Analyse Op $\mathbb{Q}$

Tim van Lent
Radboud Universiteit Nijmegen
Begeleider: Arnoud van Rooij
16 februari 2017

Samenvatting

Er bestaan continue functies gedefinieerd op de rationale getallenen die kunnen worden geïntegreerd. Door de Riemann-integraal aan te passen kan er een integraal worden gedefinieerd op deze functies. Deze integraal wordt gedefinieerd voor functies op dichte deelverzamelingen van een interval, waarbij de Riemann-integraal wordt gerespecteerd. Een van de hoofdstellingen in de calculus is dat een begrensde, continue functie altijd integreerbaar is op de reële getallen.

Een bregensde, continue functie gedefinieerd op een interval doorsnede met de rationale getallen hoeft niet integreerbaar te zijn.

Dit opent nieuwe deuren voor verder onderzoek in de calculus op functies die gedefinieerd zijn op verzamelingen met een relatief kleine maat. Het onderzoek sluit af met het vermoeden dat begrensde, continue functies die gedefinieerd zijn op dichte deelverzameling van een interval I met een maat kleiner dan $\frac{1}{2}\mu(I)$ niet integreerbaar hoeven te zijn, maar als de maat van de deelverzameling groter is dan $\frac{1}{2}\mu(I)$ deze wel integreerbaar is.

Inhoudsopgave

1. Introductie

De calculus is gefocused op functies die gedefinieerd zijn op reële getallen. Maar aan functies die alleen gedefinieerd zijn op 'kleinere' verzamelingen wordt over het algemeen geen aandacht besteed, want functies gedefinieerd op de reële getallen doen precies waarvoor we calculus hebben bedacht. Door te kijken naar calculus op rationale getallen kan er een idee worden geschetst van analyse op functies gedefinieerd op deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ die vergelijkbare eigenschappen hebben met de rationale getallen.
Het doel van dit onderzoek is, om een integraal te definieren op functies die gedefinieerd zijn op $\mathbb{Q}$. Is er een passende integraal, zodat functies gedefinieerd op $\mathbb{Q}$ geintegreerd kunnen worden op een andere manier dan de bestaande integralen?
Wat nodig is voor de integraal, is dat deze voldoet aan de basis stellingen waar de bestaande integralen ook aan voldoen. De integraal zal geen triviale oplossingen moeten geven, aangezien dit niets zal toevoegen aan de huidige calculus. Voor verder onderzoek is het nodig om deze integraal te kunnen toepassen op functies gedefinieerd op vergelijkbare deelverzamelingen van de reële getallen met de rationale getallen. Het is handig als de integraal ook gedefinieerd is op functies die gedefinieerd zijn op $\mathbb{R}$, waarbij de gepresenteerde integraal de Riemann-integraal respecteert.
Om een integraal te bedenken ligt het voor de hand om bestaande integralen aan te passen. Echter is de Riemann-integraal niet gedefinieerd voor deze functies [Tao1]. Een andere mogelijkheid is, de functie uit te breiden naar de reële getallen door hem de waarde 0 te geven, waar hij op het moment niet gedefinieerd is. Maar die optie werkt niet. Het is namelijk bekend dat dan de indicator van de rationale getallen al niet Riemannintegreerbaar is en is het zeer wenselijk dat deze functie integreerbaar moet zijn. Zo'n zelfde uitbreiding kan toegepast worden op de Lebesgue-integraal [Tao2], maar deze zal altijd uitkomst 0 geven aangezien de maat van de rationale getallen 0 is. Voor maten (zie [Rooij]).

De integraal die in dit onderzoek wordt gepresenteerd zal een aanpassing zijn van de Riemann-integraal. Door minorerende en majorerende simpele functies te gebruiken gedefinieerd op $\mathbb{R}$, zoals bij de Riemann-integraal al gedaan wordt (zie [Rooij]), zodat waar de funcite wel is gedefinieerd de simpele functies deze respectivelijk de functie minoreren en majoreren waar deze is gedefinieerd. De verzameling waar de functies op gedefinieerd zijn zullen daardoor dicht moeten zijn, anders zou de integraal willekeurige waarden aan kunnen nemen.

In hoofdstuk 2.1 zullen de partities worden gedefinieerd waar simpele functies mee kunnen worden beschreven. In hoofdstuk 2.2 zullen deze simpele functies worden gedefinieerd. Uiteindelijk wordt de integraal in hoofdstuk 2.3 geïntroduceerd. In hoofdstuk 2.4 zien we dat de integraal de Riemann-integraal respecteert. In hoofdstuk 3 wordt gekeken naar de stellingen over continue functies.

2. Integraal

2.1. **Partities.** Om functies gedefinieerd op $\mathbb{Q}$ te kunnen integreren dient er eerst een integraal gedefinieerd worden. $\mathbb{Q}$ is een dichte verzameling van $\mathbb{R}$, waardoor het voor de hand ligt om niet een integraal te definieren voor alleen functies op $\mathbb{Q}$, maar voor functies die gedefinieerd zijn op dichte verzamelingen van $\mathbb{R}$. De integraal van zo'n functie zou gedefinieerd kunnen worden door de functie eerst uit te breiden naar een functie gedefinieerd op $\mathbb{R}$ en daar de integraal van te pakken. Dit levert echter geen nieuw resultaat aangezien we op deze manier alleen restricties van integreerbare functies in $\mathbb{R}$ zouden behandelen. We willen dat integralen op een verzameling zoals $\mathbb{Q}$ niet automatisch 'flauw' zijn. Hierdoor valt de Lebesgue-integraal af, aangezien dat $\mathbb{Q}$ een verwaarloosbare verzameling is. Hierdoor heeft bijvoorbeeld de indicator functie van $\mathbb{Q}$ Lebesgue integraal 0. De indicatorfunctie van $\mathbb{Q}$ is niet Riemannintegreerbaar, waardoor een variant van de Riemann-integraal een goede optie is.
Om een nieuwe integraal te definiëren, gebruiken we een variant op de Riemann integraal. Dit doen we door te negeren welke waarde de functie zou hebben op de getallen buiten de verzameling waarop we de functie definiëren. Bij Riemann gebruiken we rijtjes van functies die constant zijn op eindig veel deelintervallen die de functie van onder en boven benaderen. Om deze functies te definiëren, gebruiken we partities van een interval waarop deze fucnties gedefinieerd zijn.

Definitie 2.1. Zij $I \subset \mathbb{R}$ een interval en P is een eindige verzameling van intervallen. Dan is P een *partitie* van I, als $I = \bigcup_{J \in P} J$ en voor alle $x \in I$ ligt x in precies één interval $J \in P$.

Opmerking 2.2. *We gebruiken geen lege intervallen, zodat twee partities niet van elkaar kunnen verschillen als ze in principe dezelfde opdeling van I maken.*

Een partitie is verder op te delen. De elementen van een partitie zijn intervallen, maar van deze intervallen zouden ook partities gemaakt kunnen worden.

Definitie 2.3. Zij P en P' partities, dan is P' een *verfijning* van P, als voor alle $J \in P'$ er een $I \in P$ bestaat, zodat $J \subset I$. Dan zeggen we dat P' *fijner* is dan P.

Definitie 2.4. Zij $I \subset \mathbb{R}$ een interval en P, P' partities van I. Dan is *de overeenkomende verfijning* van P en P' gedefinieerd als

$$P\#P' := \{J \cap K : J \in P, K \in P' \text{ en } J \cap K \neq \emptyset\}.$$

Aangezien $J \cap K \subset J$ en $J \cap K \subset K$ voor alle intervallen J en K, volgt hieruit dat de overeenkomende verfijning $P\#P'$ fijner is dan beide parties P en P'.

Lemma 2.5. *Zij $I \subset \mathbb{R}$ een interval en P, P' partities van I. Dan is $P\#P'$ ook een partitie van I en is zowel fijner dan P als fijner dan P'.*

Bewijs. Als $x \in I$, dan zijn er $J \in P$ en $K \in P'$, zodat $x \in J$ en $x \in K$. Dan hebben we dat $x \in J \cap K$ en $J \cap K \in P\#P'$. J en K zijn intervallen, dus $J \cap K$ is ook een interval en is $P\#P'$ een partitie van I.
Als $L \in P\#P'$, dan zijn er $J \in P$ en $K \in P'$ zodat $L \in J \cap K$, dus is $P\#P'$ een verfijning van P en P'. □

2.2. **Simpele Functies.** De Riemann integraal is gedefinieerd door middel van simpele functies. Simpele functies zijn functies die stuksgewijs constant zijn en eindig veel waarden aannemen. Nu we partities hebben kunnen we simpele functies definiëren met behulp van partities volgens definitie 2.1.

Definitie 2.6. Zij $I \subset \mathbb{R}$ een interval, dan is een functie $f : I \to \mathbb{R}$ *simpel*, als er een partitie P van I bestaat en voor alle $J \in P$ $a_J \in \mathbb{R}$ bestaan, zodat

$$f(x) = \sum_{J \in P} a_J \mathbb{1}_J(x).$$

We zeggen dan dat f *simpel is ten opzichte van partitie* P.

Opmerking 2.7. *Een simpele functie neemt maximaal eindig veel waarden aan, aangezien dat een partities bestaat uit eindig veel intervallen.*

Aangezien we de simpele functie willen gebruiken als majorerende en minorerende functies -zoals bij de Riemann-integraal- is het belangrijk dat de simpele functies maar eindig veel waarden aan mogen nemen. Als ze oneindig veel waarden aan zouden mogen nemen, dan zou een functie gedefinieerd op een verzameling zoals $\mathbb{Q}$ zelf al een simpele functie zijn en dus altijd integreerbaar zijn.

Lemma 2.8. *Zij $I \subset \mathbb{R}$ een interval, zij P een partitie van I en zij $f : I \to \mathbb{R}$ een simpele functie ten opzichte van P. Stel P' is een partitie van I die fijner is dan P, dan is f ook simpel ten opzichte van partitie P'.*

Bewijs. Zij $J \in P$, dan is f constant in J, want f is simpel ten opzichte van P. We hebben als $A := \{K \in P' : K \subset J\}$, dan $\bigcup\limits_{K \in A} K = J$. Hieruit volgt dat f constant op alle $K \in A$, want f is constant op J. P' is een partitie, dus als $K, L \in P'$ dan $K \cap L = \emptyset$. Hieruit volgt dat $f(x) = \sum\limits_{J \in P} a_J \mathbb{1}_J(x) = \sum\limits_{J \in P} \sum\limits_{L \in \{K \in P' : K \subset J\}} a_L \mathbb{1}_L(x) = \sum\limits_{L \in P'} a_L \mathbb{1}_L(x)$ waarbij voor alle $J \in P$ $a_J \in \mathbb{R}$ bestaan, voor alle $L \in P'$ $a_L \in \mathbb{R}$ bestaan en als $J \in P$ en $L \in \{K \in P' : K \subset J\}$ dan $a_L = a_J$. Dus f is simpel ten opzichte van P'. □

Stelling 2.9. *Zij $I \subset \mathbb{R}$ een interval en $f : I \to \mathbb{R}$ en $g : I \to \mathbb{R}$ simpele functies, dan zijn de volgende beweringen waar:*

(1) *cf is een simpele functie voor alle $c \in \mathbb{R}$.*
(2) *$f + g$ is een simpele functie.*
(3) *$|f|$ is een simpele functie.*
(4) *fg is een simpele functie.*
(5) *$\frac{f}{g}$ is een simpele functie, als $g(x) \neq 0$ voor alle $x \in X$.*
(6) *$f \wedge g$ en $f \vee g$ zijn simpele functies.*

Bewijs. Stel P en P' zijn partities van I, zodat $f(x) = \sum\limits_{J \in P} a_J \mathbb{1}_J(x)$ en $g(x) = \sum\limits_{K \in P'} b_K \mathbb{1}_K(x)$. $P \# P'$ is volgens lemma 2.5 een verfijning van zowel P als P'. Volgens lemma 2.8 zijn f en g ook simpel ten opzichte van $P \# P'$ en hebben we $f(x) = \sum\limits_{L \in P \# P'} c_L \mathbb{1}_L(x)$ en $g(x) = \sum\limits_{L \in P \# P'} d_L \mathbb{1}_L(x)$ voor zekere c_L en d_L in $\mathbb{R}$.

(1) $cf(x) = c \sum\limits_{J \in P} a_J \mathbb{1}_J(x) = \sum\limits_{J \in P} c a_J \mathbb{1}_J(x)$, dus cf is ook een simpele functie.
(2) $f(x) + g(x) = \sum\limits_{L \in P \# P'} c_L \mathbb{1}_L(x) + \sum\limits_{L \in P \# P'} d_L \mathbb{1}_L(x) = \sum\limits_{L \in P \# P'} (c_L + d_L) \mathbb{1}_L(x)$, dus $f + g$ is ook een simpele functie.

(3) $|f(x)| = \left|\sum\limits_{J\in P} a_J \mathbb{1}_J(x)\right| = \sum\limits_{J\in P} |a_J|\mathbb{1}_J(x)$, dus $|f|$ is ook een simpele functie.

(4) We hebben

$$f(x)g(x) = \left(\sum_{L\in P\#P'} c_L \mathbb{1}_L(x)\right) \sum_{K\in P\#P'} d_K \mathbb{1}_K(x) = \sum_{L\in P\#P'} \sum_{K\in P\#P'} c_L d_K \mathbb{1}_L(x)\mathbb{1}_K(x).$$

Omdat $L \cap K = \emptyset$ voor alle $L, K \in P\#P'$, hebben we dat $f(x)g(x) = \sum\limits_{L\in P\#P'} c_L d_L \mathbb{1}_L(x)$, dus fg is een simpele functie.

(5) $\frac{1}{g}(x) = \sum\limits_{K\in P'} \frac{1}{b_K}\mathbb{1}_K(x)$ is een simpele functie, want $\frac{1}{b_K} \in \mathbb{R}$ voor alle b_K met $K \in P'$ aangezien $g(x) \neq 0$ voor alle $x \in I$. Volgens (4) is $\frac{f}{g}$ een simpele functie.

(6) $f(x) \wedge g(x) = \sum\limits_{L\in P\#P'} c_L \mathbb{1}_L(x) \wedge \sum\limits_{L\in P\#P'} d_L \mathbb{1}_L(x) = \sum\limits_{L\in P\#P'} (c_L \wedge d_L)\mathbb{1}_L(x)$, dus $f \wedge g$ is een simpele functie. Op dezelfde manier krijgen we $f \vee g$ is een simpele functie.

□

Definitie 2.10. Zij $f : I \to \mathbb{R}$ een simpele functie. Een *integraal* van een simpele functie $f(x) = \sum\limits_{J\in P} a_J \mathbb{1}_J(x)$ is $\int_I f = \sum\limits_{J\in P} a_J |J|$.

We hebben nu nog niet dat een integraal van een simpele functie uniek is. Het is namelijk nog niet uitgesloten of er doormiddel van een via een verschillende partitie te nemen de som $\sum\limits_{J\in P} a_J |J|$ geen andere waarde aan kan nemen. Hiervoor hebben we de volgende propositie.

Propositie 2.11. *De integraal van een simpele functie is uniek.*

Bewijs. Stel er zijn partities P en Q, zodat $f(x) = \sum\limits_{J\in P} a_J \mathbb{1}_J(x) = \sum\limits_{J\in Q} b_J \mathbb{1}_J(x)$ en $\sum\limits_{J\in P} a_J|J| \neq \sum\limits_{J\in Q} b_J|J|$. Dan is er een verfijning $P\#Q$, zodat $\sum\limits_{J\in P} a_J|J| = \sum\limits_{J\in P\#Q} c_J|J|$ en $\sum\limits_{J\in Q} b_J|J| = \sum\limits_{J\in P\#Q} d_J|J|$. We hebben $\sum\limits_{J\in P\#Q} c_J|J| \neq \sum\limits_{J\in P\#Q} d_J|J|$, maar $P\#Q$ is een verfijning van I waardoor er een $J \in P\#Q$ bestaat, zodat $c_J \neq d_J$. Maar $\sum\limits_{J\in P\#Q} c_J \mathbb{1}_J(x) = \sum\limits_{J\in P} a_J \mathbb{1}_J(x) = f(x) = \sum\limits_{J\in Q} b_J \mathbb{1}_J(x) = \sum\limits_{J\in P\#Q} d_J \mathbb{1}_J(x)$. Dit geeft tegenspraak aangezien dan voor alle $J \in P\#Q$ moet gelden $c_J = d_J$. Dus de integraal van een simpele functie is uniek. □

Opmerking 2.12. *Vanwege propositie 2.11 is er precies één integraal van een simpele functie, daarom kunnen we spreken over de integraal van een simpele functie.*

Lemma 2.13. *Zij I een interval in $\mathbb{R}$ en laat $f : I \to \mathbb{R}$ en $g : I \to \mathbb{R}$ simpele functies zijn. Dan zijn de volgende beweringen waar:*

(1) *De integraal van de simpele functie $f + g$ is $\int_I (f + g) = \int_I f + \int_I g$.*

(2) *Voor alle $c \in \mathbb{R}$ hebben we $\int_I cf = c \int_I f$.*

(3) *Als $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in X$, dan $\int_I f \geq 0$.*

(4) *Als $f(x) \geq g(x)$ voor alle $x \in X$, dan $\int_I f \geq \int_I g$.*

Bewijs. Zij P en Q partities van I en $a_J, b_K \in \mathbb{R}$ voor alle $J \in P$ en $K \in Q$, zodat $f(x) = \sum\limits_{J \in P} a_J \mathbb{1}_J(x)$ en $g(x) = \sum\limits_{K \in Q} b_K \mathbb{1}_K(x)$. Er is een verfijning $P\#Q$, zodat $f(x) = \sum\limits_{J \in P} a_J \mathbb{1}_J(x) = \sum\limits_{L \in P\#Q} c_L \mathbb{1}_L(x)$ en $g(x) = \sum\limits_{K \in Q} b_K \mathbb{1}_K(x) = \sum\limits_{L \in P\#Q} d_L \mathbb{1}_L(x)$.

(1) Uit het bewijs van 2.9 (2) hebben we dat $f(x) + g(x) = \sum\limits_{L \in P\#Q} (c_L + d_L) \mathbb{1}_L(x)$. Dan $\int_I (f + g) = \sum\limits_{L \in P\#Q} (c_L + d_L)|L| = \sum\limits_{L \in P\#Q} c_L|L| + \sum\limits_{L \in P\#Q} d_L|L| = \int_I f + \int_I g$.

(2) Uit het bewijs van stelling 2.9 (1) hebben we dat $cf(x) = \sum\limits_{J \in P} ca_J \mathbb{1}_J(x)$, dan $\int_I cf = \sum\limits_{J \in P} ca_J|J| = c \sum\limits_{J \in P} a_J|J| = c \int_I f$.

(3) $f(x) = \sum\limits_{J \in P} a_J \mathbb{1}_J(x) \geq 0$, dan $a_J \geq 0$ voor alle $J \in P$. Hieruit volgt dat $\int_I f = \sum\limits_{J \in P} a_J|J| \geq 0$, want $a_J|J| \geq 0$.

(4) $\sum\limits_{L \in P\#Q} c_L \mathbb{1}_L(x) = f(x) \geq g(x) = \sum\limits_{L \in P\#Q} d_L \mathbb{1}_L(x)$. Dan voor alle $x \in L \in P\#Q$, $c_L \geq d_L$, $\int_I f = \sum\limits_{L \in P\#Q} c_L|L| \geq \sum\limits_{L \in P\#Q} d_L|L| = \int_I g$.

$\square$

Opmerking 2.14. *Op exact dezelfde manier als bij (3) en (4) gelden ook de beweringen:*

(1) *Als $f(x) \leq 0$ voor alle $x \in X$, dan $\int_I f \leq 0$.*

(2) *Als $f(x) \leq g(x)$ voor alle $x \in X$, dan $\int_I f \leq \int_I g$.*

Opmerking 2.15. *Merk op dat $\int_I f \geq \int_I g$ nog steeds geldt als $f(x) < g(x)$ op maximaal eindig veel punten, omdat als $f(x) < g(x)$ voor $x \in J \in P$, dan $|J| = 0$. Zo ook $\int_I f \leq \int_I g$ als $f(x) > g(x)$ op maximaal eindig veel punten.*

Lemma 2.13 helpt ons met het bewijzen van dezelfde soort eigenschappen voor de uiteindelijke integraal.

2.3. **De Integraal.**

Definitie 2.16. Zij X een dichte verzameling in een interval I. Een functie $f : X \to \mathbb{R}$ is *integreerbaar*, als er een rijtje $\overline{f_0}, \overline{f_1}, \ldots$ en een rijtje $\underline{f_0}, \underline{f_1}, \ldots$ van simpele functies bestaan, zodat voor alle $i \in \mathbb{N}$ $f \leq \overline{f_i}$ en $f \geq \underline{f_i}$ in X, waarbij $\lim\limits_{n\to\infty} \int_I \overline{f_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \int_I \underline{f_n}$. We definiëren een integraal van f als $\int_X f := \lim\limits_{n\to\infty} \int_I \overline{f_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \int_I \underline{f_n}$.

Opmerking 2.17. *Als X een interval is, dan is de integraal de Riemann-integraal, zie* [Rooij].

Lemma 2.18. *Zij X een dichte deelverzameling van een interval I. Zij $f : I \to \mathbb{R}$ en $g : I \to \mathbb{R}$ een simpele functies. Stel $g(x) \geq f(x)$ voor alle $x \in X$, dan zijn er maximaal eindig veel punten $y \in I$, zodat $g(y) < f(y)$. Stel $g(x) \leq f(x)$ voor alle $x \in X$, dan zijn er maximaal eindig veel punten $y \in I$, zodat $g(y) > f(y)$*

Bewijs. Stel $g(x) \geq f(x)$ voor alle $x \in X$. g is een simpele functie, dus er is een partitie P van I, zodat $g(x) = \sum\limits_{J \in P} a_J \mathbb{1}_J(x)$, met $a_J \in \mathbb{R}$. Volgens definitie 2.1 zijn er maar eindig veel intervallen $J \in P$. Stel er zijn meer dan eindig veel punten $y \in I$, zodat $g(y) < f(y)$, dan bestaat er een interval $J \in P$, zodat $g(y) > f(y)$ voor alle $y \in J$ met $|J| > 0$. X is een dichte verzameling in I en $J \subset I$, dus er is een $z \in X$, zodat $z \in J$ en $g(z) < f(z)$, maar $g(x) \geq f(x)$ voor alle $x \in X$. Dit geeft een tegenspraak, dus er zijn maximaal eindig veel punten $y \in I$, zodat $g(y) > f(y)$. De tweede bewering van de stelling gaat op exact dezelfde manier. $\square$

Propositie 2.19. *Zij X een dichte verzameling in een interval I. Stel de functie $f : X \to \mathbb{R}$ is integreerbaar, dan is de integraal uniek.*

Bewijs. Stel er bestaan rijtjes $\overline{f_0}, \overline{f_1}, \ldots; \underline{f_0}, \underline{f_1}, \ldots; \overline{g_0}, \overline{g_1}, \ldots$ en $\underline{g_0}, \underline{g_1}, \ldots$, zodat voor alle $n \in \mathbb{N}$ $f \leq \overline{f_n}$, $f \leq \overline{g_n}$, $f \geq \underline{f_n}$ en $f \geq \underline{g_n}$ in X, waarbij $\lim\limits_{n\to\infty} \int_I \overline{f_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \int_I \underline{f_n}$ en $\lim\limits_{n\to\infty} \int_I \overline{g_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \int_I \underline{g_n}$. Voor alle $\epsilon > 0$ is er een $N > 0$, zodat voor alle $n > N$

$|\int_I \overline{f_n} - \int_I \underline{f_n}| < \epsilon$ en $|\int_I \overline{g_n} - \int_I \underline{g_n}| < \epsilon$. We hebben $\underline{g_n}(x) \leq f(x) \leq \overline{f_n}(x)$ voor alle $x \in X$ en X is een dichte verzameling in I, dus volgens lemma 2.18 hebben we $\underline{g_n}(x) \leq \overline{f_n}(x)$ met $x \in I$ op eindig veel punten na. Volgens lemma 2.13 in combinatie met opmerking 2.15 hebben we dat $\int_I \underline{g_n} \leq \int_I \overline{f_n}$. Op dezelfde manier hebben we ook $\int_I \underline{f_n} \leq \int_I \overline{g_n}$. Ook hebben we op deze manier dat $\int_I \overline{f_n} - \int_I \underline{f_n} < \epsilon$. Hieruit volgt $\int_I \underline{g_n} \leq \int_I \overline{f_n} \leq \int_I \underline{f_n} + \epsilon \leq \int_I \overline{g_n} + \epsilon$. Aangezien ook $|\int_I \overline{g_n} - \int_I \underline{g_n}| < \epsilon$ hebben we dat $\lim_{n\to\infty} \int_I \overline{f_n} = \lim_{n\to\infty} \int_I \overline{g_n}$, dus is de integraal uniek. □

Opmerking 2.20. *Bij het bewijs van de uniekheid van de integraal gebruiken we dat X dicht is in I om lemma 2.18 toe te kunnen passen. Zonder de dichtheid, zou de integraal willekeurige waardes aan kunnen nemen.*

Opmerking 2.21. *Vanwege propositie 2.19 is er precies één integraal en kunnen we spreken over de integraal.*

Lemma 2.22. *Zij X een dichte verzameling in een interval I. Een functie $f : X \to \mathbb{R}$ is integreerbaar d.e.s.d.a. er zijn simpele functies $\overline{f_0}, \overline{f_1}, \ldots$ en $\underline{f_0}, \underline{f_1}, \ldots$ met voor alle $n \in \mathbb{N}$ $f \leq \overline{f_n}$ en $f \geq \underline{f_n}$, zodat $\lim_{n\to\infty} \int_I (\overline{f_n} - \underline{f_n}) = 0$.*

Bewijs. Als f een integreerbare functie is, dan is het duidelijk dat $\lim_{n\to\infty} \int_I (\overline{f_n} - \underline{f_n}) = 0$. Stel er zijn simpele functies $\overline{f_0}, \overline{f_1}, \ldots$ en $\underline{f_0}, \underline{f_1}, \ldots$ met voor alle $n \in \mathbb{N}$ $f \leq \overline{f_n}$ en $f \geq \underline{f_n}$, zodat $\lim_{n\to\infty} \int_I (\overline{f_n} - \underline{f_n}) = 0$. Dan voor alle $\epsilon > 0$ is er een $N > 0$, zodat voor alle $k, n > N$ $\int_I \overline{f_n} - \int_I \underline{f_n} < \epsilon$, $\int_I \overline{f_n} \leq \int_I \underline{f_n} + \epsilon \leq \int_I \overline{f_k} + \epsilon$. Dus $|\int_I \overline{f_n} - \int_I \overline{f_k}| < \epsilon$. Zo ook $|\int_I \underline{f_n} - \int_I \underline{f_k}| < \epsilon$. Dus $\int_I \overline{f_n}$ en $\int_I \underline{f_n}$ zijn Cauchy-rijen en hebben dus beide een limiet, zodat $\lim_{n\to\infty} \int_I \overline{f_n} = \lim_{n\to\infty} \int_I \underline{f_n}) = 0$. Hieruit volgt dat f integreerbaar is. □

Stelling 2.23. *Zij X een dichte verzameling in een interval I en $f : X \to \mathbb{R}$ en $g : X \to \mathbb{R}$ zijn integreerbare functies. Dan zijn de volgende beweringen waar:*

(1) *De functie $f + g$ is integreerbaar en $\int_X (f + g) = \int_X f + \int_X g$.*
(2) *Voor alle $c \in \mathbb{R}$ is de functie cf integreerbaar en hebben we $\int_X cf = c \int_X f$.*
(3) *Als $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in X$, dan $\int_X f \geq 0$.*
(4) *Als $f(x) \geq g(x)$ voor alle $x \in X$, dan $\int_X f \geq \int_X g$.*

Bewijs. f en g zijn integreerbaar, dus er bestaan rijtjes $\overline{f_0}, \overline{f_1}, \ldots; \underline{f_0}, \underline{f_1}, \ldots; \overline{g_0}, \overline{g_1}, \ldots$ en $\underline{g_0}, \underline{g_1}, \ldots$ van simpele functies, zodat voor alle $n \in \mathbb{N}$ $f \leq \overline{f_n}$, $f \geq \underline{f_n}$, $g \leq \overline{g_n}$ en $g \geq \underline{g_n}$, waarbij $\lim_{n\to\infty} \int_I \overline{f_n} = \lim_{n\to\infty} \int_I \underline{f_n}$ en $\lim_{n\to\infty} \int_I \overline{g_n} = \lim_{n\to\infty} \int_I \underline{g_n}$.

(1) Voor alle $n \in \mathbb{N}$, geldt $f + g \leq \overline{f_n} + \overline{g_n}$, $f + g \geq \underline{f_n} + \underline{g_n}$. Volgens stelling 2.13 (1) hebben we dat $\overline{f_n} + \overline{g_n}$ integreerbaar en $\underline{f_n} + \underline{g_n}$, waarbij $\int_I (\overline{f_n} + \overline{g_n}) = \int_I \overline{f_n} + \int_I \overline{g_n}$ en $\int_I (\underline{f_n} + \underline{g_n}) = \int_I \underline{f_n} + \int_I \underline{g_n}$, dus $\int_I (\overline{f_n} + \overline{g_n}) = \int_I \overline{f_n} + \int_I \overline{g_n} = \int_I \underline{f_n} + \int_I \underline{g_n} = \int_I (\underline{f_n} + \underline{g_n})$, hieruit volgt dat $\lim_{n\to\infty} \int_I \overline{f_n} + \overline{g_n} = \lim_{n\to\infty} \int_I \overline{f_n} + \lim_{n\to\infty} \int_I \overline{g_n} = \int_X f + \int_X g = \lim_{n\to\infty} \int_I \underline{f_n} + \lim_{n\to\infty} \int_I \underline{g_n} = \lim_{n\to\infty} \int_I \underline{f_n} + \underline{g_n}$. Dus $f + g$ is integreebaar en $\int_X (f + g) = \int_X f + \int_X g$.

(2) Volgens stelling 2.13 (2) hebben we dat $c\overline{f_n}$ en $c\overline{f_n}$ zijn integreerbare simpele functies met $\int_I c\overline{f_n} = c \int_I \overline{f_n}$ en $\int_I c\underline{f_n} = c \int_I \underline{f_n}$. Hieruit volgt dat $\lim_{n\to\infty} \int_I c\overline{f_n} = c \lim_{n\to\infty} \int_I \overline{f_n} = c \lim_{n\to\infty} \int_I \underline{f_n} = \lim_{n\to\infty} \int_I c\underline{f_n}$, dus de functie cf integreerbaar en hebben we $\int_X cf = c \int_X f$.

(3) De functie $\phi : X \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $\phi(x) := 0$ voor alle $x \in X$, is een simpele functie. Stel $g : X \to \mathbb{R}$ een simpele functie, dan is $g \vee \phi$ ook een simpele functie. Volgens definitie 2.16 bestaan er rijtjes $\overline{f_0}, \overline{f_1}, \ldots$ en $\underline{f_0}, \underline{f_1}, \ldots$ van simpele functies, zodat voor alle $i, j \in \mathbb{N}$ $f \leq \overline{f_i}$ en $f \geq \underline{f_j}$, waarbij $\lim_{n\to\infty} \int_X \overline{f_n} = \lim_{n\to\infty} \int_X \underline{f_n}$. Dan zijn $\overline{f_0} \vee \phi, \overline{f_1} \vee \phi, \ldots$ en $\underline{f_0} \vee \phi, \underline{f_1} \vee \phi, \ldots$ rijtjes van simpele functies. Voor alle $i, j \in \mathbb{N}$ $f \vee \phi = f \leq \overline{f_i} \vee \phi$ en $f \vee \phi = f \geq \underline{f_j} \vee \phi$, want $f \geq 0$. Omdat $\lim_{n\to\infty} \int_X \overline{f_n} = \lim_{n\to\infty} \int_X \underline{f_n}$, geldt $\lim_{n\to\infty} \int_X \overline{f_n} \vee \phi = \lim_{n\to\infty} \int_X \underline{f_n} \vee \phi$. Dus $\int_X f = \lim_{n\to\infty} \int_X \overline{f_n} \wedge \phi \geq 0$.

(4) Als $f(x) \geq g(x)$, dan $f(x) - g(x) \geq 0$. Uit (1) en (2) volgt dat $f - g$ integreerbaar is en $\int_X f - g = \int_X f - \int_X g$. Uit (3) volgt $\int_X f - \int_X g = \int_X f - g \geq 0$, dus $\int_X f \geq \int_X g$.

□

Definitie 2.24. Een functie $f : X \to \mathbb{R}$ is *stijgend* als voor alle $x, y \in X$ geldt:

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

Als bovendien geldt:

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

dan is f *strikt stijgend*. Analoog is f *dalend* als voor alle $x, y \in X$ geldt:

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y).$$

Als bovendien geldt:

$$x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

dan is f *strikt dalend*.

Propositie 2.25. *Zij X een dichte verzameling in een interval I en $f : X \to \mathbb{R}$ een integreerbare functie en voor alle $x \in X$ $-A \leq f(x) \leq A$. Laat $C \in [0, \infty)$ een constante en $j : [-A, A] \to \mathbb{R}$ een stijgende functie en $|j(s) - j(t)| \leq C|s - t|$, met $s, t \in [-A, A]$. Dan is $j \circ f$ integreerbaar.*

Bewijs. We hebben $A \wedge f = f$ en $-A \vee f = f$. Volgens stelling 2.9 (6) en omdat f integreerbaar is hebben we dat er rijtjes $\overline{f_0}, \overline{f_1}, \ldots$ en $\underline{f_0}, \underline{f_1}, \ldots$ van simpele functies hebben, zodat voor alle $n \in \mathbb{N}$ $-A \leq \underline{f_n} \leq f \leq \overline{f_n} \leq A$. Dan hebben we $j \circ \underline{f_n} \leq j \circ f \leq j \circ \overline{f_n}$. Volgens $|j(s) - j(t)| \leq C|s - t|$ hebben we dan $\int_X (j \circ \overline{f_n} - j \circ \underline{f_n}) \leq \int_X (\overline{f_n} - \underline{f_n})$. Vanwege lemma 2.22 hebben we dat $j \circ f$ integreerbaar. $\square$

Gevolg 2.26. *Zij X een dichte verzameling in een interval I en $f : X \to \mathbb{R}$ een begrensde integreerbare functie, dan is f^2 ook een integreerbare functie met integraal $\int_X (f^2)$.*

Bewijs. We kunnen aannemen dat $0 \leq f \leq 1$, want er is een $M \in \mathbb{R}$, zodat $-M \leq f \leq M$ en kan er met behulp van stelling 2.23 een functie $g : X \to \mathbb{R}$ maken met $g = \frac{f+M}{2M}$, zodat $0 \leq g \leq 1$. Pas propositie 2.25 toe op f en $j(x) := x^2$, merk op dat $|s^2 - t^2| \leq |s - t|$ voor alle $s, t \in [0, 1]$. Hieruit volgt de stelling direct. $\square$

Lemma 2.27. *Zij X een dichte verzameling in een interval I. Laat $\phi : X \to \mathbb{R}$ de functie zijn gedefinieerd door $\phi(x) := 0$ voor alle $x \in I$ en $f : X \to \mathbb{R}$ een integreerbare* *functie. Dan zijn $f \vee \phi$ en $f \wedge \phi$ integreerbaar met integralen respectivelijk $\int_X f \vee \phi$ en $\int_X f \wedge \phi$.*

Bewijs. De functie $j : I \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x) := 0$, als $x < 0$ en $f(x) := x$ als $x \geq 0$. Dan is j duidelijk een stijgende functie en $|j(x) - j(y)| \leq |x - y|$, met $x, y \in I$. Dus volgens propositie 2.25 hebben we dat $j \circ f = f \vee \phi$ een integreerbare functie is met integraal $\int_X j \circ f = \int_X f \vee \phi$. Op exact dezelfde manier is $k \circ f = f \wedge \phi$ een integreerbare functie is met integraal $\int_X k \circ f = \int_X f \wedge \phi$, met de functie $k : I \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x) := 0$, als $x > 0$ en $f(x) := x$ als $x \leq 0$. □

Stelling 2.28. *Zij X een dichte verzameling in een interval I en $f : X \to \mathbb{R}$ en $g : X \to \mathbb{R}$ zijn integreerbare functies. Dan zijn de volgende beweringen waar:*

(1) *De functie $fg : X \to \mathbb{R}$ ook integreerbaar en de integraal is $\int_X fg$*

(2) *$f \vee g : X \to \mathbb{R}$ en $f \wedge g : X \to \mathbb{R}$ zijn integreerbare functies en de integralen zijn respectivelijk $\int_X f \vee g$ en $\int_X f \wedge g$*

(3) *$|f|$ is integreerbaar en de integraal is $\int_X |f|$.*

Bewijs. (1) We weten als f en g integreerbaar zijn, dan is de functie $\frac{(f+g)^2 - f^2 - g^2}{2}$ ook integreerbaar vanwege stelling 2.23 en gevolg 2.26.
$\frac{(f+g)^2 - f^2 - g^2}{2} = \frac{f^2 + g^2 - f^2 - g^2 + 2fg}{2} = fg$, dus de functie fg is integreerbaar.

(2) Merk op dat $f \vee g = f - g \vee \phi$ en $f \wedge g = f - g \wedge \phi$, met ϕ zoals in lemma 2.27. Dan hebben we volgens stelling 2.23 en lemma 2.27, dat $f - g \vee \phi$ en $f - g \wedge \phi$ integreerbaar zijn en de integralen zijn respectivelijk $\int_X f \vee g$ en $\int_X f \wedge g$.

(3) We hebben dat $|f| = f \vee \phi + f \wedge \phi$, dus volgens (2) en stelling 2.23 hebben we dat $|f|$ is integreerbaar en de integraal is $\int_X |f|$.

□

2.4. **Uitbreiding en Restrictie.** Door te kijken naar restricties en uitbreidingen van functies, kan de Riemann-integraal gekoppeld worden aan de geintroduceerde integraal. Aangezien in opmerking 2.17 functies gedefinieerd op $\mathbb{R}$ gelijk zijn aan de Riemann-integraal, ligt het voor de hand om te kijken naar functies die een restrictie zijn van hiervan, of dat dit uitbreidingen zijn.

Stelling 2.29. *Zij X een dichte verzameling in een interval I.*

(1) *Zij $f : I \to \mathbb{R}$ een integreerbare functie, dan is de restrictie f_X ook een integreerbare functie.*

(2) *Zij $f : X \to \mathbb{R}$ een integreerbare functie, dan is er een uitbreiding $\hat{f} : I \to \mathbb{R}$, zodat $\hat{f}(x) = f(x)$ voor alle $x \in X$ en $\hat{f}$ is integreebaar.*

Bewijs. (1) f is integreerbaar, dus er bestaan rijtjes $\overline{f_0}, \overline{f_1}, \dots$ en $\underline{f_0}, \underline{f_1}, \dots$ van simpele functies, zodat $\lim\limits_{n\to\infty} \int_I \overline{f_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \int_I \underline{f_n}$ en voor alle $n \in \mathbb{N}$ $f \leq \overline{f_n}$ en $f \geq \underline{f_n}$ op I, dus ook op X. Hieruit volgt dat f_X is integreerbaar.

(2) f is integreerbaar, dus er bestaan rijtjes $\overline{f_0}, \overline{f_1}, \dots$ en $\underline{f_0}, \underline{f_1}, \dots$ van simpele functies, zodat voor alle $n \in \mathbb{N}$ $f \leq \overline{f_n}$ en $f \geq \underline{f_n}$ in X en $\lim\limits_{n\to\infty} \int_I \overline{f_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \int_I \underline{f_n}$. Definiëer $\hat{f}$, zodat $\hat{f}(x) := f(x)$ als $x \in X$ en $\hat{f}(x) := \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{f_n} \vee \underline{f_n}(x)$ als anders. Dan voor alle $n \in \mathbb{N}$ en $x \in I$ $\hat{f}(x) \leq \overline{f_n} \vee \underline{f_n}(x)$ en $\hat{f}(x) \geq \overline{f_n} \wedge \underline{f_n}(x)$, waarbij volgens stelling 2.9 (6) $\overline{f_n} \vee \underline{f_n}(x)$ en $\overline{f_n} \wedge \underline{f_n}(x)$ simpele functies zijn. Aangezien $\lim\limits_{n\to\infty} \int_I \overline{f_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \int_I \underline{f_n}$ hebben we $\lim\limits_{n\to\infty} \int_I \overline{f_n} \vee \underline{f_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \int_I \overline{f_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \int_I \overline{f_n} \wedge \underline{f_n}$ en is $\hat{f}$ integreerbaar en $\int_I \hat{f} = \lim\limits_{n\to\infty} \int_I \overline{f_n} \vee \underline{f_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \int_I \overline{f_n} \wedge \underline{f_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \int_I \overline{f_n} = \int_X f$.

$\square$

Door stelling 2.29 is te zien dat de integraal de Riemann-integraal respecteert.

3. Continue Functies op $\mathbb{Q}$

Zoals in [Tao1] staat, is een begrensde continue functie Riemannintegreerbaar. Hoe gedraagt de integraal zich op continue functies en uniform continue functies? Dat is wat we graag willen beantwoorden in dit hoofdstuk.

3.1. **Continuïteit.**

Definitie 3.1. Een functie $f : X \to \mathbb{R}$ is *continu* in $x_0 \in X$, als voor alle $\epsilon > 0$ is er $\delta > 0$, zodat

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

wanneer $|x - x_0| < \delta$. Een functie $f : X \to \mathbb{R}$, met $X \subset \mathbb{R}$ is *continu* op X, als f continu is voor alle $x \in X$.

Definitie 3.2. Een functie $f : X \to \mathbb{R}$ is *uniform continu* in $x_0 \in X$, als voor alle $\epsilon > 0$ en $x \in X$ is er $\delta > 0$, zodat

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

wanneer $|x - x_0| < \delta$. Een functie $f : X \to \mathbb{R}$, met $X \subset \mathbb{R}$ is *uniform continu* op X, als f uniform continu is voor alle $x \in X$.

Stelling 3.3. *Zij X een dichte verzameling in een begrensd interval I. Zij $f : X \to \mathbb{R}$ uniform continu en begrensd, dan is f integreerbaar.*

Bewijs. Voor alle $n \in \mathbb{N}$ is er een $\epsilon_n > 0$, zodat als $x, y \in X$ en $|x - y| < \epsilon_n$, dan $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{n}$. Maak een partitie P_n van I met $|J_n| < \epsilon_n$ voor alle $J_n \in P_n$. Als $|J_n| > 0$, dan is er $x \in X$ en $x \in J_n$, want X is dicht in I en $J_n \subset I$. Voor alle $J_n \in P_n$, kies $a_{J_n} = f(x)$, als $|J_n| > 0$ met een $x \in J_n$ en $x \in X$ en $a_{J_n} = 0$ anders. Maak rijtjes $\overline{f_0}, \overline{f_1}, \ldots;\ \underline{f_0}, \underline{f_1}, \ldots,$ met $\overline{f_n}(x) := \sum\limits_{J_n \in P_n} (a_{J_n} + \frac{1}{n})\mathbb{1}_{J_n}(x)$ en $\underline{f_n}(x) := \sum\limits_{J_n \in P_n} (a_{J_n} - \frac{1}{n})\mathbb{1}_{J_n}(x)$. Dan hebben we voor alle $n \in \mathbb{N}$ $f \leq \overline{f_n}$ en $f \geq \underline{f_n}$ en $\int_I \overline{f_n} - \underline{f_n} = \sum\limits_{J_n \in P_n} (a_{J_n} + \frac{1}{n})|J_n| - (a_{J_n} - \frac{1}{n})|J_n| = 0$ en hebben we volgens lemma 2.22 dat f integreerbaar is.

$\square$

Gevolg 3.4. *Zij X een dichte verzameling in een interval I en $f : X \to \mathbb{R}$ een stijgende functie, dan is f integreerbaar.*

Bewijs. x is uniform continu, dus vanwege stelling 3.3 hebben we dat x een integreerbare functie is. Volgens propositie 2.25 is $f \circ x = f$ een integreerbare functie. $\square$

Definitie 3.5. Een interval I is *kleiner* dan een interval J, als voor alle $x \in I$ en $y \in J$ $x < y$ en $\sup(I) < \inf(J)$. Dit noteren we als $I < J$. Een interval I is *groter dan* een interval J, als $J < I$ en noteren dit als $I > J$.

Propositie 3.6. *Er is een functie continu op* $\mathbb{Q} \cap [0,1]$*, maar niet integreerbaar op* $I = [0,1]$.

Om propositie 3.7 te bewijzen gaan we eerst een functie f construeren, die continu is op een verzameling X en niet integreerbaar is op I, waarbij X dicht ligt in I en $\mathbb{Q} \cap [0,1] \subset X$. Daarvoor gaan we eerst de verzameling X definieren met behulp van de volgende constructies.

Constructie I

Zij $(r_n)_n$ de aftelling van $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Laten $W, Z \subset I$ open intervallen zijn met $W < Z$.

- Kies r_v tussen W en Z met v minimaal.
- Kies r_w tussen $\{r_v\}$ en Z met w minimaal.
- Maak intervallen L en M met $W < L < M < Z$, $r_v \in L$, $r_w \in M$ en $|L| + |M| < \epsilon$ voor een $\epsilon > 0$.

Constructie II

Laten $W_0 < W_1 < \ldots < W_N$ open intervallen zijn, waarbij $0 \in W_0$, $1 \in W_1$ en $N \in \mathbb{N}$. Zij $(r_n)_n$ de aftelling van $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Neem aan $r_0, \ldots, r_{N-1} \in W_0 \cup \ldots \cup W_N - 1$.

- Maak met behulp van constructie I L_i en M_i voor elke $0 \geq i < N$, zodat $W_i < L_i < M_i < W_{i+1}$ en zij $\epsilon > 0$, dan $|L_0| + |M_0| + \ldots + |L_{N-1}| + |M_{N-1}| < \epsilon$.

2

Constructie III

Laten $W_0^N < W_1^N < \ldots < W_{3^N}^N$ open intervallen zijn.

- Maak met behulp van constructie II $W_0^N < W_1^N < \ldots < W_{3^{N+1}}^{N+1}$
- Definieer $X_N := \bigcup_{i \leq 3^N} W_i$.
- Definieer $X := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_N$.
- Definieer de functie $f : X \to \mathbb{R}$, met $f(x) := 0$ als $x \in W_0^N, W_2^N, \ldots, W_{3^N-1}^N$ en $f(x) := 1$ als $x \in W_1^N, W_3^N, \ldots, W_{3^N}^N$ voor alle $N \in \mathbb{N}$.

Dan hebben we dat $W_i^N = W_{3i}^{N+1}$, waardoor f goed gedefinieerd is.

Merk op dat we om $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_N$ te construeren we bij elke X_N eindig veel verzameling toevoegen met behulp van constructie I. Deze verzamelingen waren willekeurig klein gekozen. Hierdoor kunnen we voor alle $\epsilon > 0$ een X_ϵ construeren, zodat $\lambda(X) \leq \epsilon$. De bijbehorende functie f noemen we f_ϵ.

Propositie 3.7. *Er is een functie continu op $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, maar niet integreerbaar op $I = [0,1]$.*

Bewijs. Zij $\overline{f_{\frac{1}{2}}}$ een simpele functie op I die $f_{\frac{1}{2}}$ majoreert. $\overline{f_{\frac{1}{2}}}$ is een simpele functie, zodat $\overline{f}_{\frac{1}{2}} = \sum\limits_{V \in P} a_V \mathbb{1}_V(x)$ met P een partitie van I en voor alle $V \in P$ $a_V \geq 0$. Dan $a_V \geq 1$, zodra er een $x \in V$ bestaat met $f_{\frac{1}{2}}(x) = 1$. Stel $x < y$ met $f_{\frac{1}{2}}(x) = f_{\frac{1}{2}}(y) = 0$, dan óf $(x,y) \subset X_{\frac{1}{2}}$, óf er is een z, met $x < z < y$ en $f_{\frac{1}{2}}(z) = 1$. Definieer $Q := \{J \in P : J \subset X_{\frac{1}{2}}$ en er is een $x \in J$, zodat $f_{\frac{1}{2}}(x) = 1\}$. De intervallen uit $P \setminus Q$ liggen helemaal in $X_{\frac{1}{2}}$, dus $\sum\limits_{V \in P \setminus Q} |V| \leq \lambda(X_{\frac{1}{2}}) \leq \frac{1}{2}$. We hebben

$$\int \overline{f}_{\frac{1}{2}} \geq \sum_{V \in Q} |V| = |I| - \sum_{V \in P \setminus Q} |V| = 1 - \sum_{V \in P \setminus Q} |V| \geq 1 - \lambda(X_{\frac{1}{2}}) > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Zij $\underline{f_{\frac{1}{2}}}$ een simpele functie op I die $f_{\frac{1}{2}}$ minoreerd. Op dezelfde manier hebben we dat $\underline{f}_{\frac{1}{2}} = \sum\limits_{W \in P'} a_W \mathbb{1}_W(x)$ met P' een partitie van I en voor alle $W \in P$ $a_V \geq 0$. Dan $a_W = 0$, zodra er een $x \in V$ bestaat met $f_{\frac{1}{2}}(x) = 0$. Stel $x < y$ met $f_{\frac{1}{2}}(x) =$

$f_{\frac{1}{2}}(y) = 1$, dan óf $(x, y) \subset X_{\frac{1}{2}}$, óf er is een z, met $x < z < y$ en $f_{\frac{1}{2}}(z) = 0$. Definieer $R := \{J \in P' : J \subset X_{\frac{1}{2}}$ en er is een $x \in J$, zodat $f_{\frac{1}{2}}(x) = 0\}$. De inttervallen $P' \setminus R$ liggen helemaal in $X_{\frac{1}{2}}$, dus $\sum_{W \in P' \setminus R} |W| \geq \lambda(X_{\frac{1}{2}}) \geq \frac{1}{2}$. We hebben

$$\int \underline{f}_{\frac{1}{2}} \leq \sum_{W \in R} |W| = |I| - \sum_{W \in P' \setminus R} |W| = 1 - \sum_{W \in P' \setminus R} |W| \leq 1 - \lambda(X_{\frac{1}{2}}) < 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Hieruit volgt dat $\int \underline{f}_{\frac{1}{2}} \leq < \frac{1}{2} < \int \overline{f}_{\frac{1}{2}}$, dus $f_{\frac{1}{2}}$ is niet integreerbaar.
Uit de constructie hebben we dat $\mathbb{Q} \cap [0, 1] \subset X$, dus X is dicht in I. Merk op dat vanwege de constructie van f en de dichtheid van X we hebben dat f continu is, want voor alle $x \in X$, $f_{\frac{1}{2}}(x) = 0$ dan is er een open verzameling $Y \subset I$ met $f_{\frac{1}{2}}(Y) = 0$ of $f_{\frac{1}{2}}(x) = 1$ dan is er een open verzameling $Y \subset I$ met $f_{\frac{1}{2}}(Y) = 1$.

We hebben dat $\mathbb{Q} \cap [0, 1] \subset X$ en $f_{\frac{1}{2}}$ is niet integreerbaar op X, hieruit volgt dat $f_{\frac{1}{2}}|_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ is niet integreerbaar, maar $f_{\frac{1}{2}}|_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ is uit de constructie wel continu, want $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ ligt dicht in I, dus ook dicht in X. □

Propositie 3.8. *Zij I een interval, $X \subset I$ dicht en $f : I \setminus X \to \mathbb{R}$ een continue functie. Stel $\mu(X) = 1$ dan is f integreerbaar.*

Bewijs. Definieer de grafiek G van f als $G := \{(x, y) : x \in I \setminus X, y \in \mathbb{R}$ en $f(x) = y\}$. Definieer de functie $g : I \to \mathbb{R}$ door

- $g(x) := f(x),$ als $x \in X$
- $g(x) := \sup\{z | (x, z) \in \overline{G}\},$ als $x \notin X$

Zij $\{x_n\} \in X$ een rij die convergeert naar $x \in X$, waarbij $x_n \geq x$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. f is continue, dus $\{(x, f(x_n))\} \subset G$ is een convergerende deelrij van $\{(x, g(x_n))\} \subset \overline{G}$. Zij (x, α) een limiet, dan $\alpha \leq g(x)$. g is continue in elk punt van X en $g|_X = f$. Hieruit volgt dat g semicontinue is, want als $t \in \mathbb{R}$, dan is $\{x | g(x) < t\}$ een open verzameling. g is semicontinue, dus g is meetbaar. $I \setminus X$ is verwaarloosbaar, dus g is bijna overal continue, dus g is Riemannintegreerbaar. Hieruit volgt dat f integreerbaar is op X. $\square$

Gevolg 3.9. *Zij I een interval. Zij $f : I \setminus \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ continue, dan is f integreerbaar.*

Bewijs. We weten dat $\mu(I \setminus \mathbb{Q}) = 1$, dus volgt het direct uit propositie 3.8. $\square$

4. Conclusie

De integraal die gedefinieerd is in definitie 2.16 respecteert de Riemann-integraal en zorgt ervoor dat $\int_0^1 \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)dx = 1$. De belangrijkste eigenschappen van de integraal zijn:

- Als een functie $f : I \to \mathbb{R}$ dan $\int_I f(x)dx =$ Riemann $\int_I f(x)dx$ (zie stelling 2.17)
- $\int_0^1 \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)dx = 1$
- Hij voldoet aan de belangrijkste eisen van een integraal (te zien in stelling 2.13 en stelling 2.23)
- Zij $f : \mathbb{Q} \cap I \to \mathbb{R}$ uniform continue dan is f integreerbaar (zie stelling 3.3)
- Een begrensde continue functie $f : \mathbb{Q} \cap I \to \mathbb{R}$ hoeft niet integreerbaar te zijn (zie stelling 3.7)
- Een begrensde continue functie $f : I \setminus \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ is integreerbaarn (zie propositie 3.8).

Vanwege stelling 3.7 is de geïntroduceerde integraal niet zo handig te gebruiken als bijvoorbeeld de Riemann-integraal of de Lebesgue-integraal. Hierdoor is het vaststellen of een functie integreerbaar is niet triviaal. Hieruit volgt dat er altijd meer restricties zijn op functies voor latere toepassingen. We hebben nu dat continue functie op geconctrueerde dichte verzamelingen in een interval I, zoals contructies in propositie 3.7, die een maat hebben die kleiner is dan $\frac{1}{2}\mu(I)$, niet integreerbaar hoeven te zijn. Het vermoeden is dat dit ook geldt in het algemeen voor dichte deelzerzamelingen van I, zolang de maat kleiner is dan $\frac{1}{2}\mu(I)$. Daarnaast is er een vermoeden dat een dichte deelverzameling van een interval I met maat groter dan $\frac{1}{2}\mu(I)$ maat $\mu(I)$ hebben en dat continue functies op deze verzamling ook integreerbaar is volgens propositie 3.8.

Referenties

[Tao1] Terence Tao *Analysis I*, Hindustan Book Agency, January 2006. Third edition, 2014.

[Tao2] Terence Tao *Analysis II*, Hindustan Book Agency, January 2006. Third edition, 2014.

[Rooij] Arnoud van Rooij *Maat en Integraal*, Radboud Universiteit Nijmegen, 2009.