2 = 0$. Wederom zoeken we een geheeltallige oplossing voor q en moet de discriminant van de vergelijking een kwadraat zijn, zodat $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2 \cdot 51\,285\,802\,909\,803\,m^2) = k^2$, oftewel $D = 1 + 410\,286\,423\,278\,424\,m^2 = k^2$. Het is nu niet meer voldoende om te checken wanneer $k^2 = 1 \pmod{410\,286\,423\,278\,424}$. Aan die voorwaarde moet wel voldaan worden, maar het enige dat we dan zeker weten is dat we een oplossing gevonden hebben voor de vergelijking $1 + 410\,286\,423\,278\,424\,z = k^2$. Voor iedere oplossing (k, z) zal nu nog geverifieerd moeten worden of de bijbehorende waarde z daadwerkelijk een kwadraat is. Dat is een zeer bewerkelijk proces waar enorme getallen bij komen kijken. Een handigere aanpak is daarom het herschrijven van de vergelijking als $k^2 - 410\,286\,423\,278\,424\,m^2 = 1$. Dit is een Diophantische vergelijking[50] van de vorm $x^2 - Ny^2 = 1$, waarbij $N \in \mathbb{N}$ geen kwadraat is. Dit type vergelijking staat bekend als de *vergelijking van Pell*. Er kan bewezen worden dat deze vergelijking altijd oneindig veel oplossingen heeft; dit is het onderwerp van het volgende hoofdstuk.[51] Dit bewijst dat Archimedes' runderprobleem oplosbaar is en zelfs oneindig veel oplossingen heeft.

[48] Vardi rekent voor de factor 2^3 niet met $k \equiv 1 \pmod 2$, maar met $k \equiv 1, 3, 5, 7 \pmod 8$. Het gevolg daarvan is dat hij een rijtje oplossingen geeft modulo 92 059 576 dat vier keer zo lang is als het hier gegeven rijtje modulo $\frac{92\,059\,576}{4} = 23\,014\,894$. Zie Vardi (1998), 308.

[49] In vers 7 wordt nadrukkelijk gezegd dat er véél stieren zijn!

[50] Een Diophantische vergelijking is een algebraïsche vergelijking waarvoor geheeltallige oplossingen gezocht worden.

[51] Ook de vergelijking $x^2 - Ny^2 = -1$ staat bekend onder de naam vergelijking van Pell; deze heeft echter niet altijd oplossingen. In deze scriptie worden alleen Pellvergelijkingen van de vorm $x^2 - Ny^2 = 1$ bekeken. Overigens had de wiskundige John Pell (1611-1685) weinig van doen met de vergelijking van Pell, zie Olds (1963), 89 en Selenius (1975), 168.

7 Pellvergelijking

In het vorige hoofdstuk hebben we gezien hoe het runderprobleem van Archimedes gereduceerd kan worden tot een Pellvergelijking. In dit hoofdstuk is het eerste doel om te laten zien dat de vergelijking van Pell altijd oneindig veel oplossingen heeft.[52] Om dit in te zien maken we gebruik van kettingbreuken en kettingbreuktheorie die in de zeventiende en achttiende eeuw ontwikkeld is. Het tweede doel van dit hoofdstuk is om te laten zien hoe de oplossingen voor de Pellvergelijking kunnen worden berekend en hoe hieruit de oplossingen voor Archimedes' runderprobleem volgen.

De theorie berust op de gedachte dat de oplossingen van de Pellvergelijking rationale benaderingen van $\sqrt{N}$ geven. Het volgende lemma maakt duidelijk dat we inderdaad met grote precisie kunnen zeggen dat $\frac{x}{y} \approx \sqrt{N}$, en dat de benadering beter wordt naarmate y toeneemt.

Lemma 7.1. *Als (x, y) een oplossing van de Pellvergelijking $x^2 - Ny^2 = 1$ is, dan geldt: $0 < \frac{x}{y} - \sqrt{N} < \frac{1}{2y^2\sqrt{N}}$.*

Bewijs. We kunnen de vergelijking $x^2 - Ny^2 = 1$ schrijven als $\left(x + y\sqrt{N}\right)\left(x - y\sqrt{N}\right) = 1$. Omdat x en y natuurlijke getallen zijn, weten we dat $x + y\sqrt{N} \geq 1 + \sqrt{N}$, zodat $x - y\sqrt{N} \in (0, 1)$. (Het product moet immers 1 zijn.) Hieruit volgt dat ook $\frac{x}{y} - \sqrt{N} = \left(x - y\sqrt{N}\right) \cdot \frac{1}{y} \in (0, 1)$ en dus in het bijzonder dat $\frac{x}{y} - \sqrt{N} > 0$.
We kunnen $\left(x + y\sqrt{N}\right)\left(x - y\sqrt{N}\right) = 1$ ook schrijven als $\left(x + y\sqrt{N}\right) y \left(\frac{x}{y} - \sqrt{N}\right) = 1$. Hieruit volgt dat $\frac{x}{y} - \sqrt{N} = \frac{1}{y\left(x+y\sqrt{N}\right)}$. We weten dat $x^2 = Ny^2 + 1 > Ny^2$, zodat $x > y\sqrt{N}$. Daarom geldt dat $x + y\sqrt{N} > 2y\sqrt{N}$, en dus dat $0 < \frac{x}{y} - \sqrt{N} = \frac{1}{y\left(x+y\sqrt{N}\right)} < \frac{1}{2y^2\sqrt{N}}$. □

Het idee is nu om een rationale benadering $\frac{x}{y}$ van $\sqrt{N}$ te vinden op een zodanige manier dat (x, y) een oplossing vormt van de Pellvergelijking. Op het eerste gezicht is niet direct duidelijk of dat wel kan. Het blijkt echter te kunnen door $\sqrt{N}$ te ontwikkelen tot een kettingbreuk en deze op de juiste plaats af te kappen. Om dat te bewijzen is wel enige theorie nodig.

7.1 Bewijs dat de Pellvergelijking oneindig veel oplossingen heeft

Het doel van deze paragraaf is om, met behulp van kettingbreuktheorie, in te zien dat de Pellvergelijking altijd oneindig veel oplossingen heeft. Niet alle stellingen zullen in detail worden bewezen, maar wel wordt het gehele proces toegelicht. De eerste stap is het definiëren van het begrip kettingbreuk.

Definitie 7.2. *Een **enkelvoudige kettingbreuk** of **reguliere kettingbreuk** is een getal van de vorm* $a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}$ *met $a_1 \in \mathbb{Z}$; $a_2, a_3, \ldots \in \mathbb{N}$. Korte notatie: $[a_1, a_2, a_3, \ldots]$.*

In een kettingbreuk in algemene zin kunnen op de posities van de enen ook andere positieve gehele getallen staan; soms worden ook complexe getallen gebruikt. Om de Pellvergelijking op te lossen hebben we echter voldoende aan enkelvoudige kettingbreuken. Vanaf hier wordt de term kettingbreuk gebruikt voor enkelvoudige kettingbreuken.

[52] In deze scriptie wordt, tenzij anders vermeld, met Pellvergelijking altijd de vergelijking $x^2 - Ny^2 = 1$ bedoeld. De vergelijking $x^2 - Ny^2 = -1$ wordt buiten beschouwing gelaten.

Allereerst is het belangrijk om in te zien dat een kettingbreuk eindig of oneindig kan zijn en dat de kettingbreuk in het eerste geval een rationaal getal representeert en in het tweede geval een irrationaal getal. Dit kan het handigste verklaard worden aan de hand van een voorbeeld.[53] Stel dat we $\frac{55}{12}$ willen schrijven als kettingbreuk. Dit kan door herhaaldelijk deling met rest toe te passen. Ten eerste vinden we dat $\frac{55}{12} = \frac{48}{12} + \frac{7}{12} = 4 + \frac{7}{12} = 4 + \frac{1}{\frac{12}{7}}$. Vervolgens passen we deling met rest toe op $\frac{12}{7}$, enzovoorts. Uiteindelijk vinden we dan dat $\frac{55}{12} = 4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}$. Merk op dat $2 = 1 + \frac{1}{1}$, dus ook $\frac{55}{12} = 4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}}}$.
Een getal wordt dus niet altijd op unieke wijze gerepresenteerd door een kettingbreuk: $\frac{55}{12} = [4, 1, 1, 2, 2] = [4, 1, 1, 2, 1, 1]$. Het is duidelijk dat deling met rest ook toegepast kan worden wanneer we een irrationaal getal als kettingbreuk willen schrijven. Ieder getal $\in \mathbb{R}$ is dus op deze manier te ontwikkelen tot een kettingbreuk. Nu het procedé duidelijk is geworden door een voorbeeld, kunnen we de twee beweringen hardmaken.

Lemma 7.3. *Ieder getal $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ heeft een eindige kettingbreukontwikkeling. Andersom representeert iedere eindige kettingbreuk een getal $\in \mathbb{Q}$.*

Bewijs. Herhaaldelijk deling met rest toepassen levert een kettingbreuk op. Met de eerste toepassing van deling met rest vinden we $\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q} + \frac{p_2}{q}$ met $q \mid p_1$ en $0 \leq p_2 < q$. In de tweede stap moeten we deling met rest toepassen op de breuk $\frac{q}{p_2}$; deze heeft een kleinere noemer dan de eerste breuk ($p_2 < q$). Omdat na iedere stap de teller van de rest kleiner wordt (in de volgende stap neemt p_2 de rol van q over en de nieuwe rest de rol van p_2), maar de rest wel strikt groter moet zijn dan 0, vinden we op een zeker moment een rest gelijk aan 0. In dat geval is het algoritme afgelopen en hebben we een eindige kettingbreuk verkregen.
Andersom volstaat het om op te merken dat een eindige kettingbreuk stap voor stap om te schrijven is tot één breuk door herhaaldelijk toepassen van de identiteit $a + \frac{1}{b} = \frac{ab+1}{b}$. □

Lemma 7.4. *Ieder getal $\in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ heeft een oneindige kettingbreukontwikkeling. Andersom representeert iedere oneindige kettingbreuk een getal $\in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.*

Bewijs. Herhaaldelijk deling met rest toepassen levert een kettingbreuk op. Omdat een eindige kettingbreuk een getal $\in \mathbb{Q}$ representeert, moet een getal $\in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ wel gerepresenteerd worden door een oneindige kettingbreuk.
Andersom volstaat het om op te merken dat iedere kettingbreuk een getal $\in \mathbb{R}$ representeert.[54] Omdat getallen $\in \mathbb{Q}$ door eindige kettingbreuken gerepresenteerd worden, moeten oneindige kettingbreuken wel getallen $\in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ representeren. □

Voor de oplossing van het runderprobleem zijn we geïnteresseerd in de kettingbreukontwikkeling van $\sqrt{N} \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. We hebben dus alleen te maken met oneindige kettingbreuken

[53] De getallen in dit voorbeeld zijn ontleend aan Olds (1963), 117.

[54] Hiervoor is het nodig om in te zien dat iedere oneindige kettingbreuk convergeert. Merk op dat het afkappen van de kettingbreuk afwisselend een groter en een kleiner getal oplevert dan de vorige afkapping. Namelijk: $a_1 + \frac{1}{a_2} > a_1$, maar $a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}} < a_1 + \frac{1}{a_2}$, daarna weer $a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4}}} > a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}$, enzovoorts.

$[a_1, a_2, a_3, \ldots]$. Twee soorten oneindige kettingbreuken blijken belangrijk te zijn: periodieke kettingbreuken en zuiver periodieke kettingbreuken.

Definitie 7.5. *Een* ***periodieke (enkelvoudige) kettingbreuk*** $[a_1, a_2, a_3, \ldots]$ *is een kettingbreuk die vanaf een zeker moment repeterende regelmaat vertoont. Concreet: er bestaan* $i, p \in \mathbb{N}$ *zodat* $a_i = a_{i+p} = a_{i+2p} = \ldots;\ a_{i+1} = a_{i+1+p} = a_{i+1+2p} = \ldots;\ \ldots;\ a_{i+p-1} = a_{i+2p-1} = a_{i+3p-1} = \ldots$. *Notatie:* $[a_1, a_2, \ldots, \overline{a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i+p-1}}]$. *Het getal* p *is de* ***periode*** *van de kettingbreuk.*

Definitie 7.6. *Een* ***zuiver periodieke (enkelvoudige) kettingbreuk*** $[a_1, a_2, a_3, \ldots]$ *is een kettingbreuk die vanaf het begin periodiek is. Concreet: er bestaat een* $p \in \mathbb{N}$ *zodat* $a_1 = a_{p+1} = a_{2p+1} = \ldots;\ a_2 = a_{p+2} = a_{2p+2} = \ldots;\ \ldots;\ a_p = a_{2p} = a_{3p} = \ldots$. *Notatie:* $[\overline{a_1, a_2, \ldots, a_p}]$. *Het getal* p *is de* ***periode*** *van de kettingbreuk.*

Om iets te kunnen zeggen over de kettingbreukontwikkeling van $\sqrt{N}$ is het nodig om het blikveld iets te verruimen. We moeten kijken naar zogenaamde *kwadratische irrationaliteiten.* Ook moeten we twee nieuwe begrippen invoeren: we moeten definiëren wat de *geconjugeerde* is van een kwadratische irrationaliteit en wat we verstaan onder het begrip *gereduceerde* kwadratische irrationaliteit. Daarna zijn we klaar om de twee cruciale stellingen in het bewijs te begrijpen die ons zullen helpen in te zien hoe de kettingbreukontwikkeling van $\sqrt{N}$ eruitziet.

Definitie 7.7. *Een* ***kwadratische irrationaliteit*** *is een getal van de vorm* $\frac{a+b\sqrt{D}}{c}$ *met* $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ *en* $D \in \mathbb{N}$ *geen kwadraat. Door deze keuze voor* D *is dit een getal* $\in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *en heeft het dus een oneindige kettingbreukontwikkeling.*

Definitie 7.8. *De* ***geconjugeerde*** *van een kwadratische irrationaliteit* $\lambda = \frac{a+b\sqrt{D}}{c}$ *is het getal* $\overline{\lambda} = \frac{a-b\sqrt{D}}{c}$.

Definitie 7.9. *Een kwadratische irrationaliteit* λ *heet* ***gereduceerd*** *als voldaan wordt aan* $\lambda > 1$ *en* $-1 < \overline{\lambda} < 0$.

De belangrijkste stelling in het bewijs dat de Pellvergelijking oneindig veel oplossingen heeft, is de stelling van Lagrange. Lagrange bewees in 1770 dat een kettingbreuk periodiek is dan en slechts dan als hij een kwadratische irrationaliteit representeert.[55] Voor het bewijs daarvan gebruikte hij een stelling die zegt dat een kettingbreuk zuiver periodiek is dan en slechts dan als hij een gereduceerde kwadratische irrationaliteit representeert.

Stelling 7.10. *Een kettingbreuk is zuiver periodiek dan en slechts dan als hij een gereduceerde kwadratische irrationaliteit representeert.*

Stelling 7.11 (Stelling van Lagrange)**.** *Een kettingbreuk is periodiek dan en slechts dan als hij een kwadratische irrationaliteit representeert.*

Bewijs. Het voert te ver om deze stellingen hier te bewijzen. Voor goede, volledige en duidelijke bewijzen verwijs ik naar het boek van Olds.[56] □

Met deze twee stellingen is het mogelijk de (oneindige) kettingbreukontwikkeling van $\sqrt{N} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, met $N \in \mathbb{N}$ geen kwadraat, te bepalen.[57] Uit de keuze van N volgt dat $\sqrt{N} \geq \sqrt{2} > 1$. Voor de geconjugeerde geldt echter $-\sqrt{N} < -1$ en dus is $\sqrt{N} = [a_1, a_2, \ldots]$ niet gereduceerd. Anderzijds is a_1 het grootste gehele getal dat kleiner is dan $\sqrt{N}$. Nu geldt niet alleen $\sqrt{N} + a_1 > 1$, maar ook $-1 < -\sqrt{N} + a_1 < 0$, zodat het getal $\sqrt{N} + a_1$ wel gereduceerd is.

[55] Olds (1963), 89.

[56] Zie voor stelling 7.10 Olds (1963), 93-95 & 104-108. Zie voor stelling 7.11 Olds (1963), 110-111.

[57] Zie Olds (1963), 112-113.

Volgens stelling 7.10 is de kettingbreuk van $\sqrt{N}+a_1$ dus zuiver periodiek. Kortom: $\sqrt{N}+a_1 = [\overline{2a_1, a_2, \ldots, a_p}]$. Hieruit volgt dat $\sqrt{N} = [a_1, \overline{a_2, \ldots, a_p, 2a_1}]$. Er kan ook nog bewezen worden dat het periodieke deel met uitzondering van de laatste term symmetrisch is, dat wil zeggen $a_2 = a_p$, $a_3 = a_{p-1}$, enzovoorts.[58] Om de oplossingen van de Pellvergelijking te bepalen hebben we deze eigenschap echter niet nodig.
Het is mogelijk om met behulp van recursieve formules de waarde van een afgekapte oneindige kettingbreuk te berekenen. Voor iedere kettingbreuk zijn we dan op zoek naar de zogenaamde *convergenten* c_i. Voor de kettingbreuk $[a_1, a_2, a_3, \ldots]$ geldt dat $c_1 = [a_1]$, $c_2 = [a_1, a_2]$, enzovoorts. De convergenten kunnen op hun beurt worden geschreven als $c_i = \frac{\alpha_i}{\beta_i}$. Voor α_i en β_i hebben we voor $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 3$, de recursieve formules

$$\alpha_i = a_i\alpha_{i-1} + \alpha_{i-2}$$
$$\beta_i = a_i\beta_{i-1} + \beta_{i-2}$$

met bijbehorende beginvoorwaarden $\alpha_1 = a_1$, $\alpha_2 = a_2a_1 + 1$, $\beta_1 = 1$ en $\beta_2 = a_2$.[59]

Met nog enig rekenwerk kan worden bewezen wat de oplossingen van de Pellvergelijking $x^2 - Ny^2 = 1$ zijn.[60] De kleinste oplossing wordt gegeven door $x_1 = \alpha_p$ en $y_1 = \beta_p$ als p even is, en door $x_1 = \alpha_{2p}$ en $y_1 = \beta_{2p}$ als p oneven is.[61] Alle overige oplossingen worden gegeven door $x_d + y_d\sqrt{N} = \left(x_1 + y_1\sqrt{N}\right)^d$ voor $d \in \mathbb{N}$.

7.2 Oplossing van het complete runderprobleem

In het vorige hoofdstuk hebben we het runderprobleem met alle negen vergelijkingen gereduceerd tot de Pellvergelijking $k^2 - 410\,286\,423\,278\,424\, m^2 = 1$. In de vorige paragraaf is gebleken dat de oplossingen daarvan gevonden kunnen worden door de kettingbreukontwikkeling van $\sqrt{410\,286\,423\,278\,424}$ te berekenen en deze op de juiste plaats af te kappen. Met de gevonden mogelijke waarden van m kan vervolgens de oplossing van het runderprobleem expliciet worden opgeschreven.
Deze oplossingsmethode is precies wat de Duitse wiskundige Meyer in 1867 voor ogen had. Na 240 stappen van de kettingbreukontwikkeling te hebben berekend, had hij niet het gevoel tot een oplossing te komen en gaf hij op. In een tijd zonder computers was dat wellicht geen onverstandige beslissing, aangezien de kettingbreukontwikkeling van $\sqrt{410\,286\,423\,278\,424}$ een periode blijkt te hebben met een lengte van maar liefst 203 254. Zelfs met een snelheid van 100 delingen met rest per dag zou het bijna drie jaar duren om de kettingbreukontwikkeling uit te rekenen tot het punt halverwege de periode vanaf waar symmetrie optreedt. Dit is dus geen handige aanpak.[62]

Gelukkig is het mogelijk om de Pellvergelijking te reduceren tot een eenvoudigere vorm. Priemfactoriseren van 410 286 423 278 424 geeft $410\,286\,423\,278\,424 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 353 \cdot 4\,657^2$. We kunnen twee factoren 2 en twee factoren 4 657 uit dit getal halen en bij de factor m^2 trekken, door $l^2 = 2^2 \cdot 4\,657^2 \cdot m^2$ te schrijven. Op de plaats van het getal 410 286 423 278 424

[58] Olds (1963), 113.
[59] Olds (1963), 21-23. Meestal worden de letters p en q gebruikt, maar omdat de p ook gebruikt wordt voor de periode van een kettingbreuk komt dat hier niet handig uit. In voetnoot 54 bleek al dat een convergent c_i met i even groter is dan de convergent c_{i-1}, terwijl c_j met j oneven kleiner is dan c_{j-1}.
[60] Niven, Zuckerman & Montgomery (1991), 353-355.
[61] Uit lemma 7.1 volgt dat $\frac{x}{y} > \sqrt{N}$. Dit verklaart mede, in combinatie met het afwisselend groter en kleiner zijn van de convergenten, waarom er een verschil is tussen het berekenen van de oplossingen van Pellvergelijkingen voor even en voor oneven periodes: de oplossing wordt alleen bij even periodes verkregen.
[62] Zie Lenstra (2008), 5 voor deze anekdote inclusief verdere verwijzingen.

komt dan het getal $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 353 = 4\,729\,494$ te staan en dus vinden we de Pellvergelijking $k^2 - 4\,729\,494\,l^2 = 1$ met als aanvullende voorwaarden $2 \mid l$ en $4\,657 \mid l$.

Het oplossen van deze nieuwe Pellvergelijking, vooralsnog zonder rekening te houden met de aanvullende eisen voor l, is een stuk gemakkelijker. De lengte van de periode van de kettingbreukontwikkeling van 4 729 494 is slechts 92. Deze kettingbreukontwikkeling kan dus zelfs met de hand berekend worden door met veel aandacht herhaaldelijk deling met rest toe te passen.[63] Het afkappen van de kettingbreuk op de juiste plaats geeft als kleinste oplossing voor de Pellvergelijking de volgende waarden.

$$k_1 = 109\,931\,986\,732\,829\,734\,979\,866\,232\,821\,433\,543\,901\,088\,049$$
$$l_1 = 50\,549\,485\,234\,315\,033\,074\,477\,819\,735\,540\,408\,986\,340$$

Hieruit kunnen alle oplossingen van de Pellvergelijking berekend worden met $k, l \in \mathbb{N}$. Iedere oplossing is nu van de vorm $\varepsilon^d = k_d + l_d\sqrt{N}$, waarbij $\varepsilon = k_1 + l_1\sqrt{N}$. De enige stap die nu nog resteert is om zodanige oplossingen te vinden dat voldaan wordt aan de eis $2 \mid l_d$ en aan de eis $4\,657 \mid l_d$. Gelukkig blijkt dat aan de voorwaarde $2 \mid l_d$ in alle gevallen voldaan wordt.[64]

Lemma 7.12. *Voor iedere oplossing van de Pellvergelijking $k_d^2 - 4\,729\,494\,l_d^2 = 1$ geldt dat $2 \mid l_d$.*

Bewijs. Omdat 4 729 494 een even getal is en $4\,729\,494\,l_d^2$ dus ook, weten we dat k_d^2 oneven is, en daarmee k_d dus ook. Omdat modulo 8 geldt dat $1^2 \equiv 3^2 \equiv 5^2 \equiv 7^2 \equiv 1$, geldt dat $k_d^2 \equiv 1 \pmod 8$. Hieruit volgt dat $4\,729\,494\,l_d^2 \equiv 0 \pmod 8$, oftewel $2^3 \mid 4\,729\,494\,l_d^2$. Omdat het getal $4\,729\,494 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 353$ slechts één factor 2 bevat, volgt hieruit dat $2^2 \mid l_d^2$, oftewel $2 \mid l_d$. $\square$

De laatste horde is dus om een oplossing te vinden die voldoet aan de eis $4\,657 \mid l$. We weten dat iedere oplossing van de vorm $\varepsilon^d = k_d + l_d\sqrt{4\,729\,494}$ is. Modulo 4 657 mogen we ook met $\sqrt{4\,729\,494 \pmod{4\,657}} = \sqrt{2\,639}$ rekenen, aangezien optelling en vermenigvuldiging met deze wortel geen effect heeft op de coëfficiënten k_d en l_d (mod 4 657). Omdat 2 639 geen kwadraat is modulo 4 657,[65] rekenen we dus in het eindige lichaam $\mathbb{F}_{4\,657}(\sqrt{2\,639})$, een kwadratische uitbreiding van $\mathbb{F}_{4\,657} = \mathbb{Z}/4\,657\,\mathbb{Z}$.
Het checken op deelbaarheid van l_d door 4 657 gaat als volgt.[66] We weten dat $\varepsilon^d = k_d + l_d\sqrt{N}$, waaruit volgt dat $\frac{1}{\varepsilon^d} = \frac{1}{k_d + l_d\sqrt{N}} = k_d - l_d\sqrt{N}$. Hieruit volgt weer dat $\varepsilon^d - \frac{1}{\varepsilon^d} = k_d + l_d\sqrt{N} - \left(k_d - l_d\sqrt{N}\right) = 2l_d\sqrt{N} \equiv 0 \pmod{4\,657}$. Met andere woorden, $\frac{\varepsilon^{2d}}{\varepsilon^d} - \frac{1}{\varepsilon^d} \equiv 0 \pmod{4\,657}$, oftewel $\varepsilon^{2d} - 1 \equiv 0 \pmod{4\,657}$, oftewel $\varepsilon^{2d} \equiv 1 \pmod{4\,657}$.
In het eindige lichaam waarin we rekenen geldt voor elke $x \neq 0$ dat $x^{p+1} \equiv 1 \pmod p$ voor in dit geval $p = 4\,657$,[67] en we willen graag dat $\varepsilon^{2d} \equiv 1 \pmod{4\,657}$. Hieruit volgt dat $2d \mid 4\,657 + 1$, oftewel $d \mid \frac{4\,658}{2}$, oftewel $d \mid 2\,329$, oftewel $d \mid 17 \cdot 137$. Dit beperkt het aantal machten van ε die gecheckt moeten worden enorm. Met enkele simpele vermenigvuldigingen kan vastgesteld worden dat modulo 4 657 het volgende geldt.

[63] Dit is precies wat Amthor deed, zie voor de volledige berekening Amthor (1880), 159-162.
[64] Lemma en bewijs zijn ontleend aan Vardi (1998), 311.
[65] Berekening van het Jacobisymbool geeft $\left(\frac{2\,639}{4\,657}\right) = -1$.
[66] Zie Vardi (1998), 311-312.
[67] Vardi (1998), 311-312.

$$
\begin{aligned}
\gamma = \varepsilon^2 &= 262 + 551\sqrt{2\,639} \\
\gamma^{17} &= 106 + 3\,078\sqrt{2\,639} \\
\gamma^{137} &= 3\,256 + 3\,606\sqrt{2\,639} \\
\gamma^{2\,329} &= 1
\end{aligned}
$$

Hieruit volgt dat alle oplossingen $\varepsilon^{2\,329z}$ met $z \in \mathbb{N}$ aan de voorwaarde $4\,657 \mid l_d$ voldoen. De kleinste oplossing voor de Pellvergelijking die aan de voorwaarden van Archimedes' runderprobleem voldoet is dus $\varepsilon^{2\,329}$. In het algemeen geldt dat de oplossing $\varepsilon^{2\,329z} = k_{2\,329z} + l_{2\,329z}\sqrt{4\,729\,494}$ voldoet. Met behulp van de identiteit $\frac{1}{k_{2\,329z}+l_{2\,329z}\sqrt{4\,729\,494}} = k_{2\,329z} - l_{2\,329z}\sqrt{4\,729\,494}$ vinden we dat

$$
\begin{aligned}
l_{2\,329z} = \frac{2l_{2\,329z}\sqrt{4\,729\,494}}{2\sqrt{4\,729\,494}} &= \frac{k_{2\,329z} + l_{2\,329z}\sqrt{4\,729\,494} - (k_{2\,329z} - l_{2\,329z}\sqrt{4\,729\,494})}{2\sqrt{4\,729\,494}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{4\,729\,494}}\left(\varepsilon^{2\,329z} - \frac{1}{\varepsilon^{2\,329z}}\right).
\end{aligned}
$$

Vanuit deze waarde van $l_{2\,329z}$ kunnen we vervolgens de waarde van m berekenen. Bij het reduceren van de Pellvergelijking naar een eenvoudigere vorm voerden we l in volgens de formule $l^2 = 2^2 \cdot 4\,657^2 \cdot m^2$. Hieruit volgt dat $m^2 = \frac{l^2_{2\,329z}}{2^2\cdot 4\,657^2}$. Met bovenstaande berekening voor $l_{2\,329z}$ volgt hieruit dat

$$
\begin{aligned}
m^2 = \frac{l^2_{2\,329z}}{2^2 \cdot 4\,657^2} &= \frac{1^2}{2^2 \cdot \sqrt{4\,729\,494}^2 \cdot 2^2 \cdot 4\,657^2}\left(\varepsilon^{2\cdot 2\,329z} - 2\cdot\varepsilon^{2\,329z}\cdot\frac{1}{\varepsilon^{2\,329z}} + \frac{1}{\varepsilon^{2\cdot 2\,329z}}\right) \\
&= \frac{1}{4\cdot 410\,286\,423\,278\,424}\left(\varepsilon^{4\,658z} + \frac{1}{\varepsilon^{4\,658z}} - 2\right).
\end{aligned}
$$

Nemen we nu de oplossing van vergelijkingen (1) t/m (8) en vervangen we daarin m^2 door bovenstaande uitdrukking, dan vinden we de exacte oplossing van het complete runderprobleem van Archimedes.
We beginnen dus met de oplossing van vergelijkingen (1) t/m (8) uit hoofdstuk 6.

$$
\begin{aligned}
W_{♂} &= 46\,200\,808\,287\,018\,m^2 & W_{♀} &= 32\,116\,937\,723\,640\,m^2 \\
Z_{♂} &= 33\,249\,638\,308\,986\,m^2 & Z_{♀} &= 21\,807\,969\,217\,254\,m^2 \\
G_{♂} &= 32\,793\,026\,546\,940\,m^2 & G_{♀} &= 15\,669\,127\,269\,180\,m^2 \\
R_{♂} &= 18\,492\,776\,362\,863\,m^2 & R_{♀} &= 24\,241\,207\,098\,537\,m^2
\end{aligned}
$$

Invullen van de uitdrukking voor m^2 geeft het volgende.

$$
\begin{aligned}
W_{♂} &= \frac{46\,200\,808\,287\,018}{4\cdot 410\,286\,423\,278\,424}\left(\varepsilon^{4\,658z} + \frac{1}{\varepsilon^{4\,658z}} - 2\right) & W_{♀} &= \frac{32\,116\,937\,723\,640}{4\cdot 410\,286\,423\,278\,424}\left(\varepsilon^{4\,658z} + \frac{1}{\varepsilon^{4\,658z}} - 2\right) \\
Z_{♂} &= \frac{33\,249\,638\,308\,986}{4\cdot 410\,286\,423\,278\,424}\left(\varepsilon^{4\,658z} + \frac{1}{\varepsilon^{4\,658z}} - 2\right) & Z_{♀} &= \frac{21\,807\,969\,217\,254}{4\cdot 410\,286\,423\,278\,424}\left(\varepsilon^{4\,658z} + \frac{1}{\varepsilon^{4\,658z}} - 2\right) \\
G_{♂} &= \frac{32\,793\,026\,546\,940}{4\cdot 410\,286\,423\,278\,424}\left(\varepsilon^{4\,658z} + \frac{1}{\varepsilon^{4\,658z}} - 2\right) & G_{♀} &= \frac{15\,669\,127\,269\,180}{4\cdot 410\,286\,423\,278\,424}\left(\varepsilon^{4\,658z} + \frac{1}{\varepsilon^{4\,658z}} - 2\right) \\
R_{♂} &= \frac{18\,492\,776\,362\,863}{4\cdot 410\,286\,423\,278\,424}\left(\varepsilon^{4\,658z} + \frac{1}{\varepsilon^{4\,658z}} - 2\right) & R_{♀} &= \frac{24\,241\,207\,098\,537}{4\cdot 410\,286\,423\,278\,424}\left(\varepsilon^{4\,658z} + \frac{1}{\varepsilon^{4\,658z}} - 2\right)
\end{aligned}
$$

Door breuken uit te werken krijgen de uitdrukkingen een aangenamer formaat.

$$W_{\male} = \frac{159}{5\,648}\left(\varepsilon^{4\,658z} + \frac{1}{\varepsilon^{4\,658z}} - 2\right) \qquad W_{\female} = \frac{128\,685}{6\,575\,684}\left(\varepsilon^{4\,658z} + \frac{1}{\varepsilon^{4\,658z}} - 2\right)$$
$$Z_{\male} = \frac{801}{39\,536}\left(\varepsilon^{4\,658z} + \frac{1}{\varepsilon^{4\,658z}} - 2\right) \qquad Z_{\female} = \frac{2\,446\,623}{184\,119\,152}\left(\varepsilon^{4\,658z} + \frac{1}{\varepsilon^{4\,658z}} - 2\right)$$
$$G_{\male} = \frac{395}{19\,768}\left(\varepsilon^{4\,658z} + \frac{1}{\varepsilon^{4\,658z}} - 2\right) \qquad G_{\female} = \frac{125\,565}{13\,151\,368}\left(\varepsilon^{4\,658z} + \frac{1}{\varepsilon^{4\,658z}} - 2\right)$$
$$R_{\male} = \frac{891}{79\,072}\left(\varepsilon^{4\,658z} + \frac{1}{\varepsilon^{4\,658z}} - 2\right) \qquad R_{\female} = \frac{5\,439\,213}{368\,238\,304}\left(\varepsilon^{4\,658z} + \frac{1}{\varepsilon^{4\,658z}} - 2\right)$$

Merk nu op dat $-1 < \frac{159}{5\,648}\left(\frac{1}{\varepsilon^{4\,658z}} - 2\right) < 0$, zodat $W_{\male} = \left\lfloor \frac{159}{5\,648}\varepsilon^{4\,658z} \right\rfloor$, en dat een soortgelijke redenering voor alle groepen stieren en koeien geldt.[68] De oplossing is dus nog eenvoudiger als volgt te schrijven.

$$W_{\male} = \left\lfloor \frac{159}{5\,648}\,\varepsilon^{4\,658z} \right\rfloor \qquad W_{\female} = \left\lfloor \frac{128\,685}{6\,575\,684}\,\varepsilon^{4\,658z} \right\rfloor$$
$$Z_{\male} = \left\lfloor \frac{801}{39\,536}\,\varepsilon^{4\,658z} \right\rfloor \qquad Z_{\female} = \left\lfloor \frac{2\,446\,623}{184\,119\,152}\,\varepsilon^{4\,658z} \right\rfloor$$
$$G_{\male} = \left\lfloor \frac{395}{19\,768}\,\varepsilon^{4\,658z} \right\rfloor \qquad G_{\female} = \left\lfloor \frac{125\,565}{13\,151\,368}\,\varepsilon^{4\,658z} \right\rfloor$$
$$R_{\male} = \left\lfloor \frac{891}{79\,072}\,\varepsilon^{4\,658z} \right\rfloor \qquad R_{\female} = \left\lfloor \frac{5\,439\,213}{368\,238\,304}\,\varepsilon^{4\,658z} \right\rfloor$$

Voor de kleinste oplossing is het totale aantal runderen dan $\left\lfloor \frac{25\,194\,541}{184\,119\,152}\,\varepsilon^{4\,658} \right\rfloor$. Het aantal cijfers wordt gegeven door

$$\begin{aligned}\left\lceil \log_{10}\left(\frac{25\,194\,541}{184\,119\,152}\,\varepsilon^{4\,658}\right)\right\rceil &= \lceil \log_{10}(25\,194\,541) - \log_{10}(184\,119\,152) + 4\,658\log_{10}(\varepsilon)\rceil \\ &= 206\,545.\end{aligned}$$

[68]Vardi vergist zich hier consequent en geeft overal in zijn artikel aan dat naar boven afgerond dient te worden. Zo geeft hij bijvoorbeeld ten onrechte $W_{\male} = \left\lceil \frac{159}{5\,648}\varepsilon^{4\,658z} \right\rceil$. Zie Vardi (1998), 306 & 312-313. De verwarring ontstaat mogelijk doordat bij het uitrekenen van het aantal cijfers van de oplossing wel naar boven afgerond dient te worden.

8 Alternatieve oplossingsmethoden

Met behulp van theorie over kettingbreuken hebben we gezien dat het volstaat om één kettingbreukontwikkeling uit te rekenen om oplossingen te vinden voor de Pellvergelijking, en daarmee ook voor Archimedes' runderprobleem. We hebben echter ook gezien dat deze berekening zeer bewerkelijk is. Het is ook maar de vraag of men in Archimedes' tijd deze methode zou hebben gevolgd. Ondanks dat het runderprobleem "opgelost" is, blijft het daarom interessant en relevant of oplossingen makkelijker en/of anders gevonden kunnen worden. In dit hoofdstuk worden drie alternatieve oplossingsmethoden besproken: die van Lenstra, die probeert een efficiëntere manier te vinden om de Pellvergelijking op te lossen; die van Nygrén, die met zijn "*simple solution*" het gebruik van kettingbreuken lijkt te omzeilen; en die van de oude Indiërs, die al een algoritme hadden om de Pellvergelijking op te lossen, dat ook op een moderne manier met kettingbreuken bestudeerd kan worden.

Lenstra bespreekt in zijn artikel[69] voornamelijk de efficiëntie van programma's die met het traditionele kettingbreukalgoritme, zoals in het vorige hoofdstuk besproken, de Pellvergelijking $x^2 - Ny^2 = 1$ oplossen. Een eerste conclusie is nog niet heel veelbelovend: de methode heeft een numerieke tijdcomplexiteit van $\sqrt{N} \cdot (1 + \log N)^{c_5}$, waarbij $c_5 \in \mathbb{R}$ een getal onafhankelijk van N is; voor de meeste waarden van N is de methode exponentieel langzaam en iedere methode die een oplossing (x, y) uitschrijft is exponentieel langzaam voor oneindig veel waarden van N. Het startpunt voor een nieuwe methode is daarom dat een oplossing (x, y) compacter moet kunnen worden weergegeven dan in decimale of binaire notatie.[70]
De methode die Lenstra voorstelt maakt gebruik van zogeheten *smooth numbers* of *gladde getallen*: gehele getallen ongelijk 0 die op het teken na opgebouwd zijn uit kleine priemfactoren.[71] Het voert te ver om deze methode hier te bespreken. De methode lijkt sneller te werken dan de traditionele methode, maar het bewijzen hiervan is voorlopig nog onmogelijk. (Hier komt onder andere de gegeneraliseerde Riemannhypothese bij kijken.)[72] Anderen werken aan een kwantumalgoritme, dat wellicht de toekomst zou kunnen worden wanneer kwantumcomputers beschikbaar komen, aldus Lenstra.[73]

Het moge duidelijk zijn dat methodes als kwantumalgoritmes heel ver afstaan van pogingen die Archimedes zelf, of een tijdgenoot, zou kunnen hebben ondernomen om het runderprobleem op te lossen. Veel meer gericht op eenvoudige oplossingstechnieken is het werk van Nygrén,[74] die claimt een "*simple solution*" gevonden te hebben en daaruit concludeert dat Archimedes het runderprobleem had kunnen oplossen. Deze oplossing reduceert het probleem niet direct tot een Pellvergelijking; in plaats daarvan moeten we 64 vergelijkingen van de vorm $pu^2 + 1 = qv^2$ oplossen, waarvan er gelukkig snel 60 te verwerpen zijn als onoplosbaar.[75] Uiteindelijk blijven 4 vergelijkingen over, waarvan 1 toch de Pellvergelijking $x^2 - 4\,729\,494\,y^2 = 1$ blijkt te zijn.[76]
De oplossingsmethode gaat pagina's lang door en maakt steeds gebruik van handigheidjes, waaronder bijvoorbeeld matrixrekening. Uiteindelijk is de methode equivalent met het afkappen van een kettingbreuk en het uitrekenen van de bijbehorende convergent met behulp van recursieve formules. Er treden uiteraard nog steeds enorme getallen op. Ondanks dat een

[69]Lenstra (2008).
[70]Lenstra (2008), 6-8.
[71]Lenstra (2008), 13.
[72]Lenstra (2008), 18.
[73]Lenstra (2008), 19.
[74]Nygrén (2001).
[75]Nygrén (2001), 13-15.
[76]Nygrén (2001), 15.

"*simple solution*" beloofd is, blijft het artikel ingewikkeld en wordt niet uitgelegd hoe Archimedes of een tijdgenoot een dergelijke oplossingsmethode gevonden zou moeten hebben. De Grieken kenden bijvoorbeeld geen matrixrekening, en er wordt dan wel opgemerkt dat het zonder ook wel moet kunnen,[77] maar dat maakt toch nog niet inzichtelijk hoe Nygrén zich precies voorstelt dat Archimedes gerekend zou kunnen hebben. Het grote voordeel van Nygréns methode is naar eigen zeggen dat de concepten van irrationale getallen en zelfs breuken niet nodig zijn en dat alle berekeningen alleen op gehele getallen uitgevoerd dienen te worden. Het blijft echter onderbelicht hoeveel tijd nodig zou zijn om een volledige oplossing met de hand uit te rekenen.
Wat wel interessant is, is dat Nygrén opmerkt dat zijn methode sterke gelijkenissen vertoont met werk van Gauß.[78] Zou de *urban legend* dat Gauß een oplossing gevonden zou hebben voor het runderprobleem dan toch waar zijn?[79] Nygrén is duidelijk niet op de hoogte van dit verhaal, want hij merkt onmiddellijk op dat Gauß geen interesse gehad zou hebben in individuele problemen. De "*simple solution*" van Nygrén is knap gevonden, maar het artikel overtuigt nog niet volledig dat dit de manier is waarop Archimedes het probleem aangepakt zou hebben.

De meest veelbelovende alternatieve oplossingsmethode is een oud algoritme uit de Indiase wiskunde. Met de zogeheten *cakravālamethode* waren de oude Indiërs al in staat om de vergelijking van Pell op te lossen. Het woord *cakra* betekent "wiel" in het Sanskrit. Het betreft hier dan ook een cyclisch, dat wil zeggen iteratief, algoritme dat onder andere met behulp van cirkels kan worden gevisualiseerd.[80] Het algoritme kan ook op een moderne manier worden geschreven met behulp van kettingbreuken en lang is gedacht dat Euler, Lagrange en anderen met de in hoofdstuk 7 besproken methode deze Indiase methode hadden herontdekt. Selenius legt uit dat rondom deze kwestie veel misverstanden bestaan en dat de methodes, hoewel ze sterke gelijkenissen vertonen, niet precies dezelfde zijn.[81] Een belangrijk verschil is dat kettingbreuken optreden met niet alleen plussen, maar ook met minnen. Daardoor worden de periodes van de kettingbreukontwikkelingen korter en zijn er met een vergelijkbare oplossingsmethode als beschreven in hoofdstuk 7 minder stappen nodig om de oplossing van de Pellvergelijking te vinden. Selenius geeft als voorbeeld de kettingbreukontwikkeling van $\sqrt{58}$. Om dit voorbeeld te begrijpen moeten we onze definitie van een kettingbreuk enigszins uitbreiden.[82]

Definitie 8.1. *Een* ***enkelvoudige kettingbreuk*** *of* ***reguliere kettingbreuk*** *is een getal van de vorm* $a_1 \pm \cfrac{1}{a_2 \pm \cfrac{1}{a_3 \pm \cfrac{1}{\ddots}}}$ *met* $a_1 \in \mathbb{Z}$; $a_2, a_3, \ldots \in \mathbb{N}$.

De korte notatie moet ook worden uitgebreid: een onderstreepte term geeft aan dat de betreffende term door een min in plaats van een plus voorafgegaan wordt. Bijvoorbeeld:

$$a_1 - \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}} = [a_1, \underline{a_2}, a_3] .$$

[77] Nygrén (2001), 38.
[78] Nygrén (2001), 38.
[79] Zie hoofdstuk 4.
[80] Zie Selenius (1975), 178.
[81] Selenius (1975), 169-172.
[82] Selenius (1975), 170.

Volgens de moderne kettingbreukmethode geldt dat $\sqrt{58} = [7, \overline{1, 1, 1, 1, 1, 1, 14}]$; hierbij worden alleen plussen gebruikt. Omdat de periode van deze kettingbreuk 7 is, een oneven getal, moeten we de veertiende convergent c_{14} uitrekenen om de oplossing van de Pellvergelijking met $N = 58$ te krijgen. Als ook minnen zijn toegelaten, kan de kettingbreuk echter ook korter worden geschreven als $\sqrt{58} = [8, \overline{\underline{2}, 1, 1, 1, 1, 15}]$, als $\sqrt{58} = [8, \overline{\underline{3}, \underline{2}, 1, 1, 15}]$ of als $\sqrt{58} = [8, \overline{\underline{3}, \underline{3}, \underline{2}, 15}]$. Het idee van deze kortere schrijfwijzen is dat zodra een 1 optreedt, een min in plaats van een plus toegepast moet worden in de kettingbreuk. In deze gevallen blijkt dezelfde oplossing al bij de twaalfde, respectievelijk tiende, respectievelijk achtste convergent gevonden te worden.[83]

De cakravālamethode lijkt van na Archimedes' tijd te zijn en wordt vaak rond 1000 n.Chr. gedateerd, maar dit valt niet met zekerheid vast te stellen.[84] Kende Archimedes een soortgelijke methode? Toen de 75-jarige Archimedes vlak voor zijn dood cirkels in het zand aan het tekenen was, probeerde hij toen met behulp van een cyclische cakravālamethode zijn runderprobleem op te lossen? Fantasie en romantiek zouden een mens doen zeggen dat het wel zo móét zijn, maar de nuchtere waarheid gebiedt ons te zeggen dat we het niet weten en waarschijnlijk ook nooit met zekerheid zullen weten.

[83]De moderne kettingbreukontwikkeling en de twee eerste verkorte ontwikkelingen, inclusief steeds de eerste drie convergenten en de laatste benodigde convergent, worden gegeven door Selenius; zie Selenius (1975), 170.

[84]Selenius (1975), 168.

9 Alternatieve interpretaties

Tot nu toe hebben we aandacht geschonken aan één specifieke versie van het runderprobleem, de gangbare versie. Maar het runderprobleem van Archimedes is niet overal even eenduidig qua formulering; zoals we al zagen in hoofdstuk 2 zijn soms meerdere interpretaties mogelijk. In dit hoofdstuk worden twee alternatieve interpretaties besproken: wat zijn de verschillen met het gangbare probleem, zijn deze alternatieven aannemelijk en, niet in de laatste plaats, wat voor invloed hebben alternatieve interpretaties op de oplossing van het probleem?

9.1 «τετραχῇ» (vs. 24)

In besprekingen van Archimedes’ runderprobleem wordt het woord «τετραχῇ» in vers 24 vaak genegeerd, omdat het de regelmaat in de vergelijkingen verstoort. We bevinden ons hier in het gedeelte waar de verhoudingen van de koeien gegeven worden voor het eerste deel van het runderprobleem. Dit leidt tot vergelijking (6*) als alternatief voor vergelijking (6).

Ξανθοτρίχων δ’ ἀγέλης πέμπτῳ μέρει ἠδὲ καὶ ἕκτῳ
ποικίλαι ἰσάριθμον πλῆθος ἔχον **τετραχῇ**.
Ξανθαὶ δ’ ἠριθμεῦντο μέρους τρίτου ἡμίσει ἶσαι
ἀργεννῆς ἀγέλης ἑβδομάτῳ τε μέρει.

Maar aan van de kudde der roodbruinharigen een vijfde deel en ook een zesde
hadden de gevlekten (♀) een gelijktallige hoeveelheid **in vieren**.
En de roodbruinen (♀) werden geteld als aan de helft van een derde deel gelijk
van de witte kudde en aan een zevende deel.

$$G_{\text{♀}} = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) R_{\text{♂}+\text{♀}} \tag{6}$$

$$\frac{G_{\text{♀}}}{4} = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) R_{\text{♂}+\text{♀}} \tag{6*}$$

Niet zelden wordt “in vieren” wel in een vertaling opgenomen, maar wordt het vervolgens genegeerd bij de omzetting naar vergelijkingen. Hermann en daarmee ook Wurm leggen echter wel de nadruk op dit woord en stellen voor om het mee te nemen bij de interpretatie van het runderprobleem.[85] Overige besprekers van het probleem vinden het woord maar lastig en laten het liever weg. Krumbiegel wijdt er wel nog een hele bespreking aan, maar concludeert dat hij het woord vervelend vindt.[86] Hij lost het probleem op door het woord bij het volgende vers te trekken, als volgt.[87]

Ξανθοτρίχων ἀγέλης πέμπτῳ μέρει ἠδὲ καὶ ἕκτῳ
ποικίλαι ἰσάριθμον πλῆθος ἔχον. **Τετραχῇ**
ξανθαὶ δ’ ἠριθμεῦντο μέρους τρίτου ἡμίσει ἶσαι
ἀργεννῆς ἀγέλης ἑβδομάτῳ τε μέρει.

Maar aan van de kudde der roodbruinharigen een vijfde deel en ook een zesde
hadden de gevlekten (♀) een gelijktallige hoeveelheid. **En ten vierde**
werden de roodbruinen (♀) geteld als aan de helft van een derde deel gelijk
van de witte kudde en aan een zevende deel.

[85] Wurm (1830), 195-196.
[86] Krumbiegel (1880), 132-133.
[87] Krumbiegel (1880), 129.

Naast dat een vertaling als "ten vierde" ook niet zomaar voor de hand ligt, is deze emendatie zeer onwaarschijnlijk, omdat het partikel δέ bijna altijd de tweede plaats in de zin inneemt.[88] Een zin zal normaliter in het Grieks nooit beginnen met Τετραχῇ ξανθαὶ δέ ... maar altijd met Τετραχῇ δὲ ξανθαί .... Het alternatief van Krumbiegel is daarom niet overtuigend.

Met vergelijking (6) vervangen door vergelijking (6*) wordt het oplossen van het runderprobleem eenvoudiger, doordat de getallen die optreden kleiner worden. De oplossingsmethode verandert niet. De methode uit hoofdstuk 5 geeft de volgende oplossing voor deel I van het probleem, de vergelijkingen (1) t/m (7) met vergelijking (6*) in plaats van vergelijking (6).

$$\begin{aligned} W_{♂} &= 336\,126\,n & \qquad W_{♀} &= 335\,580\,n \\ Z_{♂} &= 241\,902\,n & Z_{♀} &= 333\,378\,n \\ G_{♂} &= 238\,580\,n & G_{♀} &= 502\,260\,n \\ R_{♂} &= 134\,541\,n & R_{♀} &= 207\,909\,n \end{aligned}$$

De methode uit hoofdstuk 6 levert vervolgens weer een oplossing voor de eerste acht vergelijkingen op waarin met m^2 moet worden vermenigvuldigd en een Pellvergelijking. Er moet gelden dat $W_{♂} + Z_{♂} = 578\,028\,n = x^2$. Priemfactoriseren geeft dat $578\,028\,n = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 151 \cdot n = x^2$ en daaruit volgt dat $n = 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 151 \cdot m^2 = 144\,507\,m^2$ voor alle $m \in \mathbb{N}$. Daarnaast moet gelden dat $R_{♂} + G_{♂} = 373\,121 \cdot 144\,507\,m^2 = \frac{q\,(q+1)}{2}$, oftewel $q^2 + q - 2 \cdot 11\,507\,447 \cdot 144\,507\,m^2 = 0$. Hieruit ontstaat de kwadratische vergelijking $q^2 + q - 2 \cdot 373\,121 \cdot 144\,507\,m^2 = 0$. Wederom zoeken we een geheeltallige oplossing voor q en moet de discriminant van de vergelijking een kwadraat zijn, zodat $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2 \cdot 373\,121 \cdot 144\,507\,m^2) = k^2$, oftewel $D = 1 + 431\,348\,770\,776\,m^2 = k^2$.
De methode uit paragraaf 7.2 geeft nu een eenvoudigere Pellvergelijking. Priemfactoriseren van $431\,348\,770\,776$ geeft $431\,348\,770\,776 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 151^2 \cdot 353$. We kunnen twee factoren 2 en twee factoren 151 uit dit getal halen en bij de factor m^2 trekken. Op de plaats van het getal $431\,348\,770\,776$ komt dan het getal $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 353 = 4\,729\,494$ te staan en dus vinden we de Pellvergelijking $k^2 - 4\,729\,494\,l^2 = 1$ met als aanvullende voorwaarden $2 \mid l$ en $151 \mid l$. Er geldt: $l^2 = m^2 \cdot 2^2 \cdot 151^2$. Merk op dat deze vereenvoudigde Pellvergelijking dezelfde is die we in onze oorspronkelijke bespreking van het runderprobleem vonden, en dat het enige verschil de voorwaarde $151 \mid l$ in plaats van $4\,657 \mid l$ is. De oplossing van de Pellvergelijking blijft hetzelfde en ook het argument dat altijd voldaan wordt aan de eis $2 \mid l$ blijft onveranderd.
De laatste horde is nu om een oplossing te vinden die voldoet aan de eis $151 \mid l$. We weten dat iedere oplossing van de vorm $\varepsilon^d = k_d + l_d\sqrt{4\,729\,494}$ is. Modulo 151 mogen we met $\sqrt{4\,729\,494 \pmod{151}} = \sqrt{23}$ rekenen. Omdat 23 geen kwadraat is modulo 151,[89] rekenen we dus in het eindige lichaam $\mathbb{F}_{151}(\sqrt{23})$, een kwadratische uitbreiding van $\mathbb{F}_{151} = \mathbb{Z}/151\,\mathbb{Z}$. Om te checken op deelbaarheid van l_d door 151 moeten we volgens dezelfde argumentatie als eerder nagaan wanneer $\varepsilon^{2d} \equiv 1 \pmod{151}$.
In het eindige lichaam waarin we rekenen geldt voor elke $x \neq 0$ dat $x^{p+1} \equiv 1 \pmod{p}$ met deze keer $p = 151$ en dus krijgen we nu $2d \mid 151 + 1$, oftewel $d \mid \frac{152}{2}$, oftewel $d \mid 76$, oftewel

[88] Denniston (1954), 185-189. In poëzie kan soms van deze regel worden afgeweken, maar het lijkt onwaarschijnlijk dat dat alleen op deze ene plek in het runderprobleem zou gebeuren. De tekst van het runderprobleem vertoont nauwelijks rare poëtische woordvolgorde.

[89] Berekening van het Jacobisymbool geeft $\left(\frac{23}{151}\right) = -1$.

$d \mid 2^2 \cdot 19$. Modulo 151 geldt dus het volgende.

$$\begin{aligned} \gamma = \varepsilon^2 &= 54 + 105\sqrt{23} \\ \gamma^2 &= 93 + 15\sqrt{23} \\ \gamma^{2^2} &= 83 + 72\sqrt{23} \\ \gamma^{19} &= 1 \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat alle oplossingen ε^{19z} met $z \in \mathbb{N}$ aan de voorwaarde $151 \mid l$ voldoen. De kleinste oplossing voor de Pellvergelijking die aan de voorwaarden van Archimedes' runderprobleem voldoet met vergelijking (6*) in plaats van (6) is dus ε^{19}. In het algemeen geldt dat de oplossing $\varepsilon^{19z} = k_{19z} + l_{19z}\sqrt{4\,729\,494}$ voldoet. We vinden op dezelfde manier als eerder dat

$$m^2 = \frac{1}{4 \cdot 431\,348\,770\,776}\left(\varepsilon^{38z} + \frac{1}{\varepsilon^{38z}} - 2\right).$$

De uiteindelijke oplossing van het complete probleem met vergelijking (6*) in plaats van (6) is dan de volgende.

$$\begin{aligned} W_{♂} &= \left\lfloor \frac{159}{5\,648}\,\varepsilon^{38z} \right\rfloor & W_{♀} &= \left\lfloor \frac{11\,985}{426\,424}\,\varepsilon^{38z} \right\rfloor \\ Z_{♂} &= \left\lfloor \frac{801}{39\,536}\,\varepsilon^{38z} \right\rfloor & Z_{♀} &= \left\lfloor \frac{166\,689}{5\,969\,936}\,\varepsilon^{38z} \right\rfloor \\ G_{♂} &= \left\lfloor \frac{395}{19\,768}\,\varepsilon^{38z} \right\rfloor & G_{♀} &= \left\lfloor \frac{125\,565}{2\,984\,968}\,\varepsilon^{38z} \right\rfloor \\ R_{♂} &= \left\lfloor \frac{891}{79\,072}\,\varepsilon^{38z} \right\rfloor & R_{♀} &= \left\lfloor \frac{207\,909}{11\,939\,872}\,\varepsilon^{38z} \right\rfloor \end{aligned}$$

Voor de kleinste oplossing is het totale aantal runderen nu $\left\lfloor \frac{582\,569}{2\,984\,968}\,\varepsilon^{38} \right\rfloor$. Het aantal cijfers wordt gegeven door

$$\begin{aligned} \left\lceil \log_{10}\left(\frac{582\,569}{2\,984\,968}\,\varepsilon^{38}\right) \right\rceil &= \lceil \log_{10}(582\,569) - \log_{10}(2\,984\,968) + 38\log_{10}(\varepsilon) \rceil \\ &= 1\,685. \end{aligned}$$

Dat is nog steeds een heel groot getal om met de hand uit te rekenen, maar toch aanzienlijk kleiner dan het getal van 206 545 cijfers dat optreedt als kleinste oplossing voor de gangbare versie van het probleem.

9.2 Wurms probleem

Een alternatieve interpretatie die door Wurm is voorgesteld heeft betrekking op de geometrische condities in het tweede deel van het probleem. De witte stieren en de zwarte stieren zouden samen een «πλίνθος» vormen, een "baksteen". In de traditionele benadering van het probleem wordt uitgegaan van een vierkant, maar Wurm was van mening dat het een rechthoek zou moeten zijn.[90] Dit leidt tot vergelijking (8*) als alternatief voor vergelijking (8).

$$W_{♂} + Z_{♂} = x^2 \tag{8}$$
$$W_{♂} + Z_{♂} = p \cdot q \tag{8*}$$

[90] Wurm (1830), 196.

Hierbij is het gewenst dat $p : q$ ongeveer de verhouding van een rund weergeeft. Omdat echter nergens de verhouding van een rund strikt wordt voorgeschreven, is dit meestal wel ongeveer kloppend te krijgen. Het vinden van de kleinste oplossing van Wurms probleem begint met de oplossing van de vergelijkingen (1) t/m (7) + (9) die we in hoofdstuk 6 vonden.

$$\begin{aligned} W_{♂} &= 1\,217\,263\,415\,886 & W_{♀} &= 846\,192\,410\,280 \\ Z_{♂} &= 876\,035\,935\,422 & Z_{♀} &= 574\,579\,625\,058 \\ G_{♂} &= 864\,005\,479\,380 & G_{♀} &= 412\,838\,131\,860 \\ R_{♂} &= 487\,233\,469\,701 & R_{♀} &= 638\,688\,708\,099 \end{aligned}$$

Er geldt nu $W_{♂} + Z_{♂} = 2\,093\,299\,351\,308 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4\,349 \cdot 4\,657$. Vardi stelt voor om $p = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 4\,349 = 1\,409\,076$ en $q = 11 \cdot 29 \cdot 4\,657 = 1\,485\,583$ als oplossing te nemen: dit is de beste benadering van een vierkant die met deze getallen verkregen kan worden.[91] De oplossing van de vergelijkingen (1) t/m (7) + (9) is dus ook de oplossing van de vergelijkingen (1) t/m (9) met (8*) in plaats van (8).

De aanduiding *Wurms probleem* voor dit probleem is echter ietwat ongelukkig, omdat Wurm zelf voorstelt niet alleen vergelijking (8*) in plaats van (8) te nemen, maar ook vergelijking (6*) in plaats van (6) te nemen en een alternatieve vergelijking (3*) in plaats van (3) te nemen. Dit is namelijk de enige manier, zo zegt hij, waarop het totale aantal runderen op Sicilië past.[92] Voor de derde vergelijking kijkt Wurm naar het woord «ὑπολειπομένους» in vers 14.

αὐτὰρ κυανέους τῷ τετράτῳ τε μέρει
μικτοχρόων καὶ πέμπτῳ, ἔτι ξανθοῖσί τε πᾶσιν.
Τοὺς δ' **ὑπολειπομένους** ποικιλόχρωτας ἄθρει
ἀργεννῶν ταύρων ἕκτῳ μέρει ἑβδομάτῳ τε
καὶ ξανθοῖς αὐτοὺς πᾶσιν ἰσαζομένους.

maar de zwarten zowel aan het vierde deel
van de gemengdgekleurden als aan een vijfde, en nog aan alle roodbruinen.
En de **overgelaten** gevlektgekleurden, observeer dat
aan van de witte stieren een zesde deel en een zevende
en aan alle roodbruinen zij gelijk waren.

Wurm merkt op dat de "overgelaten gevlektgekleurden" gelijk zouden zijn aan het totale aantal gevlektgekleurden min het in het vorige vers ter vergelijking van grootte genoemde vierde en vijfde deel ervan. Zo zouden de "overgelaten gevlektgekleurden" slechts gelijk zijn aan $1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{11}{20}$ van het totale aantal gevlektgekleurden.[93] Dit leidt tot de alternatieve vergelijking (3*) in plaats van vergelijking (3). Deze lezing lijkt mij erg gezocht en zal hier dan ook niet nader besproken worden, maar het moge duidelijk zijn dat ook dit probleem, *mutatis mutandis*, met vergelijkbare technieken kan worden opgelost.

$$G_{♂} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) W_{♂} + R_{♂} \tag{3}$$

$$\frac{11}{20} G_{♂} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) W_{♂} + R_{♂} \tag{3*}$$

[91] Vardi (1998), 308.
[92] Wurm (1830), 202.
[93] Wurm (1830), 200.

10 Conclusie en discussie

Archimedes' runderprobleem lijkt in eerste instantie lang en ingewikkeld, maar nadat het eenmaal is omgezet in vergelijkingen ziet het er juist bedrieglijk simpel uit. Het berekenen van het eerste deel van het probleem levert niet veel moeilijkheden op en met de aanvullende voorwaarden van het tweede deel lijkt alles in eerste instantie ook nog relatief gemakkelijk te gaan. Wanneer echter een oplossing moet worden berekend die aan alle negen vergelijkingen voldoet, blijkt dit opeens gruwelijk ingewikkeld te zijn. Pas met behulp van computers was het mogelijk de kleinste oplossing volledig uit te schrijven, een getal van 206 545 cijfers.

Archimedes' runderprobleem kent een levendige geschiedenis vol verschillende ontdekkingen, interpretaties en oplossingsmethoden. Bij het oplossen wordt het grootste obstakel gevormd door het moeten oplossen van een Pellvergelijking. Over de Pellvergelijking, en dan met name ook de negatieve Pellvergelijking, is het laatste woord nog niet gezegd. Er wordt nog volop onderzoek gedaan om deze vergelijking goed te begrijpen en zo efficiënt mogelijk op te kunnen lossen. Voor problemen van normale grootte werkt de moderne kettingbreukmethode goed, maar bij problemen met enorme getallen zijn efficiëntere methodes vereist. Waar enerzijds nieuwe technieken worden toegepast met bijvoorbeeld *smooth numbers* en kwantumcomputers, blijkt anderzijds de oude Indiase cakravālamethode al bijzonder effectief te zijn.

Door de raadselachtige formulering van het runderprobleem zijn er meerdere interpretaties mogelijk. In deze scriptie is voor zover ik kon achterhalen voor het eerst een oplossing bestudeerd waarbij het woord «τετραχῆ» "in vieren" in vers 24 niet genegeerd wordt, met het verrassende resultaat dat de kleinste oplossing van het probleem nu slechts 1 685 cijfers heeft in plaats van 206 545.

Historisch, poëtisch en mythologisch zijn er nog veel vragen bij Archimedes' runderprobleem. Was het van Archimedes? Kon hij het oplossen? Wat was het doel van het probleem? Deze vragen zijn kort aangestipt, maar zullen helaas onbeantwoord moeten blijven. Ondanks dat Archimedes' runderprobleem inmiddels "opgelost" is, blijft het op alle mogelijke manieren fascinerend, intrigerend en ook in de moderne tijd zelfs voor de meeste wiskundigen een echt probleem.

11 Bibliografie

Primaire literatuur en commentaar

Lloyd-Jones, H. & Parsons, P. (eds.) (1983), *Supplementum Hellenisticum*, Berlin & New York: Walter de Gruyter.

Sider, D. (ed.) (2016), *Hellenistic Poetry: A Selection*, Michigan: University of Michigan Press.

Alle vertalingen zijn van eigen hand.

Secundaire literatuur

Amthor, A. (1880), "Das Problema bovinum des Archimedes", in: *Zeitschrift für Mathematik und Physik (Historisch-literarische Abtheilung)*, Bd. 25, Leipzig: Teubner, pp. 153-171.

Bártlová, T. (2012), "Archimedova úloha o dobytku", in: Z. Halas (ed.), *Archimédés. Několik pohledů do jeho života a díla*, Praha: MATFYZPRESS, Vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, pp. 99-107.

Benson, G.C. (2014), "Archimedes the Poet: Generic Innovation and Mathematical Fantasy in the *Cattle Problem*", in: *Arethusa*, Vol. 47, No. 2 (Spring 2014), pp. 169-196.

Denniston, J.D. (1954), *The Greek Particles*, 2nd edition, Oxford: Clarendon Press.

Krumbiegel, B. (1880), "Das Problema bovinum des Archimedes", in: *Zeitschrift für Mathematik und Physik (Historisch-literarische Abtheilung)*, Bd. 25, Leipzig: Teubner, pp. 121-126.

Lenstra Jr., H.W. (2008), "Solving the Pell equation", in: *Algorithmic Number Theory*, MSRI Publications Vol. 44, pp. 1-23.

Lessing, G.E. (1773), *Zur Geschichte und Litteratur. Aus den Schätzen der herzoglichen Bibliothek zu Wolfenbüttel*, Zweyter Beitrag, Braunschweig: Fürstliche Waysenhaus-Buchhandlung.

Mačák, K. (2001), "Métrodóros: Matematické úlohy z palatinské antologie", in: K. Mačák, *Tři středověké sbírky matematických úloh. Alkuin, Métrodóros, Abú Kámil*, Praha: Prometheus, pp. 43-60.

Nelson, H.L. (1981), "A solution to Archimedes' Cattle Problem", in: *Journal of Recreational Mathematics*, Vol. 13, pp. 162-176.

Nygrén, A. (2001), *A simple solution to Archimedes' cattle problem*, Oulu: Oulun yliopisto.

Niven, I., Zuckerman, H.S. & Montgomery, H.L. (1991), *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5th edition, New York, Chichester, Brisbane, Toronto & Singapore: John Wiley & Sons, Inc.

Olds, C.D. (1963), *Continued fractions*, New York & Toronto: Random House.

Schreiber, P. (1993), “A Note on the Cattle Problem of Archimedes”, in: *Historia Mathematica*, Vol. 20, pp. 304-306.

Selenius, C.-O. (1975), “Rationale of the chakravāla process of Jayadeva and Bhāskara II”, in: *Historia Mathematica*, Vol. 2, Issue 2, pp. 167-184.

Vardi, I. (1998), “Archimedes’ Cattle Problem”, in: *The American Mathematical Monthly*, Vol. 105, No. 4 (April 1998), pp. 305-319.

Wurm, J.F. (1830), Review van J.G. Hermann, *De Archimedis Problemate Bovino*, in: *Jahrbücher für Philologie und Pädagogiek*, Bd. 14, Leipzig: Teubner, pp. 194-202.

A Runderprobleem (Grieks + vertaling)

Πρόβλημα ὅπερ Ἀρχιμήδης ἐν ἐπιγράμμασιν εὑρὼν τοῖς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ περὶ ταῦτα πραγματευομένοις ζητεῖν ἀπέστειλεν ἐν τῇ πρὸς Ἐρατοσθένην τὸν Κυρηναῖον ἐπιστολῇ.

Πληθὺν Ἠελίοιο βοῶν, ὦ ξεῖνε, μέτρησον
φροντίδ᾽ ἐπιστήσας, εἰ μετέχεις σοφίης,
πόσση ἄρ᾽ ἐν πεδίοις Σικελῆς ποτε βόσκετο νήσου
Θρινακίης τετραχῆ στίφεα δασσαμένη
χροιὴν ἀλλάσσοντα· τὸ μὲν λευκοῖο γάλακτος,
κυανέῳ δ᾽ ἕτερον χρώματι λαμπόμενον,
ἄλλο γε μὲν ξανθόν, τὸ δὲ ποικίλον· ἐν δὲ ἑκάστῳ
στίφει ἔσαν ταῦροι πλήθεσι βριθόμενοι
συμμετρίης τοιῆσδε τετευχότες· ἀργότριχας μὲν
κυανέων ταύρων ἡμίσει ἠδὲ τρίτῳ
καὶ ξανθοῖς σύμπασιν ἴσους, ὦ ξεῖνε, νόησον,
αὐτὰρ κυανέους τῷ τετράτῳ τε μέρει
μικτοχρόων καὶ πέμπτῳ, ἔτι ξανθοῖσί τε πᾶσιν.
Τοὺς δ᾽ ὑπολειπομένους ποικιλόχρωτας ἄθρει
ἀργεννῶν ταύρων ἕκτῳ μέρει ἑβδομάτῳ τε
καὶ ξανθοῖς αὐτοὺς πᾶσιν ἰσαζομένους.
Θηλείαισι δὲ βουσὶ τάδ᾽ ἔπλετο· λευκότριχες μὲν
ἦσαν συμπάσης κυανέης ἀγέλης
τῷ τριτάτῳ τε μέρει καὶ τετράτῳ ἀτρεκὲς ἶσαι·
αὐτὰρ κυάνεαι τῷ τετράτῳ τε πάλιν
μικτοχρόων καὶ πέμπτῳ ὁμοῦ μέρει ἰσάζοντο
σὺν ταύροις πάσαις εἰς νομὸν ἐρχομέναις.
Ξανθοτρίχων δ᾽ ἀγέλης πέμπτῳ μέρει ἠδὲ καὶ ἕκτῳ
ποικίλαι ἰσάριθμον πλῆθος ἔχον τετραχῆ.
Ξανθαὶ δ᾽ ἠριθμεῦντο μέρους τρίτου ἡμίσει ἶσαι
ἀργεννῆς ἀγέλης ἑβδομάτῳ τε μέρει.
Ξεῖνε, σὺ δ᾽ Ἠελίοιο βόες πόσαι ἀτρεκὲς εἰπών,
χωρὶς μὲν ταύρων ζατρεφέων ἀριθμόν,
χωρὶς δ᾽ αὖ θήλειαι ὅσαι κατὰ χροιὰν ἕκασται,
οὐκ ἄϊδρίς κε λέγοι᾽ οὐδ᾽ ἀριθμῶν ἀδαής,
οὐ μὴν πώ γε σοφοῖς ἐναρίθμιος. Ἀλλ᾽ ἴθι φράζευ
καὶ τάδε πάντα βοῶν Ἠελίοιο πάθη.
Ἀργότριχες ταῦροι μὲν ἐπεὶ μιξαίατο πληθὺν
κυανέοις, ἵσταντ᾽ ἔμπεδον ἰσόμετροι
εἰς βάθος εἰς εὖρός τε, τὰ δ᾽ αὖ περιμήκεα πάντη
πίμπλαντο πλίνθου Θρινακίης πεδία.
Ξανθοὶ δ᾽ αὖτ᾽ εἰς ἓν καὶ ποικίλοι ἀθροισθέντες
ἵσταντ᾽ ἀμβολάδην ἐξ ἑνὸς ἀρχόμενοι
σχῆμα τελειοῦντες τὸ τρικράσπεδον οὔτε προσόντων
ἀλλοχρόων ταύρων οὔτ᾽ ἐπιλειπομένων.
Ταῦτα συνεξευρὼν καὶ ἐνὶ πραπίδεσσιν ἀθροίσας
καὶ πληθέων ἀποδούς, ξεῖνε, τὰ πάντα μέτρα
ἔρχεο κυδιόων νικηφόρος ἴσθι τε πάντως
κεκριμένος ταύτῃ γ᾽ ὄμπνιος ἐν σοφίῃ.

Probleem dat Archimedes, in epigrammen gevonden hebbend, aan degenen in Alexandrië die zich omtrent die dingen bezighouden om te bestuderen verzond in de brief aan Eratosthenes van Cyrene.

De menigte runderen van Helios, o vreemdeling, tel die
nadat je je gedachte erop hebt vastgepind, als je deelhebt aan wijsheid,
hoe groot graasde die eens op de vlakten van Sicilië, het eiland
Thrinakia, in vieren in groepen verdeeld,
die hun huidskleur afwisselden: de ene [had die] van witte melk,
en door zwarte huid schitterend was de volgende,
een andere weer roodbruin, en een gevlekt; en in iedere
groep waren stieren met hun aantallen zwaarwegend
die er toevallig met een zodanige verhouding waren: dat de witharigen
aan van de zwarte stieren de helft en een derde
en aan alle roodbruinen tezamen gelijk waren, o vreemdeling, begrijp dat,
maar de zwarten zowel aan het vierde deel
van de gemengdgekleurden als aan een vijfde, en nog aan alle roodbruinen.
En de overgelaten gevlektgekleurden, observeer dat
aan van de witte stieren een zesde deel en een zevende
en aan alle roodbruinen zij gelijk waren.
En voor de vrouwelijke runderen waren het deze [groepen]: de witharigen
waren aan van de gehele zwarte kudde tezamen
zowel het derde deel als een vierde precies gelijk;
maar de zwarten (♀) waren aan zowel het vierde deel weer
van de gemengdgekleurden als een vijfde deel tezamen gelijk
terwijl zij allen met de stieren naar weidegrond gingen.
Maar aan van de kudde der roodbruinharigen een vijfde deel en ook een zesde
hadden de gevlekten (♀) een gelijktallige hoeveelheid in vieren.
En de roodbruinen (♀) werden geteld als aan de helft van een derde deel gelijk
van de witte kudde en aan een zevende deel.
En vreemdeling, als jij de aantallen (♀) runderen van Helios precies gezegd hebt,
afzonderlijk van goedgevoede stieren het nummer,
en afzonderlijk weer de vrouwelijke, hoeveel alle afzonderlijk (♀) per kleur [zijn],
zul je niet een onwetende genoemd worden, noch een met getallen onbekende,
maar toch ook nog niet een onder de wijzen gerekende. Maar kom, overdenk
ook al deze eigenschappen van de runderen van Helios.
Witgehaarde stieren mengden eens onderling hun menigte
met de zwarten, zij gingen stevig staan, gelijk in maat
naar diepte en naar breedte, en nu weer werden de heel grote
vlakten van Thrinakia in het geheel gevuld met een bouwsteen.
Maar nadat dan weer de roodbruinen tot één en de gevlekten verzameld waren,
gingen zij staan, met een omhoogwerping vanaf één beginnend
aan een figuur, completerend de driehoek, terwijl noch andersgekleurde
stieren aanwezig waren, noch [er stieren] werden achtergelaten.
Nadat je die dingen samen uitgevonden hebt en in je geest verzameld hebt
en van de hoeveelheden, vreemdeling, al de metingen overgedragen hebt,
ga dan jubelend de overwinning dragend en weet dat je geheel en al
beoordeeld [bent] als goedgevoed in díé wijsheid.

B Oplossingen van het runderprobleem

In deze appendix staan de verschillende oplossingen van de verschillende, al dan niet vereenvoudigde, versies van Archimedes' runderprobleem overzichtelijk bij elkaar. Er geldt steeds m, n, p, q, $z \in \mathbb{N}$.

Runderprobleem

$$W_{♂} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) Z_{♂} + R_{♂} \tag{1}$$

$$Z_{♂} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) G_{♂} + R_{♂} \tag{2}$$

$$G_{♂} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) W_{♂} + R_{♂} \tag{3}$$

$$W_{♀} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) Z_{♂+♀} \tag{4}$$

$$Z_{♀} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) G_{♂+♀} \tag{5}$$

$$G_{♀} = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) R_{♂+♀} \tag{6}$$

$$R_{♀} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) W_{♂+♀} \tag{7}$$

$$W_{♂} + Z_{♂} = x^2 \tag{8}$$

$$R_{♂} + G_{♂} = \frac{q\,(q+1)}{2} \tag{9}$$

Alternatieve vergelijkingen

$$\frac{G_{♀}}{4} = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) R_{♂+♀} \tag{6*}$$

$$W_{♂} + Z_{♂} = p \cdot q \tag{8*}$$

Oplossing van vergelijkingen (1) t/m (7) *(Deel I van het probleem)*

$$\begin{aligned} W_{♂} &= 10\,366\,482\,n & W_{♀} &= 7\,206\,360\,n \\ Z_{♂} &= 7\,460\,514\,n & Z_{♀} &= 4\,893\,246\,n \\ G_{♂} &= 7\,358\,060\,n & G_{♀} &= 3\,515\,820\,n \\ R_{♂} &= 4\,149\,387\,n & R_{♀} &= 5\,439\,213\,n \end{aligned}$$

Oplossing van vergelijkingen (1) t/m (8)

$$\begin{aligned} W_{♂} &= 46\,200\,808\,287\,018\,m^2 & W_{♀} &= 32\,116\,937\,723\,640\,m^2 \\ Z_{♂} &= 33\,249\,638\,308\,986\,m^2 & Z_{♀} &= 21\,807\,969\,217\,254\,m^2 \\ G_{♂} &= 32\,793\,026\,546\,940\,m^2 & G_{♀} &= 15\,669\,127\,269\,180\,m^2 \\ R_{♂} &= 18\,492\,776\,362\,863\,m^2 & R_{♀} &= 24\,241\,207\,098\,537\,m^2 \end{aligned}$$

Kleinste oplossing van vergelijkingen (1) t/m (7) + (9) ≡
Kleinste oplossing van vergelijkingen (1) t/m (9) met (8*) i.p.v. (8) *(Wurms probleem)*

$$\begin{aligned} W_{♂} &= 1\,217\,263\,415\,886 & W_{♀} &= 846\,192\,410\,280 \\ Z_{♂} &= 876\,035\,935\,422 & Z_{♀} &= 574\,579\,625\,058 \\ G_{♂} &= 864\,005\,479\,380 & G_{♀} &= 412\,838\,131\,860 \\ R_{♂} &= 487\,233\,469\,701 & R_{♀} &= 638\,688\,708\,099 \end{aligned}$$

Voor onderstaande oplossingen geldt dat $\varepsilon = k_1 + l_1\sqrt{N}$ met

$$k_1 = 109\,931\,986\,732\,829\,734\,979\,866\,232\,821\,433\,543\,901\,088\,049$$
$$l_1 = 50\,549\,485\,234\,315\,033\,074\,477\,819\,735\,540\,408\,986\,340$$

Oplossing van vergelijkingen (1) t/m (9)

$$W_{\male} = \left\lfloor \frac{159}{5\,648}\,\varepsilon^{4\,658z} \right\rfloor \qquad W_{\female} = \left\lfloor \frac{128\,685}{6\,575\,684}\,\varepsilon^{4\,658z} \right\rfloor$$
$$Z_{\male} = \left\lfloor \frac{801}{39\,536}\,\varepsilon^{4\,658z} \right\rfloor \qquad Z_{\female} = \left\lfloor \frac{2\,446\,623}{184\,119\,152}\,\varepsilon^{4\,658z} \right\rfloor$$
$$G_{\male} = \left\lfloor \frac{395}{19\,768}\,\varepsilon^{4\,658z} \right\rfloor \qquad G_{\female} = \left\lfloor \frac{125\,565}{13\,151\,368}\,\varepsilon^{4\,658z} \right\rfloor$$
$$R_{\male} = \left\lfloor \frac{891}{79\,072}\,\varepsilon^{4\,658z} \right\rfloor \qquad R_{\female} = \left\lfloor \frac{5\,439\,213}{368\,238\,304}\,\varepsilon^{4\,658z} \right\rfloor$$

Oplossing van vergelijkingen (1) t/m (7) met (6*) i.p.v. (6)

$$W_{\male} = 336\,126\,n \qquad W_{\female} = 335\,580\,n$$
$$Z_{\male} = 241\,902\,n \qquad Z_{\female} = 333\,378\,n$$
$$G_{\male} = 238\,580\,n \qquad G_{\female} = 502\,260\,n$$
$$R_{\male} = 134\,541\,n \qquad R_{\female} = 207\,909\,n$$

Oplossing van vergelijkingen (1) t/m (9) met (6*) i.p.v. (6)

$$W_{\male} = \left\lfloor \frac{159}{5\,648}\,\varepsilon^{38z} \right\rfloor \qquad W_{\female} = \left\lfloor \frac{11\,985}{426\,424}\,\varepsilon^{38z} \right\rfloor$$
$$Z_{\male} = \left\lfloor \frac{801}{39\,536}\,\varepsilon^{38z} \right\rfloor \qquad Z_{\female} = \left\lfloor \frac{166\,689}{5\,969\,936}\,\varepsilon^{38z} \right\rfloor$$
$$G_{\male} = \left\lfloor \frac{395}{19\,768}\,\varepsilon^{38z} \right\rfloor \qquad G_{\female} = \left\lfloor \frac{125\,565}{2\,984\,968}\,\varepsilon^{38z} \right\rfloor$$
$$R_{\male} = \left\lfloor \frac{891}{79\,072}\,\varepsilon^{38z} \right\rfloor \qquad R_{\female} = \left\lfloor \frac{207\,909}{11\,939\,872}\,\varepsilon^{38z} \right\rfloor$$