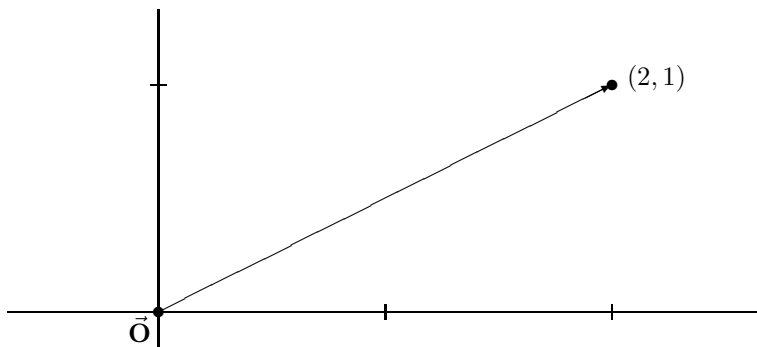
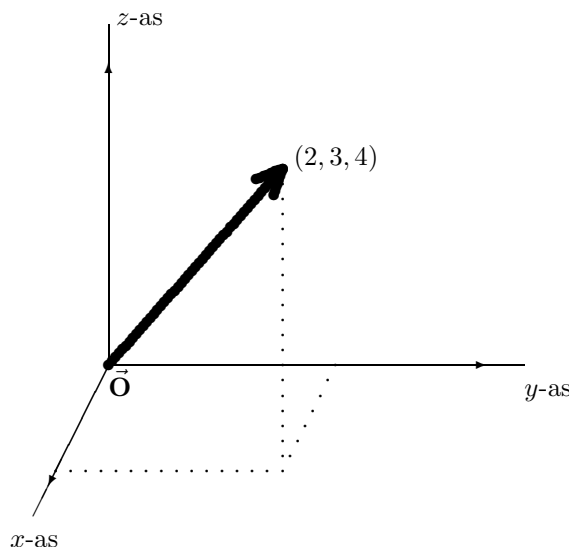


1. Vectoren in $\mathbb{R}^n$

Vectoren en hun meetkundige voorstelling. Een vector in $\mathbb{R}^n$ is een rijtje $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ van reële getallen. De getallen a_i heten de coördinaten van de vector. In het speciale gevallen $n = 2$ en kun je zo'n vector tekenen als een punt in het platte vlak, nadat je een assenstelsel en een eenheidslengte hebt aangebracht. Je tekent bijvoorbeeld de vector $(2, 1)$ als volgt:



In plaats van het punt $(2, 1)$ tekent men ook wel de pijl van $(0, 0)$ naar $(2, 1)$. In plaats van $(0, 0)$ schrijft men ook wel $\vec{O}$ (de oorsprong of nulvector). Ik noteer namen van vectoren meestal met vette letters met een pijltje erboven. Gewoonlijk tekent men de eerste coördinaat (ook wel de x -as of x_1 -as genoemd) horizontaal en de tweede coördinaat (de y -as of x_2 -as) vertikaal. Vectoren in de $\mathbb{R}^3$ zijn ook nog wel te tekenen. Bijvoorbeeld de vector $(2, 3, 4)$:



Vectoren in de $\mathbb{R}^4$ of (bijvoorbeeld) de $\mathbb{R}^{583}$ zijn wat lastiger te tekenen, dat doen we dus maar niet. De speciale vector $(0, \dots, 0)$ noemen we de nulvector, we noteren hem als $\vec{O}$

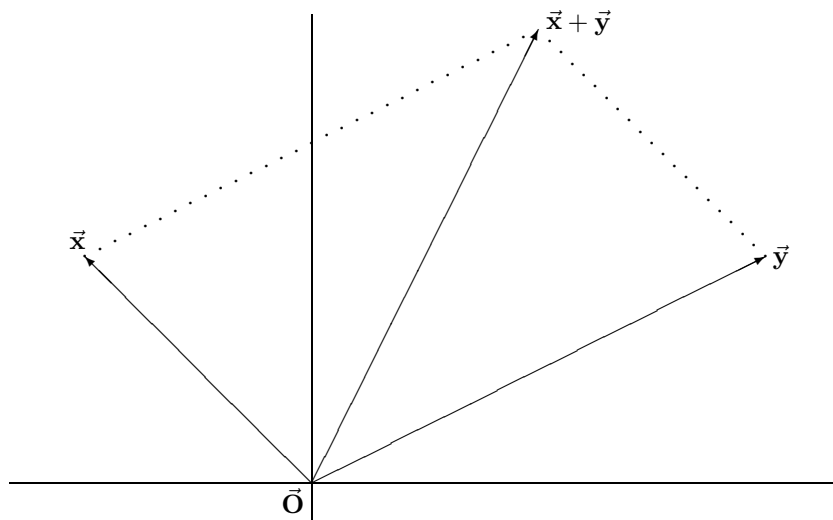
Optelling van vectoren. We definiëren de som van twee vectoren in $\mathbb{R}^n$ door

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \quad (\text{plaatsgewijze optelling})$$

Op analoge wijze definiëren we het verschil van twee vectoren. Voorbeelden in de $\mathbb{R}^4$:

$$(2, 1, 3, -2) + (5, -1, 1, 0) = (7, 0, 4, -2) \quad (\pi, 0, -1, \frac{5}{2}) - (0, \sqrt{2}, -7, \frac{3}{2}) = (\pi, -\sqrt{2}, 6, 1)$$

In de $\mathbb{R}^2$ en de $\mathbb{R}^3$ komt optelling van vectoren neer op het maken van een parallellogram:



Scalaire vermenigvuldiging. Zij $\lambda \in \mathbb{R}$ en zij $\vec{x}$ de vector $(x_1, \dots, x_n)$. We definiëren dan:

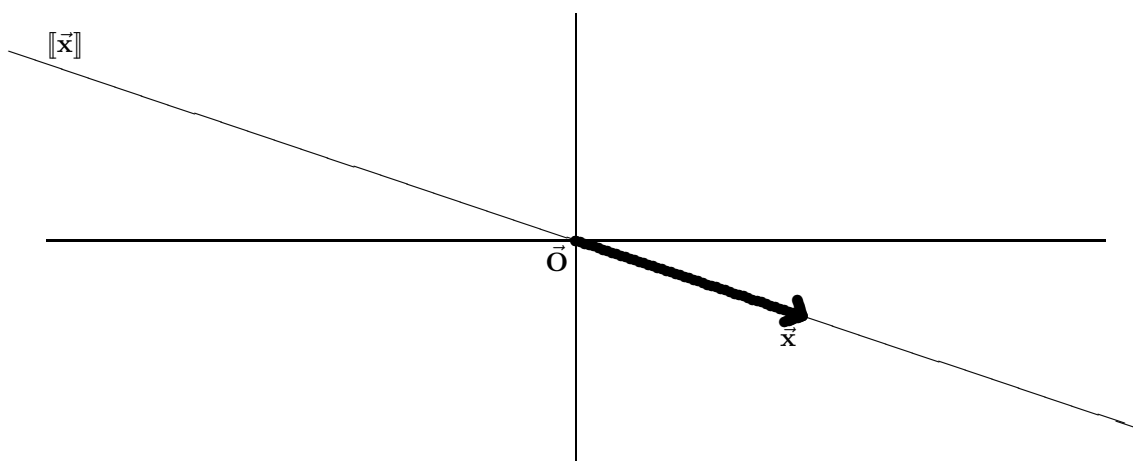
$$\lambda \cdot \vec{x} \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

Zoiets heet scalaire vermenigvuldiging en is dus weer ‘plaatsgewijs’. Voorbeeldje: $3 \cdot (5, -1, 0, 2) = (15, -3, 0, 6)$

Opspannel van een vector. Met het opspannel van $\vec{x}$ bedoelen we de verzameling van alle veelvouden van $\vec{x}$. We noteren dit opspannel als $[\![\vec{x}]\!]$. Formeel gedefinieerd:

$$[\![\vec{x}]\!] \stackrel{\text{def}}{=} \text{de verzameling van alle vectoren } \lambda \vec{x} \text{ met } \lambda \in \mathbb{R}$$

In de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ is $[\![\vec{x}]\!]$ meestal de lijn door de oorsprong en $\vec{x}$:



Opmerking. Als $\vec{x}$ de nulvector is, is zijn opspannel géén lijn, maar slechts de piepkleine verzameling die alleen uit $\vec{O}$ bestaat: $[\![\vec{O}]\!] = \{\vec{O}\}$

Lineaire combinaties. Een lineaire combinatie van $\vec{x}$ en $\vec{y}$ is (per definitie) een vector die je kunt schrijven als $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}$, waarbij λ en μ reële getallen zijn. Voorbeelden:

- $(30, 20, 10, 0)$ is een lineaire combinatie van $(1, 1, 1, 1)$ en $(1, 2, 3, 4)$

Bewijs: $(30, 20, 10, 0) = 40(1, 1, 1, 1) - 10(1, 2, 3, 4)$

- $(3, 7, 3, 7)$ is een lineaire combinatie van $(1, 0, 1, 0)$ en $(0, 1, 0, 1)$

Bewijs: $(3, 7, 3, 7) = 3(1, 0, 1, 0) + 7(0, 1, 0, 1)$

Op analoge wijze definiëren we, wat een lineaire combinatie van drie of meer vectoren is. Bijvoorbeeld: een lineaire combinatie van $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ is een vector van het type $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} + \nu\vec{z}$

Opspansel van twee of meer vectoren. Onder het opspansel $[\vec{x}, \vec{y}]$ van twee vectoren $\vec{x}$ en $\vec{y}$ verstaan we de verzameling van alle lineaire combinaties van $\vec{x}$ en $\vec{y}$. Op analoge wijze definiëren we het opspansel van drie of meer vectoren. Voorbeelden:

- $[(1, -3, 5), (37, \pi, -2)]$ is het vlak in $\mathbb{R}^3$ door de oorsprong, $(1, -3, 5)$ en $(37, \pi, -2)$
- $[(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)]$ is de hele $\mathbb{R}^3$, want je kunt eenvoudig inzien dat iedere vector uit $\mathbb{R}^3$ te schrijven is als lineaire combinatie van $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ en $(0, 0, 1)$. Kijk maar: $(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1)$
- $[(3, 4, 5), (6, 7, 8), (1, 0, 1)] = \mathbb{R}^3$. Dat kost wat meer rekenwerk. Je kunt algemeen bewijzen: het opspansel van drie vectoren uit $\mathbb{R}^3$ die niet in één vlak door $\vec{0}$ liggen, is de hele $\mathbb{R}^3$. Als ze wel in één vlak door $\vec{0}$ liggen is hun opspansel kleiner, bijvoorbeeld $[(1, 2, 1), (2, 4, 0), (0, 0, 3)] = [(2, 4, 0), (0, 0, 3)] = [(1, 2, 0), (0, 0, 1)]$

Lineaire deelruimten. Een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^n$ is (per definitie) een opspansel van een stel vectoren in $\mathbb{R}^n$. Voorbeelden:

- $[(3, -2, 5), (1, 7, \sqrt{5})]$ is een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^3$
- $[(1, 1, 1, 1), (2, 1, 0, 5), (3, -1, 2, 1), (-1, 2, -2, 4)]$ is een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^4$
- De lineaire deelruimten van $\mathbb{R}^3$ zijn:
 - (1) de nulruimte $\{\vec{0}\}$
 - (2) de lijnen door de oorsprong
 - (3) de vlakken door de oorsprong
 - (4) de hele $\mathbb{R}^3$

Afhankelijk. We noemen een stel vectoren afhankelijk als minstens één van die vectoren een lineaire combinatie is van de andere vectoren. Is dat niet het geval, dan noemen we het stel onafhankelijk. Een paar voorbeelden:

- Het stel vectoren $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (7, \frac{5}{2}, 0)$ is afhankelijk, want de vector $(7, \frac{5}{2}, 0)$ is een lineaire combinatie van de twee andere vectoren. Kijk maar: $(7, \frac{5}{2}, 0) = 7(1, 0, 0) + \frac{5}{2}(0, 1, 0)$
- Het stel vectoren $(3, 7), (1, 2)$ is onafhankelijk, want geen van deze twee vectoren is een veelvoud van de ander
- Het stel $(3, 7), (1, 2), (2, 9)$ is afhankelijk. Dat kun je bijvoorbeeld als volgt inzien:

$$\left. \begin{array}{l} (3, 7) - 3(1, 2) = (0, 1) \\ (2, 9) - 2(1, 2) = (0, 5) \end{array} \right\} \implies (2, 9) - 2(1, 2) = 5((3, 7) - 3(1, 2)) \implies (2, 9) = 5(3, 7) - 13(1, 2)$$

Vegen. De in dit laatste voorbeeldje gevolgde werkwijze wordt ook wel vegen genoemd: de vector $(1, 2)$ werd gebruikt als bezem om de eerste coördinaat van de vectoren $(3, 7)$ en $(2, 9)$ schoon te vegen. We zullen deze methode nu eens loslaten op een iets ingewikkelder probleem: we proberen te achterhalen of het stel vectoren $(1, 1, 1, 1)$, $(2, 1, 0, 5)$, $(3, -1, 2, 1)$, $(-1, 2, -2, 4)$ afhankelijk is. Allereerst geven we de beestjes een naam, en gebruiken we de vector $(1, 1, 1, 1)$ om de eerste coördinaat schoon te vegen:

$$\begin{array}{l} \vec{a} = (1, 1, 1, 1) \\ \vec{b} = (2, 1, 0, 5) \\ \vec{c} = (3, -1, 2, 1) \\ \vec{d} = (-1, 2, -2, 4) \end{array} \xrightarrow{\text{bezem } \vec{a}} \begin{array}{l} \vec{a} = (1, 1, 1, 1) \\ \vec{b} - 2\vec{a} = (0, -1, -2, 3) \\ \vec{c} - 3\vec{a} = (0, -4, -1, -2) \\ \vec{d} + \vec{a} = (0, 3, -1, 5) \end{array}$$

Vervolgens gebruiken we de vector $\vec{b} - 2\vec{a}$ als bezem om de tweede coördinaat van de andere vectoren weg te poetsen:

$$\xrightarrow{\text{bezem } \vec{b} - 2\vec{a}} \begin{array}{l} \vec{a} + (\vec{b} - 2\vec{a}) = (1, 0, -1, 4) \\ \vec{b} - 2\vec{a} = (0, -1, -2, 3) \\ (\vec{c} - 3\vec{a}) - 4(\vec{b} - 2\vec{a}) = (0, 0, 7, -14) \\ (\vec{d} + \vec{a}) + 3(\vec{b} - 2\vec{a}) = (0, 0, -7, 14) \end{array}$$

en plotseling zie je met het blote oog een afhankelijkheid opdoemen: $(\vec{c} - 3\vec{a}) - 4(\vec{b} - 2\vec{a}) = -((\vec{d} + \vec{a}) + 3(\vec{b} - 2\vec{a}))$, wat na enig gesjoemel leidt tot $\vec{d} = \vec{b} - \vec{c}$. Blijkbaar is $\vec{d}$ een lineaire combinatie van de andere vectoren, dus het stel $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ is afhankelijk

Rekenen met opspansels. Soms wil je een opspansel $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]$ zo eenvoudig mogelijk schrijven. Onder ‘eenvoudig’ versta ik hier: met veel nullen, en zo kort mogelijk. Je zoekt dan dus een zo klein mogelijk stel zo eenvoudig mogelijke vectoren $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m$ die hetzelfde opspansel hebben als $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$. Bij het vereenvoudigen van een opspansel zijn de volgende acties toegestaan:

- het weglaten van een vector, die lineaire combinatie is van de andere (bijvoorbeeld: $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, 7\vec{x}_1 + 2\vec{x}_2 - 5\vec{x}_3] = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]$)
- het veranderen van de volgorde (bijvoorbeeld: $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4] = [\vec{x}_2, \vec{x}_4, \vec{x}_1, \vec{x}_3]$)
- het vermenigvuldigen van een vector met een getal $\neq 0$ (bijvoorbeeld: $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4] = [3\vec{x}_1, \frac{1}{2}\vec{x}_2, \vec{x}_3, -\vec{x}_4]$)
- veelvouden van één van de vectoren optellen bij andere vectoren (bijvoorbeeld: $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4] = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3 + \frac{1}{2}\vec{x}_2, \vec{x}_4 - 3\vec{x}_2]$) (zo’n actie noemden we: vegen met $\vec{x}_2$)

Voorbeeld. Je wilt het opspansel $[(1, 2, -2, -1), (2, -3, 0, 1), (-1, -1, -1, 3), (2, 2, -6, 2), (1, -4, -1, 4)]$ vereenvoudigen. Dat kun je als volgt doen (de bezem is telkens onderstreept):

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \vec{x}_1 = (1, 2, -2, -1) \\ \vec{x}_2 = (2, -3, 0, 1) \\ \vec{x}_3 = (-1, -1, -1, 3) \\ \vec{x}_4 = (2, 2, -6, 2) \\ \vec{x}_5 = (1, -4, -1, 4) \end{array} \right\} &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1, 2, -2, -1) \\ (0, -7, 4, 3) \\ (0, 1, -3, 2) \\ (0, -2, -2, 4) \\ (0, -6, 1, 5) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1, 2, -2, -1) \\ (0, 1, -3, 2) \\ (0, 0, -17, 17) \\ (0, 0, -8, 8) \\ (0, 0, -17, 17) \end{array} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1, 2, -2, -1) \\ (0, 1, -3, 2) \\ (0, 0, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1, 2, 0, -3) \\ (0, 1, 0, -1) \\ (0, 0, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1, 0, 0, -1) = \vec{y}_1 \\ (0, 1, 0, -1) = \vec{y}_2 \\ (0, 0, 1, -1) = \vec{y}_3 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

We hebben nu drie eenvoudige vectoren $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3$ gevonden waarvoor $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4, \vec{x}_5] = [\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3]$

Basis en dimensie. We noemen het stel vectoren $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ een basis van $\mathbf{V}$ als geldt:

$$\begin{cases} \mathbf{V} = \llbracket \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n \rrbracket \\ \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n \text{ is onafhankelijk} \end{cases}$$

Een opspansel kan een heleboel verschillende bases hebben, maar het aantal vectoren uit zo'n basis ligt vast. We noemen dit aantal de dimensie van $\mathbf{V}$. Notatie: $\dim(\mathbf{V})$. Enkele voorbeelden:

- $(1, 0), (0, 1)$ is een basis van $\mathbb{R}^2$, en de dimensie van $\mathbb{R}^2$ is 2
- $(3, -5), (-2, 1)$ is ook een basis van $\mathbb{R}^2$
- de vectoren $\vec{e}_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$, $\dots$, $\vec{e}_7 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ vormen de natuurlijke basis van $\mathbb{R}^7$, en $\dim(\mathbb{R}^7) = 7$
- $(0, 1, -1), (1, 0, -1)$ is een basis van het vlak $\llbracket (0, 1, -1), (1, 0, -1) \rrbracket$ (dit is het vlak met vergelijking $x_1 + x_2 + x_3 = 0$). De dimensie van dit vlak is dus 2
- de dimensie van $\llbracket (1, 2, -2, -1), (2, -3, 0, 1), (-1, -1, -1, 3), (2, 2, -6, 2), (1, -4, -1, 4) \rrbracket$ is 3, want we hebben een paar minuten geleden geconstateerd dat je dit opspansel kunt uitdunnen tot een opspansel van drie onafhankelijke vectoren, namelijk tot $\llbracket (1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1) \rrbracket$

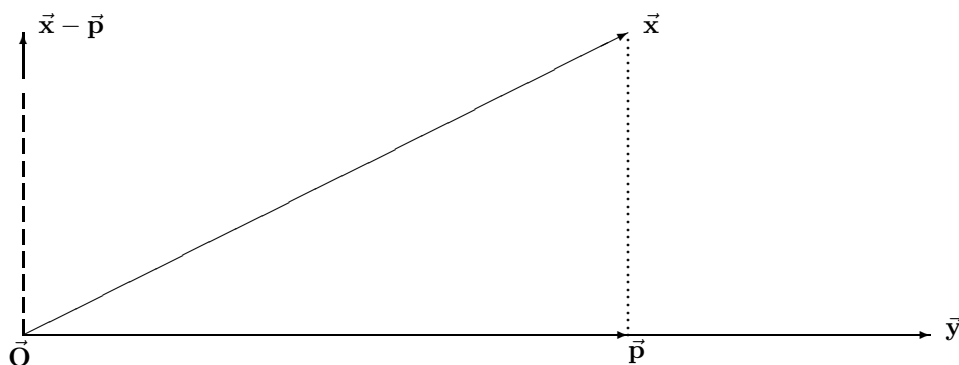
Norm en inproduct in $\mathbb{R}^n$. Voor vectoren $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ en $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ definiëren we:

$$\begin{aligned} \|\vec{x}\| &\stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} && (\text{de } \underline{\text{norm}} \text{ van } \vec{x}) \\ \vec{x} \bullet \vec{y} &\stackrel{\text{def}}{=} x_1 y_1 + \dots + x_n y_n && (\text{het } \underline{\text{inproduct}} \text{ van } \vec{x} \text{ en } \vec{y}) \\ \vec{x} \perp \vec{y} &\stackrel{\text{def}}{=} \vec{x} \bullet \vec{y} = 0 && (\vec{x} \text{ en } \vec{y} \text{ zijn } \underline{\text{orthogonaal}}) \end{aligned}$$

Het inproduct wordt ook wel genoteerd als $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$ of als $\langle \vec{y} | \vec{x} \rangle$. Uit de definities volgt:

$\vec{x} \bullet \vec{y} = \vec{y} \bullet \vec{x}$	Meetkundige betekenis in $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$:
$(\vec{x} + \vec{y}) \bullet \vec{z} = (\vec{x} \bullet \vec{z}) + (\vec{y} \bullet \vec{z})$	$\ \vec{x}\ $ is de lengte van de vector $\vec{x}$
$(\lambda \vec{x}) \bullet \vec{y} = \lambda \cdot (\vec{x} \bullet \vec{y})$	$\ \vec{x} - \vec{y}\ $ is de afstand van $\vec{x}$ tot $\vec{y}$
$\ \vec{x}\ = \sqrt{\vec{x} \bullet \vec{x}}$	$\vec{x} \perp \vec{y}$ betekent: $\vec{x}$ staat loodrecht op $\vec{y}$
$\ \vec{x} + \vec{y}\ \leq \ \vec{x}\ + \ \vec{y}\ $	

Projectie op een vector. De projectie van $\vec{x}$ op $\vec{y}$ is (per definitie) de vector $\vec{p} \in \llbracket \vec{y} \rrbracket$ waarvoor geldt: $\vec{x} - \vec{p} \perp \vec{y}$



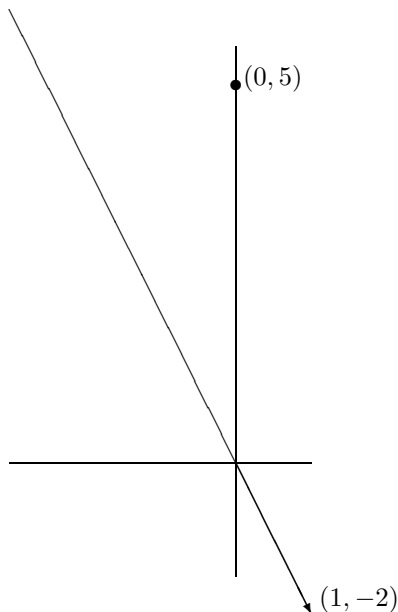
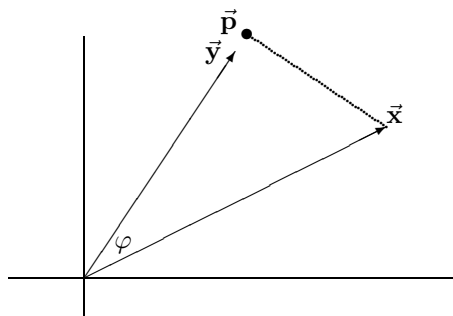
De projectie van $\vec{x}$ op $\vec{y}$ is de vector $\lambda \vec{y}$ met $\lambda = \frac{\vec{x} \bullet \vec{y}}{\vec{y} \bullet \vec{y}}$. Je kunt dat simpel narekenen: $(\vec{x} - \lambda \vec{y}) \perp \vec{y}$, want $(\vec{x} - \lambda \vec{y}) \bullet \vec{y} = \vec{x} \bullet \vec{y} - (\lambda \vec{y}) \bullet \vec{y} = \vec{x} \bullet \vec{y} - \lambda (\vec{y} \bullet \vec{y}) = 0$. Dit inzicht levert ons de volgende handige projectieformule:

de projectie van $\vec{x}$ op $\vec{y}$ is $\frac{\vec{x} \bullet \vec{y}}{\vec{y} \bullet \vec{y}} \cdot \vec{y}$

Voorbeeld 1. Zij $\vec{x} = (4, 2)$ en $\vec{y} = (2, 3)$

Bereken de projectie van $\vec{x}$ op $\vec{y}$

Oplossing. $\vec{p} = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\vec{y} \cdot \vec{y}} \cdot \vec{y} = \frac{14}{13} \cdot \vec{y} = \left(\frac{28}{13}, \frac{42}{13} \right)$



Voorbeeld 2. Welk punt van de lijn $\llbracket(1, -2)\rrbracket$ ligt het dichtst bij $(0, 5)$?

Oplossing. Het gezochte punt is de projectie van $(0, 5)$ op $(1, -2)$, en deze projectie is

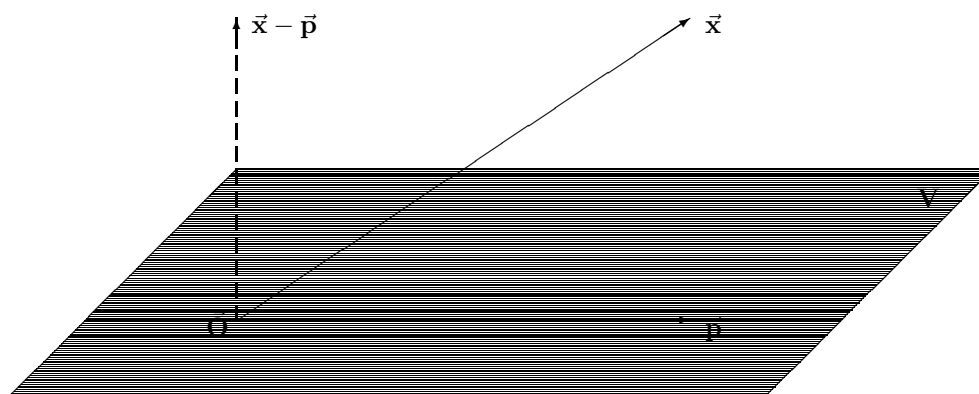
$$\frac{(0, 5) \cdot (1, -2)}{(1, -2) \cdot (1, -2)} \cdot (1, -2) = \frac{-10}{5} \cdot (1, -2) = (-2, 4)$$

Projectie op een lineaire deelruimte. Zij V een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^n$, en $\vec{x}$ een vector uit $\mathbb{R}^n$.

We definiëren dan: de projectie van $\vec{x}$ op V $\stackrel{\text{def}}{=}$ de vector $\vec{p} \in V$ waarvoor $\vec{x} - \vec{p} \perp V$

(met $\dots \perp V$ bedoelen we: $\dots \perp$ alle vectoren uit V)

Als V een vlak in de $\mathbb{R}^3$ is, kun je er een plaatje bij tekenen:



Berekening van de projectie. Je kunt de projectie van $\vec{x}$ op V als volgt berekenen:

Stap 1. Zoek een orthogonale basis van V , dat wil zeggen een basis $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_k$ waarbij $\vec{y}_i \perp \vec{y}_j$ als $i \neq j$

Stap 2. Bereken de projecties van $\vec{x}$ op elk van deze basisvectoren

Stap 3. Tel de resultaten op

Voorbeeld. Bereken de projectie van $\vec{x} = (3, 2, 1, 0)$ op $\mathbf{V} = \llbracket(1, 0, 0, 0), (2, 3, 4, 5)\rrbracket$

Oplossing.

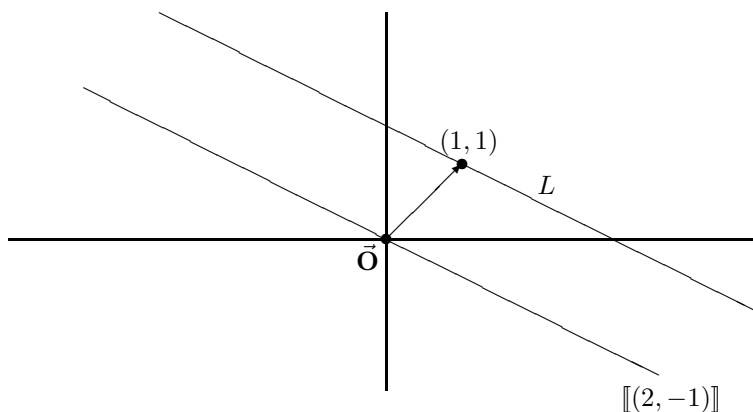
Stap 1. Helaas zijn $(1, 0, 0, 0)$ en $(2, 3, 4, 5)$ niet orthogonaal, want hun inproduct is 2. We moeten dus eerst een andere basis van $\mathbf{V}$ zoeken die wél orthogonaal is. Zo'n karweitje kun je altijd heel systematisch aanpakken: projecteer $(2, 3, 4, 5)$ op $(1, 0, 0, 0)$ (dat is simpel, je vindt als resultaat $(2, 0, 0, 0)$) en neem nu de verschilvector $(2, 3, 4, 5) - (2, 0, 0, 0)$. Deze ligt ook in $\mathbf{V}$ en is orthogonaal met $(1, 0, 0, 0)$. We hebben nu dus een orthogonale basis van $\mathbf{V}$ gevonden: $(1, 0, 0, 0), (0, 3, 4, 5)$

Stap 2. De projectie van $\vec{x}$ op $(1, 0, 0, 0)$ is $(3, 0, 0, 0)$
 en de projectie van $\vec{x}$ op $(0, 3, 4, 5)$ is $(0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1)$

Stap 3. De projectie van $\vec{x}$ op $\mathbf{V}$ is dus $(3, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1)$

Lineaire variëteiten. Zij $\mathbf{V}$ een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^n$ en $\vec{a}$ een vector uit $\mathbb{R}^n$. Met $\vec{a} + \mathbf{V}$ bedoelen we dan de verzameling van alle vectoren $\vec{a} + \vec{x}$ waarbij $\vec{x} \in \mathbf{V}$. Zo'n verzameling $\vec{a} + \mathbf{V}$ heet een lineaire variëteit. Voorbeelden:

- $(1, 1) + \llbracket(2, -1)\rrbracket$ is een lineaire variëteit in $\mathbb{R}^2$. Het is de lijn L die door het punt $(1, 1)$ gaat en evenwijdig loopt aan $\llbracket(2, -1)\rrbracket$:



- Het vlak W met vergelijking $x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$ is een lineaire variëteit in $\mathbb{R}^3$, want je kunt W schrijven als $\vec{a} + \llbracket\vec{b}, \vec{c}\rrbracket$ door wat te prutsen met deze vergelijking. Dat kan bijvoorbeeld als volgt: stel $x_1 = \lambda$ en $x_2 = \mu$. Dan $x_3 = 4 - \lambda - 2\mu$, dus

$$\begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = \mu \\ x_3 = 4 - \lambda - 2\mu \end{cases} \quad \text{dus} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Blijkbaar is W het vlak $(0, 0, 4) + \llbracket(1, 0, -1), (0, 1, -2)\rrbracket$

Opgaven hoofdstuk 1

Opgave 1.

- a) Is $(7, 2, 9)$ een lineaire combinatie van $(3, 3, 1)$ en $(-1, 1, -3)$?
b) Is $(7, 2, 9)$ een lineaire combinatie van $(3, 3, 1)$ en $(-1, 1, -2)$?

Opgave 2. Ga na of $\mathbb{R}^4 = \llbracket (0, 1, 1, 0), (2, 1, -3, 0), (1, 1, -1, 1), (-1, 2, 1, 1) \rrbracket$

Opgave 3. Welke zijn de lineaire deelruimten van $\mathbb{R}^2$?

Opgave 4. Is $(1, 1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4, 5), (5, 4, 3, 2, 1)$ een onafhankelijk stel vectoren?

Opgave 5. Schrijf $\llbracket (5, -2, 3), (3, 7, -4), (6, 2, 5) \rrbracket$ zo eenvoudig mogelijk

Opgave 6. Bepaal een basis van $\llbracket (1, 2, 3, 4), (5, 6, 7, 8), (9, 10, 11, 12), (13, 14, 15, 16) \rrbracket$

Opgave 7. Bepaal de dimensie van $\llbracket (2, 1, -3), (6, 5, 2), (2, 3, 8) \rrbracket$

Opgave 8. Bepaal een basis van de lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^6$ die bestaat uit alle vectoren $(x_1, \dots, x_6)$ die voldoen aan

$$\begin{cases} x_1 = x_6 \\ x_2 = x_5 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$

Opgave 9. Bepaal een orthogonale basis van $\llbracket (1, 1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4, 5) \rrbracket$

Opgave 10. Zij $\mathbf{V}$ de lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^5$, die bestaat uit alle vectoren $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ waarvoor $x_1 + x_4 = x_3 + x_5$ en $x_2 = 3x_1$.

Zoek een basis van $\mathbf{V}$, en bepaal $\dim(\mathbf{V})$

Opgave 11. Bereken de projectie van $(1, 2, 1, 2, 1, 2)$ op $(0, 1, 0, 1, 0, 1)$

Opgave 12. Bereken de projectie van $(1, 2, 3, 4)$ op $\llbracket (1, 0, 0, 0), (3, 4, 0, 0) \rrbracket$

Opgave 13. Bepaal een basis voor het vlak in $\mathbb{R}^3$, dat door $\vec{\mathbf{O}}$ gaat en loodrecht staat op de vector $(2, 5, -3)$

Opgave 14. Voor welke vector $\vec{\mathbf{x}}$ uit $\llbracket (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1) \rrbracket$ is $\|\vec{\mathbf{x}} - (3, 1, 5, 3)\|$ minimaal?

Opgave 15.

- a) Bepaal een basis van de lineaire deelruimte $\mathbf{V}$ van $\mathbb{R}^4$ die bestaat uit de vectoren (x_1, x_2, x_3, x_4) die voldoen aan

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

- b) Bepaal een basis van de deelruimte $\mathbf{W}$ van $\mathbb{R}^4$ die bestaat uit de vectoren $\vec{\mathbf{x}}$ die voldoen aan $\vec{\mathbf{x}} \perp \mathbf{V}$

Opgave 16. Schrijf het vlak met vergelijking $x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5$ in de gedaante $\vec{\mathbf{a}} + \llbracket \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}} \rrbracket$

Zelfstudiepakketje bij hoofdstuk 1

Opgave 1. Bepaal een basis van $\llbracket (3, 7, 0, -2), (1, 5, 2, 3), (0, 3, -2, 1), (4, 6, 6, -1) \rrbracket$

Opgave 2. Zij $\mathbf{V}$ de lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^5$, die bestaat uit alle vectoren $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ waarvoor $x_1 + 2x_3 = x_4 = x_5 - 3x_2$.

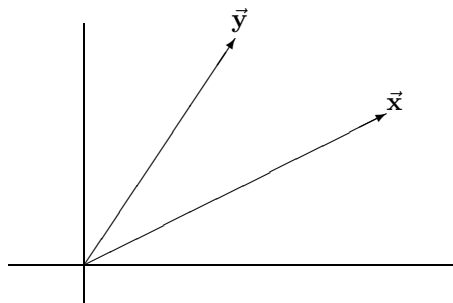
Zoek een basis van $\mathbf{V}$, en bepaal $\dim(\mathbf{V})$

Opgave 3. Bepaal een basis voor het vlak in $\mathbb{R}^3$, dat door $\vec{\mathbf{O}}$ gaat en loodrecht staat op de vector $(3, -1, -1)$

Opgave 4. Zoek een basis van het vlak $\mathbf{V}$ in $\mathbb{R}^3$ met vergelijking $3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0$

Opgave 5. Zij $\vec{\mathbf{x}} = (4, 2)$ en $\vec{\mathbf{y}} = (2, 3)$

- Bereken het inproduct $\vec{\mathbf{x}} \bullet \vec{\mathbf{y}}$
- Bereken $\|\vec{\mathbf{x}}\|$ en $\|\vec{\mathbf{y}}\|$
- Bereken de afstand van $\vec{\mathbf{x}}$ tot $\vec{\mathbf{y}}$



Opgave 6. Bereken de afstand van het punt $(3, -2, 5)$ tot de lijn $\llbracket (3, 6, 9) \rrbracket$

Opgave 7. Bepaal een orthogonale basis van het vlak in $\mathbb{R}^3$ met vergelijking $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$

Opgave 8.

- Bepaal een basis van de lineaire deelruimte $\mathbf{V}$ van $\mathbb{R}^4$ die bestaat uit de vectoren (x_1, x_2, x_3, x_4) die voldoen aan

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

- Bepaal een basis van de deelruimte $\mathbf{W}$ van $\mathbb{R}^4$ die bestaat uit de vectoren $\vec{\mathbf{x}}$ die voldoen aan $\vec{\mathbf{x}} \perp \mathbf{V}$

Opgave 9. Bepaal de projectie van $(1, 0, 0)$ op $\llbracket (1, 2, 0), (0, -1, 1) \rrbracket$

Opgave 10. Zij L de lijn met vergelijking $3x_1 - 7x_2 = 5$

- Is L een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^2$?
- Is L een lineaire variëteit in $\mathbb{R}^2$?

Opgave 11. De lijn L met vergelijking $6x_1 - 5x_2 = 1$ is een lineaire variëteit in $\mathbb{R}^2$. Schrijf L in de gedaante $\vec{\mathbf{a}} + \llbracket \vec{\mathbf{b}} \rrbracket$

Opgave 12. Zij $\vec{a} = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$ en zij $\mathbf{V}$ de lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^{10}$ die bestaat uit alle veelvouden van $\vec{a}$

- a) Bereken de dimensie van $\mathbf{V}$
- b) Bereken de projectie van $(\frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{8}{3}, \frac{16}{4}, \frac{32}{5}, \frac{64}{6}, \frac{128}{7}, \frac{256}{8}, \frac{512}{9}, \frac{1024}{10})$ op $\mathbf{V}$
- c) Voor welk reëel getal λ is $\sum_{n=1}^{10} \left(\lambda n - \frac{2^n}{n} \right)^2$ minimaal?

Opgave 13. We definiëren lineaire deelruimten $\mathbf{V}$ en $\mathbf{V}^\perp$ van $\mathbb{R}^5$ door

$\mathbf{V} \stackrel{\text{def}}{=} \text{de verzameling van alle } (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \text{ waarvoor } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$

$\mathbf{V}^\perp \stackrel{\text{def}}{=} \text{de verzameling van alle vectoren die } \perp V \text{ staan}$

- a) Bepaal een basis van $\mathbf{V}$
- b) Bepaal een basis van $\mathbf{V}^\perp$
- c) Bereken de projectie van $(1, 2, 3, 4, 5)$ op $\mathbf{V}^\perp$
- d) Bereken de projectie van $(1, 2, 3, 4, 5)$ op $\mathbf{V}$

Oplossingen

Opgave 1. We gaan wat vegen:

$$\begin{array}{ccc}
 \boxed{\begin{array}{l} (3, 7, 0, -2) \\ (1, 5, 2, 3) \text{ (bezem)} \\ (0, 3, -2, 1) \\ (4, 6, 6, -1) \end{array}} & \Rightarrow & \boxed{\begin{array}{l} (0, -8, -6, -11) \\ (1, 5, 2, 3) \\ (0, 3, -2, 1) \text{ (bezem)} \\ (0, -14, -2, -13) \end{array}} & \Rightarrow & \boxed{\begin{array}{l} (0, 25, -28, 0) \text{ (bezem)} \\ (1, -4, 8, 0) \\ (0, 3, -2, 1) \\ (0, 25, -28, 0) \end{array}} \\
 & & \Rightarrow & \boxed{\begin{array}{l} (0, 25, -28, 0) \\ (1, 0, \frac{88}{25}, 0) \\ (0, 0, \frac{34}{25}, 1) \\ (0, 0, 0, 0) \end{array}} & \Rightarrow & \boxed{\begin{array}{l} (0, 25, -28, 0) \\ (25, 0, 88, 0) \\ (0, 0, 34, 25) \end{array}}
 \end{array}$$

De zo gevonden basis is $(0, 25, -28, 0), (25, 0, 88, 0), (0, 0, 34, 25)$

Opgave 2. Zo'n vector voldoet aan $x_4 = x_1 + 2x_3$ en $x_5 = x_1 + 3x_2 + 2x_3$, en is dus te schrijven als $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1, x_2, x_3, x_1 + 2x_3, x_1 + 3x_2 + 2x_3) = x_1(1, 0, 0, 1, 1) + x_2(0, 1, 0, 0, 3) + x_3(0, 0, 1, 2, 2)$, dus $\mathbf{V} = \llbracket (1, 0, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 0, 3), (0, 0, 1, 2, 2) \rrbracket$.

De gevonden basis is $(1, 0, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 0, 3), (0, 0, 1, 2, 2)$, en de dimensie is 3

Opgave 3. Dit is het vlak met vergelijking $3x_1 - x_2 - x_3 = 0$. Een basis vind je door zomaar twee onafhankelijke vectoren uit dit vlak te pakken, bijvoorbeeld $(0, 1, -1)$ en $(1, 3, 0)$

Opgave 4. Als $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{V}$, dan $x_2 = -3x_1 + 5x_3$, en dus $(x_1, x_2, x_3) = (x_1, -3x_1 + 5x_3, x_3) = x_1(1, -3, 0) + x_3(0, 5, 1)$. Dus $\mathbf{V} = \llbracket (1, -3, 0), (0, 5, 1) \rrbracket$.

Bovendien zijn de vectoren $(1, -3, 0)$ en $(0, 5, 1)$ onafhankelijk (want geen van de twee is een veelvoud van de ander). Dus vormen ze een basis van $\mathbf{V}$

Opgave 5.

a) $\vec{x} \bullet \vec{y} = (4, 2) \bullet (2, 3) = 8 + 6 = 14$

b) $\|\vec{x}\| = \|(4, 2)\| = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$

$\|\vec{y}\| = \|(2, 3)\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

c) De afstand van $\vec{x}$ tot $\vec{y}$ is $\|\vec{x} - \vec{y}\| = \|(2, -1)\| = \sqrt{5}$

Opgave 6. De projectie van $(3, -2, 5)$ op $\llbracket (3, 6, 9) \rrbracket$ is

$$\frac{(3, -2, 5) \bullet (3, 6, 9)}{(3, 6, 9) \bullet (3, 6, 9)} \cdot (3, 6, 9) = \frac{42}{126} \cdot (3, 6, 9) = (1, 2, 3)$$

Dus de gevraagde afstand is $\|(3, -2, 5) - (1, 2, 3)\| = 2\sqrt{6}$

Opgave 7. We pakken eerst zomaar een basis van het vlak, door simpelweg twee vectoren onafhankelijke vectoren uit dat vlak te kiezen: $(1, 0, 1)$ en $(0, 1, 2)$. Wat een pech! Ze staan niet loodrecht op elkaar. Daarom gaan we als volgt verder: we projecteren $(1, 0, 1)$ op $(0, 1, 2)$

$$\text{resultaat: } \frac{(1, 0, 1) \bullet (0, 1, 2)}{(0, 1, 2) \bullet (0, 1, 2)} \cdot (0, 1, 2) = \left(0, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

De verschilvector $(1, 0, 1) - (0, \frac{2}{5}, \frac{4}{5})$ staat nu loodrecht op $(0, 1, 2)$. Daarmee hebben we een orthogonale basis van het vlak gevonden: $(0, 1, 2), (1, -\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$

Opgave 8.

a) Eerst wat prutsen om de vergelijkingen te vereenvoudigen:

- Als je de twee vergelijkingen optelt en het resultaat halveert krijg je $x_1 = -2x_3 - 2x_4$
- Als je (eerste vergelijking) + 3 · (tweede vergelijking) neemt en het resultaat halveert krijg je $x_2 = -x_3 - 5x_4$

Een vector uit $\mathbf{V}$ is dus te schrijven als $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-2x_3 - 2x_4, -x_3 - 5x_4, x_3, x_4) = x_3(-2, -1, 1, 0) + x_4(-2, -5, 0, 1)$

Dus $\mathbf{V} = \llbracket(-2, -1, 1, 0), (-2, -5, 0, 1)\rrbracket$, en de gevonden basis is $(-2, -1, 1, 0), (-2, -5, 0, 1)$

b) $3x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 0$ betekent hetzelfde als $\vec{x} \perp (3, -1, 5, 1)$, en $-x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0$ betekent hetzelfde als $\vec{x} \perp (-1, 1, -1, 3)$.

Dus $\mathbf{W} = \llbracket(3, -1, 5, 1), (-1, 1, -1, 3)\rrbracket$, en $(3, -1, 5, 1), (-1, 1, -1, 3)$ is een basis van $\mathbf{W}$

Opgave 9.

Stap 1. We zoeken als volgt een orthogonale basis van $\llbracket(1, 2, 0), (0, -1, 1)\rrbracket$: de projectie van $(1, 2, 0)$ op $(0, -1, 1)$ is $(0, 1, -1)$, en dus staat de vector $(1, 2, 0) - (0, 1, -1)$ loodrecht op $(0, -1, 1)$. Dus is $(1, 1, 1), (0, -1, 1)$ een orthogonale basis

Stap 2. De projectie van $(1, 0, 0)$ op $(1, 1, 1)$ is $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, en de projectie van $(1, 0, 0)$ op $(0, -1, 1)$ is $(0, 0, 0)$

Stap 3. De som van deze twee projecties is $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

Opgave 10.

a) Nee, want L gaat niet door de oorsprong en is dus niet te schrijven als een opspansel

b) Ja, want je kunt L schrijven als $\vec{a} + \llbracket\vec{b}\rrbracket$. Dat doe je als volgt: de vergelijking van L is $x_1 = \frac{7}{3}x_2 + \frac{5}{3}$. Een punt (x_1, x_2) van L is dus te schrijven als $(\frac{7}{3}x_2 + \frac{5}{3}, x_2)$. Hier kun je leuk mee knoeien:

$$\left(\frac{7}{3}x_2 + \frac{5}{3}, x_2\right) = \left(\frac{5}{3}, 0\right) + \left(\frac{7}{3}x_2, x_2\right) = \left(\frac{5}{3}, 0\right) + x_2 \cdot \left(\frac{7}{3}, 1\right)$$

Als je hierin het getal x_2 laat variëren, krijg je alle punten van L . Blijkbaar is L de verzameling van alle punten die te schrijven zijn als $\left(\frac{5}{3}, 0\right) + \lambda \cdot \left(\frac{7}{3}, 1\right)$

$$\text{Conclusie: } L = \left(\frac{5}{3}, 0\right) + \llbracket\left(\frac{7}{3}, 1\right)\rrbracket$$

Opgave 11. Stel $x_1 = \lambda$. Dan $6\lambda - 5x_2 = 1$, dus $x_2 = -\frac{1}{5} + \frac{6}{5}\lambda$. Dus $(x_1, x_2) = (\lambda, -\frac{1}{5} + \frac{6}{5}\lambda) = (0, -\frac{1}{5}) + \lambda(1, \frac{6}{5})$. Conclusie: $L = (0, -\frac{1}{5}) + \llbracket(1, \frac{6}{5})\rrbracket$

Opgave 12.

a) $\mathbf{V} = \llbracket\vec{a}\rrbracket$, dus $\dim(V) = 1$

b) Zij $\vec{b} = (\frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{8}{3}, \frac{16}{4}, \frac{32}{5}, \frac{64}{6}, \frac{128}{7}, \frac{256}{8}, \frac{512}{9}, \frac{1024}{10})$

De gevraagde projectie is dan $\frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\vec{a} \bullet \vec{a}} \cdot \vec{a} = \frac{2046}{385} \cdot \vec{a} = \frac{186}{35} \cdot \vec{a}$

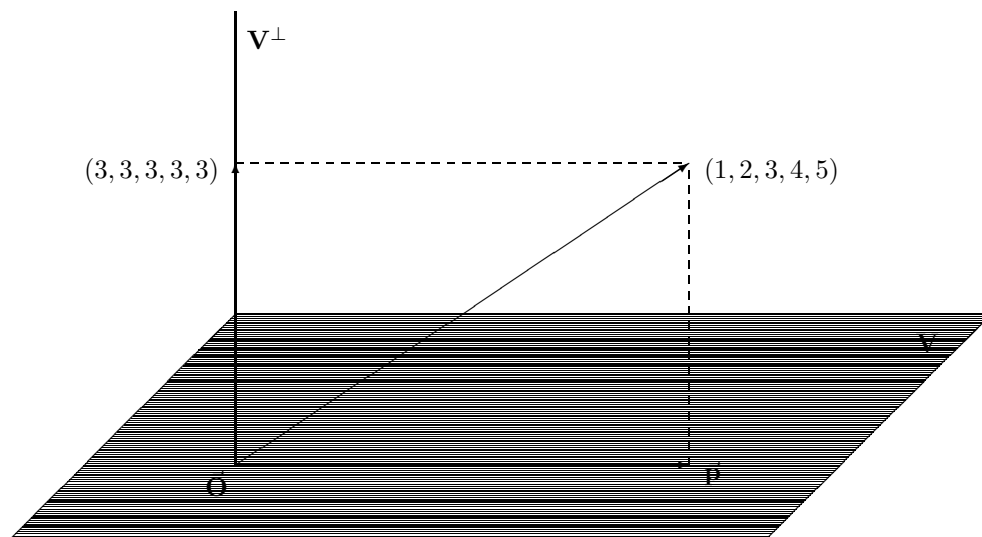
c) $\sum_{n=1}^{10} \left(\lambda n - \frac{2^n}{n}\right)^2 = \|\lambda \vec{a} - \vec{b}\|^2$, en dit is minimaal als $\lambda \vec{a}$ de projectie van $\vec{b}$ op $\vec{a}$ is, dus als $\lambda = \frac{186}{35}$

Opgave 13.

- a) $\mathbf{V}$ bestaat uit alle vectoren die te schrijven zijn als $(x_1, x_2, x_3, x_4, -x_1 - x_2 - x_3 - x_4)$ waarbij de x_i reële getallen zijn. De rest is simpel rekenwerk: je kunt $(x_1, x_2, x_3, x_4, -x_1 - x_2 - x_3 - x_4)$ ontbinden tot $x_1(1, 0, 0, 0, -1) + x_2(0, 1, 0, 0, -1) + x_3(0, 0, 1, 0, -1) + x_4(0, 0, 0, 1, -1)$, en dus is $(1, 0, 0, 0, -1), (0, 1, 0, 0, -1), (0, 0, 1, 0, -1), (0, 0, 0, 1, -1)$ een basis van $\mathbf{V}$.
- b) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$ betekent hetzelfde als $\langle (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), (1, 1, 1, 1, 1) \rangle = 0$.
Dus $\vec{x} \in \mathbf{V} \Leftrightarrow \vec{x} \perp (1, 1, 1, 1, 1)$ of, anders gezegd, $\mathbf{V}^\perp = \llbracket (1, 1, 1, 1, 1) \rrbracket$. De vector $(1, 1, 1, 1, 1)$ vormt dus in zijn eentje een basis van $\mathbf{V}^\perp$.
- c) De projectie van $(1, 2, 3, 4, 5)$ op $\mathbf{V}^\perp$ is

$$\frac{(1, 2, 3, 4, 5) \bullet (1, 1, 1, 1, 1)}{(1, 1, 1, 1, 1) \bullet (1, 1, 1, 1, 1)} \cdot (1, 1, 1, 1, 1) = \frac{15}{5} \cdot (1, 1, 1, 1, 1) = (3, 3, 3, 3, 3)$$

- d) De projectie van $(1, 2, 3, 4, 5)$ op $\mathbf{V}$ is $(1, 2, 3, 4, 5) - (3, 3, 3, 3, 3) = (-2, -1, 0, 1, 2)$. Je kunt dit bedenken via de volgende abstracte tekening:



Mocht je ongelukkigerwijs zo'n wiskundige muggenzifter zijn die dit soort prachtige plaatjes wantrouwt, dan kan het volgende formele bewijs van het gevonden resultaat je nachtrust herstellen:

- $(-2, -1, 0, 1, 2) \in \mathbf{V}$, want het is een rijtje met som 0
- $(1, 2, 3, 4, 5) - (-2, -1, 0, 1, 2) \perp \mathbf{V}$, want $(3, 3, 3, 3, 3) \in \mathbf{V}^\perp$