Bovendien volgt onmiddellijk dat de kolom-rang van M gelijk is aan de kolom-rang van M^{T} – welke de rij-rang van M is – omdat $N^{\mathrm{T}} = F^{\mathrm{T}} \cdot M^{\mathrm{T}} \cdot E^{\mathrm{T}}$ en F^{T} en E^{T} weer inverteerbaar zijn.

Maar dat betekent dat rij-rang en kolom-rang van een matrix altijd gelijk zijn en we dus van *de rang* van een matrix kunnen spreken. Omdat ook duidelijk is dat een $m \times m$ matrix inverteerbaar is dan en slechts dan als de rang gelijk aan m is, volgt onmiddellijk dat er een product E van elementaire matrices bestaat bij elke inverteerbare $m \times m$ matrix M met de eigenschap dat $E \cdot M = I_m$; die E is te vinden door te vegen met de rijen van $M|I_m$ tot links de eenheidsmatrix I_m komt te staan, want dan is het resultaat de $m \times 2m$ matrix $I_m|E$.

In het bijzonder is elke inverteerbare M zelf te schrijven als product van elementaire matrices omdat $M = E^{-1}$, en E^{-1} is te schrijven als product van inversen van elementaire matrices.

7.3.5 Determinanten en Inversen

Tenslotte vatten we eigenschappen van de determinant samen. Deze eigenschappen gelden voor een willekeurig lichaam L. Als definitie voor de determinant van een $n \times n$ matrix A uit $\mathrm{Mat}_{n\times n}(L)$ kan genomen worden:

(1) $\det(A) = A_{11}$ als $n = 1$;

(n) $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} A_{i1} \det A_{(i,1)}$ als $n \geq 2$;

hier is $(-1)^{i+j} \det A_{(i,j)}$ de *cofactor* van A_{ij}, gedefinieerd als de determinant van de $(n-1) \times (n-1)$-matrix $A_{(i,j)}$ verkregen uit A door de i-de rij en de j-de kolom weg te laten, met een teken vermenigvuldigd.

Hier kan deze *ontwikkeling naar de eerste kolom* ook vervangen worden door de *ontwikkeling naar de j-de kolom*, voor $1 \leq j \leq n$:

(n') $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} \det A_{(i,j)}$ als $n \geq 2$;

of door de *ontwikkeling naar de j-de rij*, $1 \leq j \leq n$:

(n'') $\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} A_{jk} \det A_{(j,k)}$ als $n \geq 2$.

Daaruit volgt voor elke A dat de determinant gelijk is aan de determinant van zijn getransponeerde (verkregen door te spiegelen in de hoofddiagonaal), dus $\det A = \det A^{\mathrm{T}}$.

Voor een *bovendriehoeksmatrix* (onder de hoofddiagonaal staan allemaal nullen) en voor een *benedendriehoeksmatrix* (nullen boven de diagonaal) dat $\det A = \prod_{i=1}^{n} A_{ii}$.

Uit de definitie volgt dat:

- verwisseling van twee rijen (of kolommen) van A tot vermenigvuldiging van $\det A$ met -1 leidt;
- vermenigvuldiging van een rij (of kolom) van A met een scalar λ tot vermenigvuldiging van $\det A$ met λ leidt;
- het optellen van een veelvoud van een rij (of kolom) van A bij een andere rij (of kolom) $\det A$ ongemoeid laat.

Omdat ook geldt: $\det AB = \det A \cdot \det B$ voor elk tweetal $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$, hebben we dat A inverteerbaar is dan en slechts dan als $\det A \neq 0$, en dan is

$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$; bovendien is, als A inverteerbaar is

$$A^{-1} = (\det A)^{-1} \operatorname{adj} A,$$

waar de *geadjungeerde* $\operatorname{adj} A$ van $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ gedefinieerd is als de matrix in $\mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ met op plaats i, j de cofactor $(-1)^{j+i} \det A_{(j,i)}$. Let op dat dit de i, j-de cofactor van de *getransponeerde* van A is!

De gelegenheid ontbreekt hier om al deze beweringen te bewijzen. We noemen alleen nog de belangrijke eigenschap dat de determinantfunctie is te karakteriseren als de enige functie van $\mathrm{Mat}_{n\times n}(L)$ naar L die voldoet aan de eigenschappen dat $\det I_n = 1$, dat het een *multilineaire* functie is in de kolommen van A, en waarvoor geldt dat $\det A = 0$ als twee kolommen van A hetzelfde zijn.

8

Inproductruimten

In dit hoofdstuk gaan we gebruik maken van afstandsbegrip op reële en complexe vectorruimten. In het algemeen is er geen begrip afstand (of lengte) gedefinieerd in een lichaam. Maar in $\mathbb{C}$, en dus in deellichamen daarvan, is dat wel het geval. Het afstandsbegrip in een vectorruimte wordt bepaald door het inproduct; dat is een speciaal geval van een bilineaire vorm, die we wel voor willekeurige lichamen kunnen definiëren.

8.1 Bilineaire vormen

8.1.1 Definities Zij V een L-vectorruimte. Dan heet een afbeelding $\mathsf{B} : V \times V \to L$, die aan (v, w) een getal $\mathsf{B}(v, w) \in L$ toevoegt een *bilineaire vorm* als:

(1) Voor elke $w \in V$ is de afbeelding $\mathsf{B}_w : V \to L$, gedefinieerd door $\mathsf{B}_w(v) = \mathsf{B}(v, w)$, een L-lineaire afbeelding; en

(2) Voor elke $v \in V$ is de afbeelding $\mathsf{B}_v : V \to L$, gedefinieerd door $\mathsf{B}_v(w) = \mathsf{B}(v, w)$, een L-lineaire afbeelding.

We noemen B *symmetrisch* als $\mathsf{B}(v, w) = \mathsf{B}(w, v)$ voor alle $v, w \in V$, en *antisymmetrisch* als $\mathsf{B}(v, w) = -\mathsf{B}(w, v)$ voor alle $v, w \in V$.

De bij B horende *kwadratische vorm* Q is de afbeelding $Q : V \longrightarrow L$ gedefinieerd door $Q(v) = \mathsf{B}(v, v)$.

Het zal duidelijk zijn waar de naam vandaan komt: een bilineaire afbeelding is lineair in beide argumenten v, w. Het belangrijkste voorbeeld van een bilineaire vorm wordt gegeven door het inproduct.

8.1.2 Voorbeelden

(1) Het gewone inproduct op $\mathbb{R}^n$ gegeven door $\mathsf{B}(v, w) = \langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i$ is een bilineaire vorm.

(2) Als $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(L)$ een $n\times n$ matrix is dan geeft de afbeelding $\mathsf{B}_A(v,w) = v^{\mathrm{T}}Aw \in L$ een bilineaire vorm op L^n.

De volgende stelling drukt uit dat wanneer we in V een basis kiezen, zeg $\mathcal{E} = \{e_1,\ldots,e_n\}$, B vastligt door de waarden $\mathsf{B}(e_i,e_j)$ op deze basis. Bijgevolg kunnen we B representeren door een matrix, namelijk de matrix waarin op positie i,j de waarde van $\mathsf{B}(e_i,e_j)$ staat.

8.1.3 Stelling *Als B een bilineaire vorm is op een vectorruimte V met basis $\mathcal{E} = \{e_1,\ldots,e_n\}$, dan geldt:*

$$\mathsf{B}(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^n \beta_j e_j) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \alpha_i\beta_j \mathsf{B}(e_i,e_j)$$

Bewijs: Gebruik achtereenvolgens lineariteit in het eerste en het tweede argument:

$$\begin{aligned}\mathsf{B}(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^n \beta_j e_j) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathsf{B}(e_i, \sum_{j=1}^n \beta_j e_j) \\ &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \alpha_i\beta_j \mathsf{B}(e_i,e_j).\end{aligned}$$

8.1.4 Definitie We noteren de *matrix van de bilineaire vorm* B met op plek i,j het getal $\mathsf{B}(e_i,e_j)$ met $G_{\mathsf{B}}^{\mathcal{E}}$ of G_{B} als de basis duidelijk is. Deze matrix heet de *Gram matrix* van B.

8.1.5 Stelling *Zij B een bilineaire vorm. Zij C de bilineaire vorm gedefinieerd door $\mathsf{C}(v,w) = v^{\mathrm{T}}G_{\mathsf{B}}w$. Dan geldt $\mathsf{B} = \mathsf{C}$.*

Bewijs: Voor de lezer.

8.1.6 Opmerking Blijkbaar heeft *elke* bilineaire vorm de vorm van het tweede voorbeeld boven. Na basiskeuze is elke bilineaire vorm te schrijven als:

$$\mathsf{B}(\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}) = a_{11}\alpha_1\beta_1 + a_{12}\alpha_1\beta_2 + \ldots + a_{nn}\alpha_n\beta_n = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)A\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$$

waar A de matrix $(a_{ij}) = G_{\mathsf{B}}$ is.

Veel eigenschappen van een bilineaire vorm B zijn van de matrix G_{B} af te lezen.

8.1.7 Stelling

$$\mathsf{B} \quad \textit{is symmetrisch} \quad \iff \quad G_{\mathsf{B}} \quad \textit{is symmetrisch.}$$

Bewijs: G_{B} is symmetrisch dan en slechts dan als $(G_{\mathsf{B}})_{ij} = (G_{\mathsf{B}})_{ji}$ voor alle i,j. Per definitie is $(G_{\mathsf{B}})_{ij} = \mathsf{B}(e_i,e_j)$, dus symmetrie van G_{B} is equivalent met: $\mathsf{B}(e_i,e_j) = \mathsf{B}(e_j,e_i)$ voor alle i,j hetgeen volgens Stelling **??** het geval is dan en slechts dan als $\mathsf{B}(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^n \beta_j e_j) = \mathsf{B}(\sum_{j=1}^n \beta_j e_j, \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i)$ voor alle $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\ldots,\beta_n$, dat wil zeggen $\mathsf{B}(v,w) = \mathsf{B}(w,v)$ voor alle v,w.

In het bovenstaande hebben we niets geëist over de gekozen basis. Dus symmetrie is onafhankelijk van de keuze van basis.

8.1.8 Gevolg *Voor bases $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ van V geldt:*

$$M_{\mathsf{B}}^{\mathcal{E}} \quad \textit{symmetrisch} \quad \iff \quad M_{\mathsf{B}}^{\mathcal{F}} \quad \textit{symmetrisch.}$$

De vraagt dringt zich op of er altijd een basis voor de vectorruimte is te vinden ten opzichte waarvan B een *mooie* Gram-matrix heeft, namelijk een diagonaalmatrix

8.1.9 Voorbeeld Zij $V = \mathbb{R}^3$ en laat

$$\mathsf{B}\big((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{\mathrm{T}}, (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^{\mathrm{T}}\big) = \alpha_1\beta_1 - \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 + 2\alpha_2\beta_2 + 4\alpha_3\beta_3.$$

We bekijken het effect van het gebruik van een andere dan de standaardbasis $\mathcal{E}$; zij bijvoorbeeld $\mathcal{F} := \{f_1, f_2, f_3\} = \{e_1, e_1 + e_2, \frac{1}{2}e_3\}$. Laten we eens kijken hoe B er ten opzichte van $\mathcal{F}$ uitziet.

$$\begin{aligned}
&\mathsf{B}(a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3, b_1 f_1 + b_2 f_2 + b_3 f_3)\\
&= \mathsf{B}(a_1 e_1 + a_2(e_1 + e_2) + a_3\frac{1}{2}e_3, b_1 e_1 + b_2(e_1 + e_2) + b_3\frac{1}{2}e_3)\\
&= \mathsf{B}((a_1 + a_2)e_1 + a_2 e_2 + \frac{1}{2}a_3 e_3, (b_1 + b_2)e_1 + b_2 e_2 + \frac{1}{2}b_3 e_3)\\
&= (a_1 + a_2)(b_1 + b_2) - (a_1 + a_2)b_2 - a_2(b_1 + b_2) + 2a_2 b_2 + 4(\frac{1}{2}a_3\frac{1}{2}b_3)\\
&= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.
\end{aligned}$$

Ten opzichte van deze basis is de bilineaire afbeelding het gewone inproduct!

Het is dus van belang om bilineaire vormen op verschillende bases te beschouwen. Met $\mathsf{B}^{\mathcal{F}}$ zullen we de bilineaire vorm ten opzichte van de basis $\mathcal{F}$ aangeven.

In het voorgaande voorbeeld:

$$B^{\mathcal{E}}\big((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{\mathrm{T}}, (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^{\mathrm{T}}\big) = \alpha_1\beta_1 - \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 + 2\alpha_2\beta_2 + 4\alpha_3\beta_3$$

en

$$B^{\mathcal{F}}\big((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{\mathrm{T}}, (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^{\mathrm{T}}\big) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3.$$

De volgende Stelling geeft het verband tussen de matrix $G_{\mathsf{B}}^{\mathcal{E}} = G_{\mathsf{B}^{\mathcal{E}}}$ en de matrix $G_{\mathsf{B}}^{\mathcal{F}} = G_{\mathsf{B}^{\mathcal{F}}}$ aan.

8.1.10 Stelling *Laten $\mathcal{E}$ en $\mathcal{F}$ bases voor V zijn, en zij Φ de transformatiematrix die $\mathcal{F}$ in $\mathcal{E}$ overvoert. Dan geldt:*

$$G_{\mathsf{B}}^{\mathcal{F}} = \Phi^{\mathrm{T}} G_{\mathsf{B}}^{\mathcal{E}} \Phi.$$

Ging een matrix die een lineaire afbeelding representeerde onder basistransformatie over in een geconjugeerde matrix $\Phi^{-1}G\Phi$, de matrix van een bilineare vorm gaat over in $\Phi^{\mathrm{T}} G_{\mathsf{B}} \Phi$.

8.1.11 Definitie We noemen twee vierkante matrices $M, N \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(L)$ *equivalent* als er een inverteerbare T bestaat zodat $M = T^{\mathrm{T}} N T$. We schrijven

$M \sim N$. Twee bilineaire vormen B en C noemen we *equivalent* (en we schrijven wel $\mathsf{B} \sim \mathsf{C}$) als voor zekere basiskeuze geldt: $G_{\mathsf{C}} \sim G_{\mathsf{B}}$.

Met andere woorden: B en C zijn equivalent als er bases $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ bestaan zodat $\mathsf{B}^{\mathcal{E}} = \mathsf{C}^{\mathcal{F}}$.

OPGAVE 0 *Laat zien dat dit ook echt een equivalentierelatie definieert.*

OPGAVE 1 *Als er een inverteerbare T is zodat $T^{\mathrm{T}} G_{\mathsf{B}} T$ een diagonaalmatrix is dan is B symmetrisch. Bewijs dat.*

We kunnen ons (wederom) afvragen of een symmetrsiche matrix altijd *equivalent* is met een diagonaalmatrix. In dit geval is het antwoord *'bijna altijd'* bevestigend. Eerst maar eens een uitzondering.

8.1.12 Voorbeeld Zij

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{F}_2).$$

Dan is G niet equivalent met een diagonaalmatrix. Kijk maar: laat T een willekeurige inverteerbare matrix zijn dan

$$T^{\mathrm{T}} G T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ca & ad+bc \\ ad+bc & 2bd \end{pmatrix}$$

en $ad + bc = ad - bc = \det(T) \neq 0$ in $\mathbb{F}_2$.

Dat dit niet werkt in dit geval heeft te maken met het feit dat in $\mathbb{F}_2$ de gelijkheid $2 = 0$ geldt. In een lichaam met $2 \neq 0$ gaat het wel goed.

8.1.13 Stelling *Zij G een symmetrische matrix over een lichaam L waarin $2 \neq 0$. Dan is G equivalent met een diagonaalmatrix D.*

BEWIJS: We geven een bewijs in de vorm van een algoritme, dat je precies vertelt hoe je D kunt construeren. We veronderstellen dat $G \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(L)$.

Stap 1: Als G een diagonaalmatrix is (bijvoorbeeld de nulmatrix, of een 1×1 matrix), dan ben je klaar.

Stap 2: Veronderstel dat $n \geq 2$. Allereerst zoek je v_1 met $v_1^{\mathrm{T}} G v_1 \neq 0$:

Als er een diagonaalelement $G_{ii} \neq 0$ is, kies dan $v_1 = e_i$ (want $e_i^{\mathrm{T}} G e_i = G_{ii}$).

Zijn alle elementen op de diagonaal 0 zoek dan i, j zodat $G_{ij} \neq 0$. Neem $v_1 = e_i + e_j$, want $(e_i + e_j)^{\mathrm{T}} G (e_i + e_j) = e_i^{\mathrm{T}} G e_i + e_i^{\mathrm{T}} G e_j + e_j^{\mathrm{T}} G e_i + e_j^{\mathrm{T}} G e_j = G_{ii} + G_{ij} + G_{ji} + G_{jj} = G_{ij} + G_{ji} = 2G_{ij} \neq 0$.

Stap 3: Laat $w = Gv_1$, en bepaal de kern van de afbeelding $f : V \to L$ gedefinieerd door $f(u) = u^{\mathrm{T}} w$. Merk op dat dit een lineaire afbeelding is.

Bovendien is f surjectief: laat $a = f(v_1) \in L$, dan is $a \neq 0$ door de keuze van v_1. Voor $b \in L$ is $f\big((b/a)v_1\big) = (b/a)f(v_1) = b$. Omdat $n = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{im} f)$ heeft $\ker(f) \subseteq V$ dimensie $n - 1$.

Laat $\{v_2, \ldots, v_n\}$ een basis voor $\ker f$ zijn.

Stap 4: Maak nu $T_n = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, met de vectoren v_i als kolommen.

Stel T_n is niet inverteerbaar. Dat is equivalent met: $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ is een afhankelijk stelsel. Omdat $\{v_2, \ldots, v_n\}$ een onafhankelijk stelsel is, kan dat laatste alleen als $v_1 \in \{v_2, \ldots, v_n\} = \ker(f)$, oftewel $f(v_1) = 0$; dat is in tegenspraak met de keuze in Stap 2. Dus T_n is inverteerbaar.

Bovendien is $T_n^{\mathrm{T}} G T_n$ van de vorm

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & G' \end{pmatrix}$$

waar G' een symmetrische $(n-1) \times (n-1)$ matrix is, omdat $(T_n^{\mathrm{T}} G T_n)_{ij} = v_i^{\mathrm{T}} G v_j$ en $v_i G v_1 = f(v_i) = 0$ voor $i > 1$ want $v_i \in \ker(f)$.

Ga nu naar Stap 1 en herhaal de procedure voor G'.

Het is duidelijk dat dit proces na eindig veel stappen een diagonaalmatrix D oplevert.

Opgave 2 *Ga na waar in het bewijs gebruikt is dat de karakteristiek van het lichaam geen* 2 *is.*

8.2 Inproductruimten

We geven eerst de definitie van een reële inproductruimte.

8.2.1 Definities Een *inproduct* op een reële vectorruimte V is een symmetrische bilineaire vorm B op V waarvan de bijbehorende kwadratische vorm Q *positief definiet* is op V, dat wil zeggen, voor alle $0 \neq v \in V$ geldt $Q(v) = B(v,v) > 0$. We geven zo'n inproduct meestal aan met $\langle v, w\rangle$ in plaats van $B(v,w)$. De ruimte V voorzien van een inproduct heet een *inproductruimte.*

De *lengte* of *norm* $||v||$ van een $v \in V$ is gedefinieerd door $||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$.

De *afstand* $\mathrm{d}(v,w)$ tussen twee vectoren $v, w \in V$ is per definitie de lengte van de verschilvector: $\mathrm{d}(v,w) = ||v - w||$.

De *hoek* tussen niet-nul vectoren $v, w \in V$ is de hoek ϕ waarvoor de cosinusregel geldt:

$$\cos\phi = \frac{\langle v, w\rangle}{||v|| \cdot ||w||}.$$

Twee vectoren v, w staan loodrecht op elkaar (genoteerd als $v \perp w$) als hun inproduct 0 is: $\langle v, w\rangle = 0$. We zeggen ook wel dat v en w *orthogonaal* zijn; algemener is een stelsel van vectoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *orthogonaal* als elk tweetal het is, dus $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ voor $i \neq j$. Het stelsel heet *orthonormaal* als het orthogonaal is en elk vector lengte 1 heeft: $||v_i|| = \langle v_i, v_i\rangle = 1$.

Als W een lineaire deelruimte is van een inproductruimte V geven we met $W^\perp$ de lineaire deelruimte aan van vectoren die orthogonaal zijn met alle vectoren van W. Als verzameling is dus $W^\perp = \{v \in V |\ \forall w \in W : \langle v, w\rangle = 0\}$.

8.2.2 Opmerking In een algemene L-vectorruimte kun je niet over *positief definiet* spreken; het is dan ook niet zo duidelijk hoe het lengtebegrip te generaliseren naar L-vectorruimten (maar we zullen dat straks wel doen voor complexe vectorruimten). Omdat deellichamen van $\mathbb{R}$ (zoals bijvoorbeeld $\mathbb{Q}$) de ordening van $\mathbb{R}$ erven, kunnen we op vectorruimten over zulke lichamen wel eenvoudig dezelfde begrippen definiëren.

De nulvector staat loodrecht op elke andere vector, maar maakt nooit deel uit van een orthogonaal stelsel.

Een bondige manier om een orthonormaal stelsel te karakteriseren is door $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$, het Kroneckersymbool.

8.2.3 Voorbeelden

- Het *standaardinproduct* op $\mathbb{R}^n$ wordt gegeven door $\langle v, w \rangle = v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n$; de lengte van $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ is dan $||v|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$. Voor $n = 1$ is die lengte dus de absolute waarde: $||v|| = |v|$. De ruimte $\mathbb{R}^n$ voorzien van het standaardinproduct wordt wel de n-dimensionale *Euclidische vectorruimte* genoemd.

- De verzameling van reëelwaardige, continue functies $C([0,1])$ op het interval $[0,1]$ vormt een vectorruimte onder de gebruikelijke optelling van functies en vermenigvuldiging met scalairen. We kunnen deze tot een inproductruimte maken door
$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x$$
als inproduct te nemen.

- Op de vectorruimte $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ van reële $n \times n$ matrices (onder optelling) kunnen we een inproduct definiëren door $\langle M, N \rangle = \mathrm{Tr}(N^{\mathrm{T}} M)$.

OPGAVE 3 *Laat zien dat alle inproducten op $\mathbb{R}^n$ equivalent zijn met het standaardinproduct (als bilineaire vorm).*

OPGAVE 4 *Ga na dat $\mathrm{Tr}(N^{\mathrm{T}} M)$ een inproduct definieert.*

De volgende stelling karakteriseert de inproducten onder de bilineaire vormen, aan de hand van hun bijbehorende matrices.

OPGAVE 5 *Laat zien dat als $M \sim N$ voor $M, N \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ dan $\det M > 0 \iff \det N > 0$.*

8.2.4 Stelling *Als $G = G_{\mathsf{B}}$ de matrix van de symmetrische bilineaire vorm B op de n-dimensionale reële vectorruimte V is ten opzichte van een willekeurige basis, dan geldt:*
$$\mathsf{B} \text{ is een inproduct} \quad \iff \quad \det G^{(k)} > 0 \quad \text{voor } 1 \leq k \leq n,$$
waar $G^{(k)}$ de $k \times k$ 'linksbovendeelmatrix' $(G_{ij})_{1\leq i,j\leq k}$ is.

BEWIJS: Kies een basis $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ voor V ten opzichte waarvan G diagonaalvorm heeft. Als B een inproduct is, geldt $M_{ii} = \mathsf{B}(e_i, e_i) > 0$. Voor elke $1 \leq k \leq n$ geldt bovendien dat B een inproduct is op de ruimte opgespannen door $e_1, \ldots, e_k$, en daarop is $G_{\mathsf{B}} = G^{(k)}$ en $\det G^{(k)} = G_{11} \cdots G_{kk} > 0$.

Laat, omgekeerd, $G = G_{\mathsf{B}}$ gegeven zijn ten opzichte van een basis $\mathcal{E}$, en de eigenschap hebben dat de linksbovendeelmatrices $G^{(k)}$ allemaal positieve determinant hebben. Bepaal dan voor $k = 1, 2, \ldots, n$ met behulp van de Gram-Schmidt orthogonalisatiemethode (zie het volgende hoofdstukje) vectoren $f_1, f_2, \ldots, f_k$ uit $e_1, e_2, \ldots, e_k$ met de eigenschappen dat $f_1, f_2, \ldots, f_k$ en $e_1, e_2, \ldots, e_k$ dezelfde deelruimte van V opspannen, dat $f_1, f_2, \ldots, f_k$ een orthogonaal stelsel vormt en dat $||f_1|| \cdot ||f_2|| \cdots ||f_k|| = \det G^{(k)}$. Dan is ten opzichte van de basis $f_1, \ldots, f_n$ de symmetrische vorm B gegeven door $\mathsf{B}(f_i, f_j) = 0$ als $i \neq j$ en $\mathsf{B}(f_i, f_i) = \det G^{(i)} / \det G^{(i-1)} > 0$, voor $i = 2, 3, \ldots n$, terwijl $\mathsf{B}(f_1, f_1) = G_{11} > 0$. Dus is

$$\mathsf{B}(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \mathsf{B}(f_i, f_i) > 0.$$

Vervolgens definiëren we complexe inproductruimten. Het is niet goed genoeg om naar bilineaire vormen te kijken, omdat de waarden van $\mathsf{B}(v, v)$ niet altijd reëel zijn (en dan geen zinnige 'lengte' geven).

8.2.5 Definities Een *Hermitese vorm* op een complexe vectorruimte V is een afbeelding $\mathbb{H} : V \times V \to \mathbb{C}$ die voldoet aan:

(1) Voor elke $w \in V$ is de afbeelding $\mathbb{H}_w : V \to k$, gedefinieerd door $\mathbb{H}_w(v) = \mathbb{H}(v, w)$, een $\mathbb{C}$-lineaire afbeelding; en

(2) Voor elke $v, w \in V$ geldt $\mathbb{H}(v, w) = \overline{\mathbb{H}(w, v)}$, de complex geconjugeerde van $\mathbb{H}(w, v)$.

OPGAVE 6 *Laat zien dat een Hermitese* $\mathbb{H}$ *wel voldoet aan* $\mathbb{H}(v, w_1 + w_2) = \mathbb{H}(v, w_1) + \mathbb{H}(v, w_2)$, *maar dat* $\mathbb{H}(v, \lambda w) = \overline{\lambda}\mathbb{H}(v, w)$.

8.2.6 Opmerking Vanwege de eigenschap uit de opgave noemt men $\mathbb{H}$ wel sesquilineair ('anderhalf lineair'). Merk ook op dat een Hermitese $\mathbb{H}$ wél bilineair is op een reële (deel)vectorruimte, en dat $\mathbb{H}(v, v) \in \mathbb{R}$ voor elke $v \in V$.

8.2.7 Definities Een *complex inproduct* is een positief definiete Hermitese vorm $\mathbb{H}$ op een complexe vectorruimte V, dus $\mathbb{H}(v, v) > 0$ voor $v \in V$. Een paar bestaande uit V met een complex inproduct heet een *complexe inproductruimte.*

8.2.8 Voorbeelden

- Het *standaardinproduct* op $\mathbb{C}^n$ wordt gegeven door $\langle v, w \rangle = v_1\overline{w_1} + \cdots + v_n\overline{w_n}$; de lengte van $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ is dan

$$||v|| = \sqrt{v_1\overline{v_1} + v_2\overline{v_2} + \cdots + v_n\overline{v_n}} = \sqrt{|v_1|^2 + \cdots + |v_n|^2},$$

  als we met $|a+bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ de modulus van een complex getal aangeven. Voor $n = 1$ is de lengte dus gewoon de modulus: $||v|| = |v|$.

- De verzameling van *complex*waardige, continue functies op het interval $[0, 1]$ vormt een vectorruimte onder de gebruikelijke optelling van functies en vermenigvuldiging met scalairen. We kunnen deze tot een inproductruimte maken door

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)} \mathrm{d}x$$

  als inproduct te nemen.

- Op de vectorruimte $\mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ van complexe $n \times n$ matrices (onder optelling) kunnen we een inproduct definiëren door $\langle M, N \rangle = \mathrm{Tr}(N^*M)$, waar $N^* = \overline{N^t}$ de *complex-geconjugeerde getransponeerde* van N is (die soms ook wel ge-adjungeerde wordt genoemd).

OPGAVE 7 *Ga na dat*

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x$$

inderdaad een inproduct op $C^{\mathbb{C}}([0, 2\pi])$ *definieert; waar wordt de continuïteit gebruikt?*

OPGAVE 8 *Ga na dat* $\mathrm{Tr}(N^*M)$ *een inproduct definieert.*

8.2.9 Stelling *Zij* V *een inproductruimte over het lichaam* L *der reële of complexe getallen. Dan:*

(i) *voor elke* $v \in V$ *en* $\lambda \in L$ *geldt:* $||\lambda v|| = |\lambda| \cdot ||v||$;
(ii) $||v|| \geq 0$; *en bovendien geldt:* $||v|| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad v = 0$;
(iii) *voor elke* $v, w \in V$ *geldt:* $|\langle v, w\rangle| \leq ||v|| \cdot ||w||$;
(iv) *voor elke* $v, w \in V$ *geldt:* $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$.

BEWIJS: Bewering (i) volgt onmiddellijk uit

$$\sqrt{\langle \lambda v, \lambda v\rangle} = \sqrt{\lambda\overline{\lambda}\langle v, v\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle v, v\rangle}.$$

In het bijzonder is $\langle 0, 0\rangle = 0$, en omdat vanwege het positief definiet zijn van $\langle v, v\rangle$ geldt $||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle} > 0$ tenzij $\langle v, v\rangle = 0$, volgt (ii).

Als $w = 0$ geldt ongelijkheid (iii) trivialerwijze; neem nu aan $w \neq 0$. Dan is voor $\lambda \in L$:

$$0 \leq ||v - \lambda w||^2 = \langle v - \lambda w, v - \lambda w\rangle = \langle v, v\rangle - \overline{\lambda}\langle v, w\rangle - \lambda\langle w, v\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle w, w\rangle.$$

Met de speciale keuze:

$$\lambda = \frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle}$$

levert dat het niet-negatief zijn van

$$\langle v, v\rangle - \frac{|\langle v, w\rangle|^2}{\langle w, w\rangle} = ||v||^2 - \frac{|\langle v, w\rangle|^2}{||w||^2}$$

en dan volgt (iii).

Gebruik nu (iii) om te zien dat:

$$||v+w||^2 = \langle v+w, v+w\rangle = ||v||^2+\langle v, w\rangle+\overline{\langle v, w\rangle}+||w||^2 \leq ||v||^2+2||v||\cdot||w||+||w||^2$$

hetgeen gelijk is aan $(||v|| + ||w||)^2$.

8.2.10 Opmerking De laatste twee ongelijkheden in de stelling staan bekend als de *Cauchy-Schwarz ongelijkheid* en de *driehoeksongelijkheid*.

8.3 Gram-Schmidt orthogonalisatie

Het doel van Gram-Schmidt orthogonalisatie is om een gegeven basis voor een inproductruimte te veranderen in een *orthonormale* basis.

De eerste Stelling toont het nut van een orthogonale basis: het biedt de mogelijkheid een gegeven vector heel eenvoudig op de gegeven basis te schrijven.

8.3.1 Stelling *Als $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ een orthogonale basis voor V is, en $v \in V$ is $v = \sum_i \lambda_i b_i$. Dan geldt*

$$\lambda_i = \frac{\langle v, b_i\rangle}{\langle b_i, b_i\rangle}.$$

In het bijzonder, als $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ een orthonormale basis voor V is, en $v \in V$ is $v = \sum_i \lambda_i b_i$. dan geldt $\lambda_i = \langle v, b_i\rangle$, en $v = \sum_i \langle v, b_i\rangle b_i$.

Bewijs:

$$\langle v, b_i\rangle = \langle \sum_j \lambda_j b_j, b_i\rangle = \sum_j \lambda_j \langle b_j, b_i\rangle = \lambda_i \langle b_i, b_i\rangle.$$

Opgave 9 *Laat zien dat hieruit volgt dat een orthogonaal stelsel van niet-nul vectoren lineair onafhankelijk is.*

8.3.2 Stelling [Gram-Schmidt orthogonalisatie] *Laat $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ een basis zijn voor de inproductruimte V. Dan vormt $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ een orthogonale basis voor V als $c_1 = b_1$ en*

$$c_m = b_m - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\langle b_m, c_i\rangle}{\langle c_i, c_i\rangle} c_i,$$

voor $m = 2, \ldots, n$.

Bewijs: Het bewijs gaat met inductie naar n; we laten zien dat steeds geldt dat $c_1, \ldots, c_k$ orthogonaal zijn en dezelfde ruimte opspannen als $b_1, \ldots, b_k$.

Het geval $k = 1$ is duidelijk.

Veronderstel nu dat $c_1, \ldots, c_{k-1}$ orthogonaal zijn en dezelfde ruimte opspannen als $b_1, \ldots, b_{k-1}$. Nu is

$$c_k = b_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle b_k, c_i\rangle}{\langle c_i, c_i\rangle} c_i,$$

en als $c_k = 0$ dan ligt b_k in de ruimte opgespannen door $c_1, \ldots, c_{k-1}$, hetgeen volgens de hypothese dezelfde is als $b_1, \ldots, b_{k-1}$. Dat is een tegenspraak.

Beschouw nu $\langle c_k, c_j\rangle$; dat is gelijk aan

$$\langle b_k, c_j\rangle - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle b_k, c_i\rangle}{\langle c_i, c_i\rangle} \langle c_i, c_j\rangle.$$

Maar $\langle c_i, c_j\rangle = 0$ als $i \neq j$, dus

$$\langle c_k, c_j\rangle = \langle b_k, c_j\rangle - \frac{\langle b_k, c_j\rangle}{\langle c_j, c_j\rangle} \langle c_j, c_j\rangle = 0.$$

Dus $c_1, \ldots, c_k$ is orthogonaal (en de c_i zijn niet-nul) en daarom onafhankelijk; het is duidelijk dat b_k in de door $c_1, \ldots, c_k$ opgespannen ruimte zit. □

8.3.3 Opmerking Door de in de vorige stelling verkregen vectoren te normeren, dat wil zeggen, door c_i te delen door $||c_i||$, verkrijgen we een orthonormale basis (uit een gegeven basis).

De vector

$$\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\langle b_m, c_i \rangle}{\langle c_i, c_i \rangle} c_i,$$

is de *loodrechte projectie* van b_m op de ruimte opgespannen door $c_1, \ldots, c_{m-1}$. In het hele proces vervangen we dus steeds een basisvector door het verschil ervan met de orthogonale projectie op de deelruimte van reeds gevonden vecotern.