

2. Transformaties en matrices

Lineaire afbeelding. Onder een lineaire afbeelding van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^m$ verstaan we een functie A die aan iedere vector uit $\mathbb{R}^n$ een vector uit $\mathbb{R}^m$ toevoegt en van het volgende type is:

$$A(x_1, \dots, x_n) = (\alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{1n}x_n, \dots, \alpha_{m1}x_1 + \dots + \alpha_{mn}x_n)$$

waarbij de coëfficiënten α_{ij} reële getallen zijn. Onder de matrix van A verstaan we het schema waarin deze coëfficiënten α_{ij} op een overzichtelijke manier gerangschikt zijn:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Een paar voorbeelden:

- De functie $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, gedefinieerd door $A(x_1, x_2) = (x_2, x_1 - x_2, 8x_1 + 7x_2)$

De matrix van deze lineaire afbeelding A is $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$

- De functie $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, gedefinieerd door $A(\vec{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{de projectie van } \vec{x} \text{ op } (1, 2, 3)$ is een lineaire afbeelding. Je kunt dat inzien door $A(\vec{x})$ uit te rekenen met de projectieformule:

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2, x_3) &= \frac{(x_1, x_2, x_3) \bullet (1, 2, 3)}{(1, 2, 3) \bullet (1, 2, 3)} \cdot (1, 2, 3) \\ &= \left(\frac{1}{14}x_1 + \frac{1}{7}x_2 + \frac{3}{14}x_3, \frac{1}{7}x_1 + \frac{2}{7}x_2 + \frac{3}{7}x_3, \frac{3}{14}x_1 + \frac{3}{7}x_2 + \frac{9}{14}x_3 \right) \end{aligned}$$

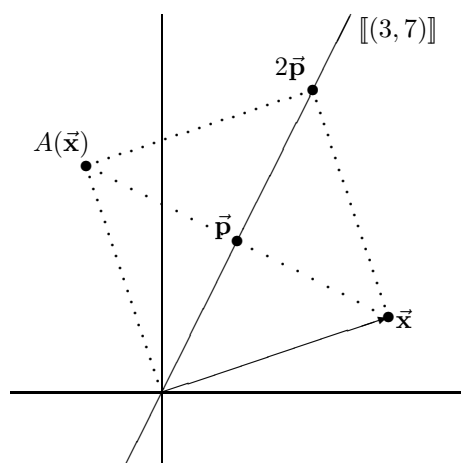
Dit functievoorschrift is inderdaad van het juiste type, dus A is een lineaire afbeelding

De matrix van A is $\begin{pmatrix} \frac{1}{14} & \frac{1}{7} & \frac{3}{14} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & \frac{9}{14} \end{pmatrix}$

- De functie $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door

$$A(\vec{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{het spiegelbeeld van } \vec{x} \text{ ten opzichte van de lijn } \llbracket(3, 7)\rrbracket$$

We zoeken even een functievoorschrift voor A :



Je vindt $A(\vec{x})$ door $\vec{x}$ eerst te projecteren op $(3, 7)$, vervolgens deze projectie te verdubbelen, en tenslotte hiervan nog $\vec{x}$ af te trekken. De berekening:

$$\vec{p} = \frac{(x_1, x_2) \bullet (3, 7)}{(3, 7) \bullet (3, 7)} \cdot (3, 7) = \left(\frac{9}{58}x_1 + \frac{21}{58}x_2, \frac{21}{58}x_1 + \frac{49}{58}x_2 \right)$$

$$\text{Dus } A(x_1, x_2) = 2\vec{p} - (x_1, x_2)$$

$$= \left(-\frac{20}{29}x_1 + \frac{21}{29}x_2, \frac{21}{29}x_1 + \frac{20}{29}x_2 \right)$$

A is dus de lineaire afbeelding met matrix $\begin{pmatrix} -\frac{20}{29} & \frac{21}{29} \\ \frac{21}{29} & \frac{20}{29} \end{pmatrix}$

Betekenis van de kolommen. De kolommen van de matrix van A zijn precies de beelden van de natuurlijke basisvectoren $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, \vec{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$ van $\mathbb{R}^n$. We rekenen dat even na door deze basisvectoren in te vullen in $A(x_1, \dots, x_n) = (\alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{1n}x_n, \dots, \alpha_{m1}x_1 + \dots + \alpha_{mn}x_n)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} A(\vec{e}_1) = A(1, 0, 0, \dots, 0) = (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{m1}) = \text{eerste kolom van de matrix van } A \\ A(\vec{e}_2) = A(0, 1, 0, \dots, 0) = (\alpha_{12}, \dots, \alpha_{m2}) = \text{tweede kolom van de matrix van } A \\ \vdots \\ A(\vec{e}_n) = A(0, 0, \dots, 0, 1) = (\alpha_{1n}, \dots, \alpha_{mn}) = n\text{-de kolom van de matrix van } A \end{array} \right.$$

Eigenschappen van lineaire afbeeldingen. Een lineaire afbeelding A voldoet aan

$$\begin{aligned} A(\vec{0}) &= \vec{0} \\ A(\vec{x} + \vec{y}) &= A(\vec{x}) + A(\vec{y}) \\ A(\lambda \vec{x}) &= \lambda \cdot A(\vec{x}) \end{aligned}$$

Je kunt deze eigenschappen eenvoudig uit onze definitie bewijzen. Ook het omgekeerde is waar: een functie A die aan deze eigenschappen voldoet is een lineaire afbeelding

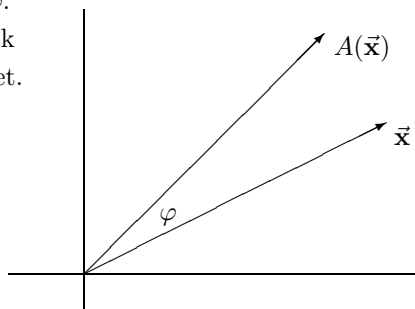
Voorbeeld. Zij $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de draaiing over een hoek φ .

Deze A is een lineaire afbeelding, want je kunt gemakkelijk nagaan dat hij aan de bovenstaande eigenschappen voldoet.

De matrix van A kun je als volgt vinden: de eerste kolom moet het A -beeld van $(1, 0)$ zijn, en dat is $(\cos \varphi, \sin \varphi)$.

De tweede kolom vind je via $A(0, 1) = (-\sin \varphi, \cos \varphi)$.

De matrix van A is dus $\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$



Bereik van een lineaire afbeelding. Onder het bereik van een lineaire afbeelding A verstaan we de verzameling van alle A -beelden. We noteren dit bereik als $\text{Im}(A)$. Als je de matrix van A kent, kun je $\text{Im}(A)$ op een eenvoudige manier bepalen:

$$\text{Im}(A) \text{ is het opspannel van de kolommen van de matrix van } A$$

Je kunt dit als volgt inzien: een vector $\vec{x}$ is te schrijven als $x_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + x_n \cdot \vec{e}_n$. Uit het lijstje van eigenschappen volgt dan dat $A(\vec{x}) = A(x_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + x_n \cdot \vec{e}_n) = x_1 A(\vec{e}_1) + \dots + x_n A(\vec{e}_n)$, en dit is een lineaire combinatie van de kolommen

Voorbeeld. We bepalen het bereik van $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ met matrix $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 5 & 11 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Dit bereik is het opspannel van de kolommen, en kan dus vereenvoudigd worden door met die kolommen te vegen:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 5 & 11 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{kolom 1}]{\text{bezem}} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{kolom 2}]{\text{bezem}} \begin{pmatrix} -17 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Het bereik is dus het vlak $\llbracket (-17, 0, 1), (3, 1, 0) \rrbracket$

Afkortingen. Een lineaire afbeelding van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^n$ wordt ook wel kortweg een lineaire transformatie van $\mathbb{R}^n$ genoemd. De matrix van A wordt meestal zelf ook A genoemd. In plaats van $A(\vec{x})$ schrijven we soms $A\vec{x}$

Identieke transformatie. De identieke transformatie I van $\mathbb{R}^n$ is gedefinieerd door $I(\vec{x}) = \vec{x}$. Zijn matrix heeft op de "hoofddiagonaal" (van linksboven naar rechtsonder) eentjes en daarbuiten allemaal nullen. Bijvoorbeeld: de matrix van $I : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^7$ is

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rekenen met matrices. We definiëren de som van matrices (van gelijke afmetingen) 'plaatsgewijs':

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Ook vermenigvuldigen met een getal $\lambda \in \mathbb{R}$ gaat plaatsgewijs:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Vermenigvuldiging van twee matrices met elkaar definiëren we alleen maar als het aantal kolommen van de eerste matrix even groot is als het aantal rijen van de tweede matrix:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mk} \end{pmatrix} \text{ met } c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

(voor de berekening van c_{ij} moet je dus de getallen uit de i -de rij van de eerste matrix met die uit de j -de kolom van de tweede matrix vermenigvuldigen, en de uitkomsten optellen; anders geformuleerd: c_{ij} is het inproduct van de i -de rij van de eerste matrix met de j -de kolom van de tweede matrix)

Voorbeelden.

$$\bullet A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ en } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Dan is } A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ en } B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ maar } A \cdot A \text{ bestaat niet}$$

$$\bullet \text{ Als } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ en } D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ dan is } C + D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \text{ en } 7C = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 21 & 28 \end{pmatrix} \text{ en}$$

$$CD = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad DC = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C^2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$

Opmerking. AB en BA zijn meestal niet gelijk. Matrixvermenigvuldiging is niet commutatief.
Wél associatief: $(AB)C$ is altijd gelijk aan $A(BC)$

Stelling. Zij $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ een lineaire afbeelding. Dan is het beeld $A(\vec{x})$ gelijk aan het product $A \cdot \vec{x}$, als je $\vec{x}$ als kolomvector schrijft:

$$A(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Het bewijs van deze stelling vind je in regel 3 van dit hoofdstuk. Erg simpel dus. Je kunt de stelling gebruiken om handig allerlei beelden uit te rekenen. Bijvoorbeeld: waar kom je uit als je de vector $(3, 7)$ om een hoek van 30° tegen de wijzers van de klok in draait? Om deze vraag te beantwoorden hoeft je je hersens niet te pijnigen met ingewikkelde meetkunde, het kan simpel als volgt:

(1) De matrix van de betreffende draaiing is $A = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$

(2) Nu even vermenigvuldigen: $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} + \frac{7}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$

(3) Conclusie: $A(3, 7) = (\frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{7}{2}, \frac{3}{2} + \frac{7}{2}\sqrt{3})$

Samenstelling. Als $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ en $B : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ lineaire afbeeldingen zijn, dan definiëren we de samenstelling $B \circ A$ door $(B \circ A)(\vec{x}) \stackrel{\text{def}}{=} B(A(\vec{x}))$. Deze samenstelling is dan een lineaire afbeelding van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^k$, en zijn matrix is het product van de matrix van B met de matrix van A

Opmerking. De juistheid van deze bewering volgt uit de associativiteit van matrixvermenigvuldiging: $(BA)\vec{x} = B(A\vec{x})$. Samenstelling (compositie) van lineaire afbeeldingen komt dus neer op vermenigvuldiging van de bijbehorende matrices. Voorbeeldjes in de $\mathbb{R}^2$:

•

$$\begin{aligned} A &= \boxed{\text{spiegeling om de lijn met vergelijking } 7x_1 - 3x_2 = 0} = \begin{pmatrix} -\frac{20}{29} & \frac{21}{29} \\ \frac{21}{29} & \frac{20}{29} \end{pmatrix} \\ B &= \boxed{\text{uitrekking van de eerste coördinaat met een factor 3}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{Dan is } B \circ A &= \boxed{\text{doe eerst } A \text{ en daarna } B} = B \cdot A = \begin{pmatrix} -\frac{60}{29} & \frac{63}{29} \\ \frac{21}{29} & \frac{20}{29} \end{pmatrix} \\ \text{en } A \circ B &= \boxed{\text{doe eerst } B \text{ en daarna } A} = A \cdot B = \begin{pmatrix} -\frac{60}{29} & \frac{21}{29} \\ \frac{63}{29} & \frac{20}{29} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Ik wil de 39-ste macht uitrekenen van de matrix $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ maar ben een beetje lui.
Is er nog hoop?
Wie lui is moet slim zijn: In D herken ik de matrix van ‘draaiing om een hoek van 60° tegen de wijzers van de klok in’. Dus is D^{39} de matrix van de draaiing om 2340° of, wat op hetzelfde neerkomt, draaiing om 180° .

$$\text{Dus } D^{39} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Rang van een matrix. Onder de kolommenrang van een matrix verstaan we de dimensie van het opspansel van de kolommen. Onder de rijenrang verstaan we de dimensie van het opspansel van de rijen. Ik kan bewijzen dat de rijenrang altijd precies gelijk is aan de kolommenrang (maar dat doe ik nu even niet, want ik ben er momenteel te lui voor). We spreken daarom kortweg van rang. Voorbeelden:

- de (kolommen)rang van de matrix $\begin{pmatrix} 18 & 57 \\ 43 & -7 \end{pmatrix}$ is 2, want de twee kolommen zijn onafhankelijk en dus heeft hun opspansel dimensie 2
- de (rijen)rang van de matrix $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ is 1, want de tweede rij is een veelvoud van de eerste rij, dus het opspansel van de rijen is $\llbracket(2, -1), (-6, 3)\rrbracket = \llbracket(2, -1)\rrbracket$ en is dus 1-dimensionaal
- als je de rang van de matrix $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ wilt berekenen, kan dat op twee manieren:

(1) bereken de rijenrang door het opspansel van de rijen te vereenvoudigen (zie "vegen" in hoofdstuk 1):

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{rij 2}]{\text{bezem}} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & 10 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{rij 1}]{\text{bezem}} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Het opspansel van de rijen blijkt $\llbracket(0, 4, 5, -1), (1, 3, 3, 0)\rrbracket$ te zijn, en de rang is dus 2

(2) bereken de kolommenrang door met de kolommen te veggen:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{kolom 2}]{\text{bezem}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 & -3 \\ -12 & 5 & 9 & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Het opspansel van de kolommen is $\llbracket(0, 1, 3), (1, 1, 5)\rrbracket$ en dit ziet er 2-dimensionaal uit. De rang is dus 2

Onder de rang van een lineaire afbeelding A verstaan we de rang van de matrix van A . Deze rang is gelijk aan de dimensie van $\text{Im}(A)$, want $\text{Im}(A)$ is het opspansel van de kolommen

Kern. Onder de kern van een lineaire afbeelding A verstaan we de verzameling van alle vectoren die door A worden afgebeeld op de nulvector $\vec{0}$. We noteren deze verzameling als $\text{Ker}(A)$. Een paar eenvoudige voorbeelden:

- Zij $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de lineaire afbeelding $\text{projectie op het vlak } 3x_1 + 57x_2 - 8x_3 = 0$.
Dan is $\text{Ker}(A) = \llbracket(3, 57, -8)\rrbracket$ (de lijn door $\vec{0}$ loodrecht op het vlak)
- Zij A de lineaire transformatie $\text{spiegeling ten opzicht van het vlak } 3x_1 + 57x_2 - 8x_3 = 0$.
Dan is $\text{Ker}(A) = \{\vec{0}\}$, want alleen de nulvector zelf resulteert na spiegeling in de nulvector
- Zij $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^1$ de lineaire afbeelding met $A\vec{x} = 5x_1 - 3x_2 + 7x_3$.
Dan is $\text{Ker}(A)$ het vlak met vergelijking $5x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 0$

Berekening van de kern. In deze eenvoudige voorbeelden zag je direct wat de kern van A was. Helaas is het leven van een natuurwetenschapper niet altijd zo simpel, soms zul je heel wat rekenwerk moeten verrichten. Als je bijvoorbeeld de kern moet bepalen van de lineaire transformatie met matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 11 & -1 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

zit er niks anders op dan dapper gaan rekenen aan de vergelijking $A\vec{x} = \vec{0}$, in de hoop te kunnen achterhalen welke vectoren $\vec{x}$ hieraan voldoen. Je rekenwerk ziet er dan (hopelijk) ongeveer als volgt uit:

$$\begin{aligned} A\vec{x} = \vec{0} &\iff \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 11 & -1 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 + 11x_2 - x_3 \\ x_1 - 5x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 5x_2 \\ x_3 = 16x_2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 16 \end{pmatrix} \quad (\text{met } x_2 = \lambda) \end{aligned}$$

Dus $\text{Ker}(A) = \llbracket (5, 1, 16) \rrbracket$

Opmerking. De (enige) serieuze rekenstap was $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 5x_2 \\ x_3 = 16x_2 \end{cases}$

We gebruikten daarbij de derde vergelijking ($x_1 - 5x_2 = 0$) als een soort bezem om x_1 te elimineren uit de andere twee vergelijkingen: we vervingen dus de eerste vergelijking door (eerste verg $- 3 \cdot$ bezem) en de tweede vergelijking door (tweede verg $-$ bezem). Je kunt deze werkwijze ook opvatten als veegproces in de matrix: blijkbaar verandert de kern niet als we de eerste rij vervangen door (eerste rij $- 3 \cdot$ derde rij), en de tweede rij door (tweede rij $-$ derde rij). Algemener geformuleerd:

$\text{Ker}(A)$ verandert niet door vegen met rijen

Preciezer gezegd: de kern van een matrix blijft ongewijzigd als je

- bij een rij een veelvoud van een andere rij optelt
- een rij vermenigvuldigt met een getal $\neq 0$
- twee rijen verwisselt

Eerder hebben we al gezien:

$\text{Im}(A)$ verandert niet door vegen met kolommen

Anders gezegd: het bereik van een matrix blijft ongewijzigd als je

- bij een kolom een veelvoud van een andere kolom optelt
- een kolom vermenigvuldigt met een getal $\neq 0$
- twee kolommen verwisselt

Ter vergelijking: bij het berekenen van de rang zijn al deze acties toegestaan, omdat je het begrip rang naar keuze mag interpreteren als rijenrang of als kolommenrang. Dus

$\text{Rang}(A)$ verandert niet door vegen met rijen
 $\text{Rang}(A)$ verandert niet door vegen met kolommen

Deze trucs maken de berekening van kern, bereik en rang tot een voor elke chemicus toegankelijk karweitje. Nog een ingewikkeld voorbeeldje: we berekenen de kern van

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 & -6 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \\ 5 & 11 & -13 & -6 \end{pmatrix}$$

We mogen nu onbekommerd met rijen vegen, in de veilige wetenschap dan zulke poespas de kern niet aantast:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 & -6 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \\ 5 & 11 & -13 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{rij 2}]{\text{bezem}} \begin{pmatrix} 0 & 13 & -9 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 26 & -18 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{rij 1}]{\text{bezem}} \begin{pmatrix} 0 & 13 & -9 & 2 \\ 1 & 10 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{Ker}(A)$ is dus gelijk aan de kern van deze laatste matrix, en de berekening hiervan is eenvoudig:

$$\begin{pmatrix} 0 & 13 & -9 & 2 \\ 1 & 10 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 13x_2 - 9x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 10x_2 - 8x_3 = 0 \end{cases}$$

Tenslotte moeten we nog even de oplossingsverzameling van dit duo vergelijkingen netjes presenteren. Dan kan bijvoorbeeld door x_2 en x_3 mooie griekse namen te geven: $x_2 = \lambda$ en $x_3 = \mu$. De vergelijkingen worden dan $x_4 = -\frac{13}{2}\lambda + \frac{9}{2}\mu$ en $x_1 = -10\lambda + 8\mu$, zodat een vector uit de oplossingsverzameling geschreven kan worden als $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-10\lambda + 8\mu, \lambda, \mu, -\frac{13}{2}\lambda + \frac{9}{2}\mu) = \lambda(-10, 1, 0, -\frac{13}{2}) + \mu(8, 0, 1, \frac{9}{2})$. De oplossingsverzameling bestaat blijkbaar uit alle lineaire combinaties van de vectoren $(-10, 1, 0, -\frac{13}{2})$ en $(8, 0, 1, \frac{9}{2})$ en is dus het opspansel van deze twee vectoren. Breukhaters mogen dit resultaat desgewenst presenteren als $\text{Ker}(A) = \llbracket (-20, 2, 0, -13), (16, 0, 2, 9) \rrbracket$

Dimensiestelling. Voor een lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ geldt:

- $\text{Ker}(A)$ is een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^n$
- $\text{Im}(A)$ is een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^m$
- $\dim(\text{Ker } A) + \dim(\text{Im } A) = n$

(zonder bewijs)

Opgaven hoofdstuk 2

Opgave 1. Is translatie over $(3, 5)$ een lineaire afbeelding van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}^2$?

Met deze translatie bedoel ik de functie A die gedefinieerd wordt door $A(\vec{x}) = \vec{x} + (3, 5)$

Opgave 2. Zij $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de lineaire afbeelding met matrix $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Bereken $A(1, 2, 3)$

Opgave 3. Bepaal de matrix van de lineaire afbeelding die iedere vector uit $\mathbb{R}^5$ afbeeldt op de nulvector uit $\mathbb{R}^3$

Opgave 4. Bepaal de matrix van de lineaire transformatie A van $\mathbb{R}^2$ die voldoet aan

$$\begin{cases} A(1, 2) = (3, 4) \\ A(3, 4) = (1, 2) \end{cases}$$

Opgave 5. De onderstaande matrices horen bij draaiingen of spiegelingen. Om welke hoek wordt er gedraaid, of om welke lijn wordt er gespiegeld?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Opgave 6. Welke van de volgende functies $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zijn lineaire afbeeldingen?

a) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 5x_2, x_2 - 3x_3 + 7)$

b) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_3, 0)$

Opgave 7. Geef een meetkundige interpretatie van de transformatie met matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Opgave 8. Bepaal de matrix van de lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, gedefinieerd door

$$A(\vec{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{de projectie van } \vec{x} \text{ op het vlak door } \mathbf{O}, (3, 1, 1) \text{ en } (-2, 1, -1)$$

Opgave 9. Van een lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ is gegeven: $\begin{cases} A(1, 3) = (1, 0, 0) \\ A(2, 5) = (0, -1, 2) \end{cases}$

a) Bepaal de matrix van A

b) Bereken $A(3, 4)$

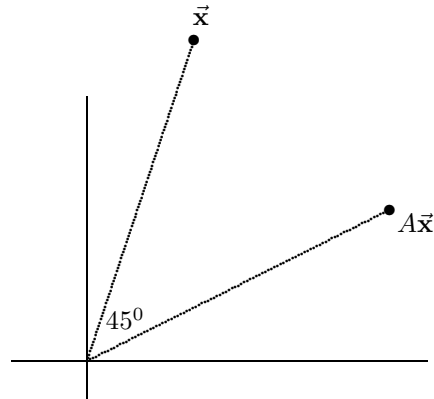
Opgave 10. $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Ga na welke van de volgende matrixproducten mogelijk zijn en bereken ze:

$$AB \quad BA \quad A^2 \quad A^3 \quad B^2$$

Opgave 11. Zij $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de draaiing over een hoek $\frac{\pi}{4}$ met de wijzers van de klok mee

- a) Bepaal de matrix van A
- b) Bereken A^{24}



Opgave 12. Bepaal de rang van de lineaire transformatie A van $\mathbb{R}^3$ die aan iedere vector zijn uitproduct met $(1, 2, 3)$ toevoegt: $A\vec{x} = \vec{x} \times (1, 2, 3)$ (tja, en nu maar hopen dat je je nog vaag herinnert wat uitproduct betekent)

Opgave 13. Bepaal de kern van de lineaire transformatie A van $\mathbb{R}^3$ die gedefinieerd wordt door

$$A\vec{x} \stackrel{\text{def}}{=} \text{de projectie van } \vec{x} \text{ op het vlak door } \vec{O}, (0, 1, 2) \text{ en } (2, -1, 0)$$

Opgave 14. Zij $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ de lineaire afbeelding met matrix
$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bereken $\text{Ker}(A)$

Opgave 15. $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ is de lineaire afbeelding die de vectoren $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ en $(1, 1, 1)$ overvoert in achtereenvolgens $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ en $(1, 1, 2)$

- a) Bepaal de matrix van A
- b) Bepaal de kern van A

Opgave 16. Bepaal $\text{Im}(A)$ voor de transformatie $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$

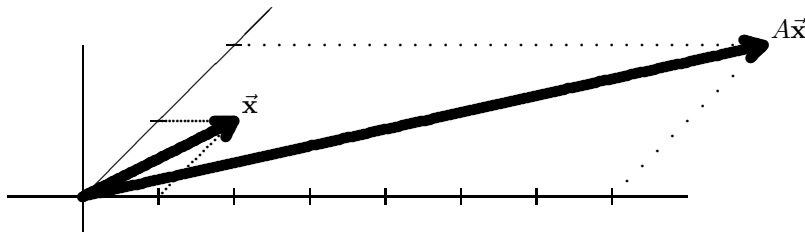
Opgave 17. Volgens onze theorie verandert de kern niet door vegen met rijen. Laat aan de hand van een voorbeeld zien dat de kern wél kan veranderen door vegen met kolommen

Opgave 18. Gegeven is een matrix met rang 3, die uit vijf rijen en zeven kolommen bestaat. Bepaal uit deze gegevens de dimensie van zijn kern (aanwijzing: gebruik de dimensiestelling)

Opgave 19. Bepaal de kern en het bereik van de matrix $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$

Zelfstudiepakketje bij hoofdstuk 2

Opgave 1. Zij A de lineaire transformatie van $\mathbb{R}^2$ die als volgt meetkundig beschreven wordt:



- (1) ontbind $\vec{x}$ in een horizontale component en een component in richting $(1, 1)$
- (2) verdubbel de component in richting $(1, 1)$, en verzevenvoudig de horizontale component
- (3) stel de resultaten weer samen, en zo vind je $A\vec{x}$

a) Bepaal de matrix van A

b) Bepaal de matrix van de lineaire afbeelding: doe A en doe daarna nog eens A .

Opgave 2. Zij A de lineaire transformatie van $\mathbb{R}^3$ die gedefinieerd wordt door

$$A\vec{x} \text{ is de projectie van } \vec{x} \text{ op het vlak } V \text{ met vergelijking } x_1 = x_3$$

a) Bepaal de matrix van A

b) Bepaal de rang van A

c) Bepaal de kern van A

d) Bereken A^7

Opgave 3. Bepaal de matrix en de kern van de lineaire afbeelding A die gedefinieerd wordt door

$$A\vec{x} = \vec{x} \times (2, 5, 1)$$

Opgave 4. Volgens onze theorie verandert het bereik niet door vegen met kolommen. Laat aan de hand van een voorbeeldje zien dat het bereik wél kan veranderen door vegen met rijen

Opgave 5.

a) Verzin een lineaire transformatie A van $\mathbb{R}^3$ met $\begin{cases} \text{Ker}(A) = \llbracket(3, -1, 2)\rrbracket \\ \text{Im}(A) = \llbracket(1, 2, 0), (1, 1, 1)\rrbracket \end{cases}$
(of bewijs dat je dit niet kunt)

b) Verzin een lineaire transformatie A van $\mathbb{R}^3$ met $\begin{cases} \text{Ker}(A) = \llbracket(1, 2, 0), (1, 1, 1)\rrbracket \\ \text{Im}(A) = \llbracket(3, -1, 2)\rrbracket \end{cases}$
(of bewijs dat je dit niet kunt)

c) Verzin een lineaire transformatie A van $\mathbb{R}^3$ met $\begin{cases} \text{Ker}(A) = \llbracket(3, -1, 2)\rrbracket \\ \text{Im}(A) = \llbracket(3, 1, -2)\rrbracket \end{cases}$
(of bewijs dat ik dit niet kan)

d) Verzin een lineaire transformatie A van $\mathbb{R}^3$ met $\begin{cases} \text{Ker}(A) = \llbracket(1, 2, 0), (1, 1, 1)\rrbracket \\ \text{Im}(A) = \llbracket(1, 2, 0), (1, 1, 1)\rrbracket \end{cases}$
(of bewijs dat ik dit niet kan)

Opgave 6. Zij A de lineaire transformatie van $\mathbb{R}^3$ met matrix $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 5 & \frac{7}{2} & 3 \end{pmatrix}$

- a) Bepaal het bereik van A
- b) Bepaal de kern van A

Opgave 7. Zij A een 5×5 matrix met rang 5

- a) Wat is $\text{Im } A$?
- b) Wat is $\text{Ker } A$?
- c) Bewijs dat A twee verschillende originelen altijd overvoert in twee verschillende beelden

Oplossingen

Opgave 1. a) Deze transformatie voldoet aan $A(1,0) = (7,0)$ en $A(1,1) = (2,2)$. Je kunt nu de eigenschappen van een lineaire afbeelding gebruiken om $A(0,1)$ uit te rekenen: $A(0,1) = A((1,1) - (1,0)) = A(1,1) - A(1,0) = (2,2) - (7,0) = (-5,2)$. De matrix van A heeft als kolommen de beelden van de basisvectoren $(1,0)$ en $(0,1)$, dus deze matrix is

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Compositie van lineaire afbeeldingen komt neer op vermenigvuldiging van hun matrices. De matrix van $A \circ A$ is dus

$$A^2 = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 & -45 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Opgave 2. a) We kiezen eerst een orthogonale basis van $\mathbf{V}$, bijvoorbeeld $(0,1,0)$, $(1,0,1)$. De projectie van (x_1, x_2, x_3) op $(0,1,0)$ is $(0, x_2, 0)$ (dat ziet zelfs een wiskundehater), en de projectie van (x_1, x_2, x_3) op $(1,0,1)$ is $(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3, 0, \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3)$ (dat heb ik met de projectieformule gevonden). Dus $A(x_1, x_2, x_3) = (\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3, x_2, \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3)$, en de matrix van A is dus

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b) De rang van A is de dimensie van de verzameling van de beelden. Die beeldverzameling is het vlak $\mathbf{V}$, dus de rang is 2

c) De kern van A bestaat uit alle vectoren waarvan de projectie de nulvector is. Dat zijn vanzelfsprekend de vectoren die loodrecht op het vlak staan, dus alle veelvoudigen van de vector $(1,0,-1)$. De kern is dus de lijn $\mathbb{[(1,0,-1)]}$

d) Alweer zo'n flauw vraagje. Vanzelfsprekend is $A \circ A = A$, want als je projecteert en vervolgens het resultaat nogmaals projecteert, blijft dit resultaat verder ongewijzigd. Evenzo is $A^7 = A \circ A \circ A \circ A \circ A \circ A \circ A = A$

Opgave 3. $A(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - 5x_3, -x_1 + 2x_3, 5x_1 - 2x_2)$ volgens een formule uit mijn stoffig diktaat Wiskunde 1. De matrix van A is dus

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Het berekenen van de kern kan op twee manieren:

(1) Ik herinner me uit mijn jeugd dat de lengte van het uitproduct $\vec{x} \times (2, 5, 1)$ gelijk is aan de oppervlakte van het door $\vec{x}$ en $(2, 5, 1)$ opgespannen parallellogram. Die oppervlakte is 0 dan en slechts dan als de vectoren $\vec{x}$ en $(2, 5, 1)$ in elkaars verlengde liggen. Anders gezegd: $\text{Ker}(A) = \mathbb{[(2, 5, 1)]}$

$$(2) A\vec{x} = \vec{0} \iff \begin{cases} x_2 - 5x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 - 5x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

We noemen nu x_3 even λ . De vergelijkingen zijn dan $\begin{cases} x_2 = 5\lambda \\ x_1 = 2\lambda \end{cases}$

wat dus neerkomt op $(x_1, x_2, x_3) = (2\lambda, 5\lambda, \lambda) = \lambda(2, 5, 1)$. De conclusie: $\text{Ker}(A) = \mathbb{[(2, 5, 1)]}$

Opgave 4. Als voorbeeldje neem ik de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Door vegen met rijen (als bezem neem ik rij 1) ontstaat hieruit de matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Deze veegactie heeft het bereik inderdaad drastisch veranderd, want $\text{Im}(A)$ is de lijn $\mathbb{L}(1, 1)$ en $\text{Im}(B)$ is de lijn $\mathbb{L}(1, 0)$

Opgave 5.

a) Je voldoet aan de gestelde eisen als je er bijvoorbeeld voor zorgt dat

$$\begin{cases} A(3, -1, 2) = (0, 0, 0) \\ A(1, 0, 0) = (1, 2, 0) \\ A(0, 1, 0) = (1, 1, 1) \end{cases}$$

Door hierop de eigenschappen van een lineaire afbeelding los te laten kun je $A(0, 0, 1)$ uitrekenen. Dat gaat als volgt: $A(0, 0, 2) = A((3, -1, 2) - (3, 0, 0) + (0, 1, 0)) = A(3, -1, 2) - 3A(1, 0, 0) + A(0, 1, 0) = (0, 0, 0) - (3, 6, 0) + (1, 1, 1) = (-2, -5, 1)$ en dus $A(0, 0, 1) = (-1, -\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$. Nu ken je de matrix van A : de eerste kolom is $A(1, 0, 0)$, de tweede kolom is $A(0, 1, 0)$ en de derde kolom is $A(0, 0, 1)$

$$\text{Dus } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b) Hieraan kun je voldoen door er bijvoorbeeld voor te zorgen dat

$$\begin{cases} A(1, 2, 0) = (0, 0, 0) \\ A(1, 1, 1) = (0, 0, 0) \\ A(1, 0, 0) = (3, -1, 2) \end{cases}$$

De eerste kolom van deze A is $A(1, 0, 0) = (3, -1, 2)$, de tweede kolom is $A(0, 1, 0) = \frac{1}{2}A(0, 2, 0) = \frac{1}{2}A((1, 2, 0) - (1, 0, 0)) = \frac{1}{2}A(1, 2, 0) - \frac{1}{2}A(1, 0, 0) = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -1)$ en de derde kolom is $A(0, 0, 1) = A(1, 1, 1) - A(1, 0, 0) - A(0, 1, 0) = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -1)$

$$\text{Dus } A = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Dat kan ik niet, want volgens de dimensiestelling moet de som van de dimensies van $\text{Ker}(A)$ en $\text{Im}(A)$ 3 zijn

d) Ook deze opdracht is volgens de dimensiestelling gedoemd te mislukken

Opgave 6.

- a) Het bereik van A is het opspansel van de kolommen, en dat verandert niet als we met die kolommen gaan vegen:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 5 & \frac{7}{2} & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{kolom 1} \\ \xRightarrow{\cdot \frac{1}{2}} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \\ \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{bezem} \\ \text{kolom 1} \\ \Rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{2} & -9 & -7 \end{pmatrix} \\
 & \begin{array}{l} \text{kolom 2} \\ \xRightarrow{\cdot (-\frac{1}{3})} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{2} & 3 & -7 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{bezem} \\ \text{kolom 2} \\ \Rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{2} & 3 & -13 \end{pmatrix} \\
 & \begin{array}{l} \text{kolom 3} \\ \xRightarrow{\cdot (-\frac{1}{13})} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{2} & 3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{bezem} \\ \text{kolom 3} \\ \Rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 & \begin{array}{l} \text{verwissel} \\ \text{k1 en k2} \\ \Rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & &
 \end{array}$$

Door vegen met kolommen is A veranderd in I , dus $\text{Im}(A) = \text{Im}(I) = \mathbb{R}^3$

- b) Dat kan handig met de dimensiestelling: $\dim(\text{Ker } A) + \dim(\text{Im } A) = 3$. Omdat $\text{Im } A$ driedimensionaal is, moet $\text{Ker } A$ dus nuldimensionaal zijn, en dus $\text{Ker } A = \{\vec{0}\}$

Opgave 7.

- a) De rang is de dimensie van $\text{Im } A$. De enige 5-dimensionale lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^5$ is $\mathbb{R}^5$ zelf, dus $\text{Im } A = \mathbb{R}^5$
- b) De dimensie van $\text{Ker } A$ is volgens de dimensiestelling nul, dus $\text{Ker } A = \{\vec{0}\}$
- c) Neem eens aan dat er twee verschillende vectoren $\vec{x}$ en $\vec{y}$ zouden bestaan met hetzelfde A -beeld. Uit $A\vec{x} = A\vec{y}$ volgt dan dat $A(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0}$. We hebben dan een niet-nul-vector (namelijk $\vec{x} - \vec{y}$) gevonden die op $\vec{0}$ wordt afgebeeld, hetgeen strijdig is met $\text{Ker } A = \{\vec{0}\}$

Opmerking. Een 5×5 matrix met rang 5 heet regulier. Je kunt dit begrip regulier blijkbaar op verschillende manieren interpreteren:

- de rijen zijn onafhankelijk
- de kolommen zijn onafhankelijk
- de kern is $\{\vec{0}\}$
- het bereik is de hele $\mathbb{R}^5$
- verschillende originelen hebben altijd verschillende beelden
- de matrix is kolom-veegbaar tot I
- de matrix is rij-veegbaar tot I

We komen hier in hoofdstuk 4 op terug