

3. Stelsels van vergelijkingen

We gaan de theorie van de voorgaande hoofdstukken toepassen op stelsels van lineaire vergelijkingen. Een voorbeeld: bepaal alle oplossingen (x_1, x_2, x_3) van het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 3 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 4 \end{cases}$$

We gaan wat knoeien met dit stelsel. De bedoeling van het geknoei is, de vergelijkingen eenvoudiger te maken zonder de oplossingsverzameling aan te tasten. Vervang de eerste vergelijking door: (eerste vergelijking $-3 \cdot$ tweede vergelijking), en vervang de derde vergelijking door: (derde vergelijking $-2 \cdot$ tweede vergelijking). Het stelsel wordt dan:

$$\begin{cases} 8x_2 - 13x_3 = -2 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 3 \\ 8x_2 - 13x_3 = -2 \end{cases}$$

Vervang nu de derde vergelijking door: (derde vergelijking $-$ eerste vergelijking), en vermenigvuldig vervolgens de eerste vergelijking met $\frac{1}{8}$. Dit levert:

$$\begin{cases} x_2 - \frac{13}{8}x_3 = -\frac{1}{4} \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Hiervan mogen we de derde vergelijking straffeloos weglaten. We vervangen tenslotte nog de tweede vergelijking door: (tweede vergelijking $+$ eerste vergelijking). Resultaat:

$$\begin{cases} x_2 - \frac{13}{8}x_3 = -\frac{1}{4} \\ x_1 + \frac{19}{8}x_3 = \frac{11}{4} \end{cases}$$

Nu is het stelsel zover vereenvoudigd, dat we met het blote oog kunnen zien wat de oplossingen zijn: stel $x_3 = \lambda$, dan $x_2 = -\frac{1}{4} + \frac{13}{8}\lambda$ en $x_1 = \frac{11}{4} - \frac{19}{8}\lambda$, dus

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{4} - \frac{19}{8}\lambda \\ -\frac{1}{4} + \frac{13}{8}\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\frac{19}{8} \\ \frac{13}{8} \\ 1 \end{pmatrix}$$

De verzameling van alle oplossingen (x_1, x_2, x_3) is dus de lineaire variëteit $(\frac{11}{4}, -\frac{1}{4}, 0) + \llbracket(-\frac{19}{8}, \frac{13}{8}, 1)\rrbracket$ (dat is in onze meetkundige interpretatie in $\mathbb{R}^3$ een lijn die niet door de oorsprong gaat)

Opmerking. Het is je ongetwijfeld opgevallen dat de toegestane manipulaties met een stelsel van vergelijkingen precies dezelfde zijn als die uit het veegproces dat we in de voorgaande hoofdstukken zijn tegengekomen. Preciezer gezegd: de verzameling van alle oplossingen van een stelsel vergelijkingen blijft ongewijzigd als we

- de volgorde veranderen
- een vergelijking met een getal $\neq 0$ vermenigvuldigen
- veelvouden van één vergelijking bij andere vergelijkingen optellen

Stelsels van vergelijkingen in matrixvorm.

We kunnen het stelsel
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 3 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 4 \end{cases}$$
 ook noteren als
$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 6 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

De op de vorige bladzijde gevolgde oplossingsmethode kwam neer op het vegen met rijen van de met een extra kolom uitgebreide matrix

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -1 & 7 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & -5 & 4 \end{array} \right) \\ \text{Dat veeproces verliep als volgt:} & \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -1 & 7 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & -5 & 4 \end{array} \right) \implies \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 8 & -13 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 8 & -13 & -2 \end{array} \right) \\ & \implies \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -\frac{13}{8} & -\frac{1}{4} \\ 1 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \implies \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -\frac{13}{8} & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 & \frac{19}{8} & \frac{11}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Tenslotte konden we het bij deze laatste matrix behorende vereenvoudigde stelsel probleemloos oplossen

Algemeen. Een stelsel van m lineaire vergelijkingen in de onbekenden $x_1, \dots, x_n$ is te schrijven in de matrixvorm $A\vec{x} = \vec{b}$

Hierbij is A een $n \times m$ matrix, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

Oplossen lukt via vegen met de rijen van de uitgebreide matrix $\left(\begin{array}{c|c} A & \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \end{array} \right)$

Het stelsel heet homogeen als $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Zo niet, dan heet het inhomogeen

Voorbeeld 1. Zoek alle oplossingen van
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$$

Oplossing. In matrixvorm ziet het stelsel er als volgt uit:
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

We gaan in de bijbehorende uitgebreide matrix vegen met de eerste en tweede rij:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 5 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{rij 1}]{\text{bezem}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -8 \\ 0 & -7 & 1 & -17 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{rij 2}]{\text{bezem}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 10 & 0 & 13 \\ 0 & -7 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{array} \right)$$

Het bijbehorende stelsel is
$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 = 13 \\ -7x_2 + x_3 = -8 \\ 0 = -9 \end{cases}$$
 en de verzameling van alle oplossingen is dus leeg:

$$\text{Opl}(A\vec{x} = \vec{b}) = \emptyset$$

Voorbeeld 2. We zoeken alle oplossingen van
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 11 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 12 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 13 \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = 14 \end{cases}$$

Oplossing. We gieten het stelsel in matrixvorm
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 2 & -1 \\ 4 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{pmatrix}$$

en gaan in de hierbij behorende uitgebreide matrix vegen met rijen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -1 & 11 \\ 2 & 2 & 3 & -1 & 12 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & 13 \\ 4 & 4 & 1 & -1 & 14 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{rij 1}]{\text{bezem}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 2 & -20 \\ 0 & 0 & -15 & 3 & -30 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{rij 2}]{\text{bezem}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Het bijbehorende stelsel is
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -5x_3 + x_4 = -10 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$
 en de oplossingsverzameling vind je als volgt:

Stel $x_1 = \lambda$ en $x_3 = \mu$. Dan staat er:
$$\begin{cases} x_2 = 1 - \lambda + \mu \\ x_4 = -10 + 5\mu \end{cases}$$

Dus
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 - \lambda + \mu \\ \mu \\ -10 + 5\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

De verzameling van alle oplossingen is dus de lineaire variëteit $(0, 1, 0, -10) + \llbracket (1, -1, 0, 0), (0, 1, 1, 5) \rrbracket$

Voorbeeld 3. Los op:
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 30 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Oplossing.
$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 11 \\ 5 & 1 & 30 \\ 1 & 3 & -8 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{rij 3}]{\text{bezem}} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -7 & 35 \\ 0 & -14 & 70 \\ 1 & 3 & -8 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{rij 1}]{\text{bezem}} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -5 \\ 0 = 0 \\ x_1 = 7 \end{cases}$$

De oplossingsverzameling is dus de uit slechts één vector bestaande verzameling $\{(7, -5)\}$

Oplossingsverzameling van homogene stelsels. Een homogeen stelsel $A\vec{x} = \vec{0}$ van lineaire vergelijkingen in n onbekenden heeft als oplossingsverzameling $\text{Ker } A$. Dat is een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^n$. De dimensie van deze oplossingsverzameling is $n - r$, waarbij r de rang van A is (dat is een direct gevolg van de dimensiestelling uit het vorige hoofdstuk)

Oplossingsverzameling van inhomogene stelsels. Bij een inhomogeen stelsel $A\vec{x} = \vec{b}$ zitten we altijd in een van de volgende drie mogelijke situaties:

- (1) de oplossingsverzameling is leeg (zoals in voorbeeld 1)
- (2) de oplossingsverzameling bestaat uit één vector (zoals in voorbeeld 3)
- (3) de oplossingsverzameling is een lineaire variëteit (zoals in voorbeeld 2)

Laat ik deze stoutmoedige bewering maar even exact bewijzen, anders beginnen de studenten weer te mauwen. Neem even aan dat de oplossingsverzameling niet leeg is, dat wil zeggen: neem even aan dat er minstens één vector $\vec{p}$ bestaat die voldoet aan $A\vec{p} = \vec{b}$. Dan geldt:

$$A\vec{x} = \vec{b} \iff A(\vec{x} - \vec{p}) = A\vec{x} - A\vec{p} = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0} \iff \vec{x} - \vec{p} \in \text{Ker } A \iff \vec{x} \in \vec{p} + \text{Ker } A$$

De oplossingsverzameling is dan dus de lineaire variëteit $\vec{p} + \text{Ker } A$

(in het speciale geval $\text{Ker } A = \{\vec{0}\}$ is deze lineaire variëteit de eenpuntsverzameling $\{\vec{p}\}$)

Opgaven hoofdstuk 3

Opgave 1. Bepaal alle oplossingen (x_1, x_2, x_3, x_4) van
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 6x_2 - 2x_4 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

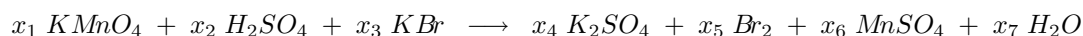
Opgave 2. Bepaal alle oplossingen (x_1, x_2, x_3, x_4) van
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 + 3x_4 = 7 \\ x_1 + 7x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 10 \end{cases}$$

Opgave 3. Voor welke reële getallen λ heeft het stelsel
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$$
 méér dan 1 oplossing?

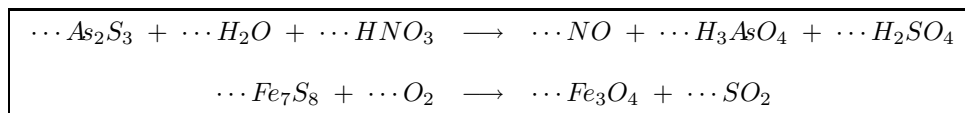
Opgave 4. Zij A een 3×3 matrix met rang 2.

Wat voor gedaante kan de verzameling van alle oplossingen van $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ aannemen?

Opgave 5. Schrijf de vergelijkingen op waaraan de getallen $x_1, \dots, x_7$ moeten voldoen in de volgende reactievergelijking, en los die op:



Opgave 6. Vul zo eenvoudig mogelijke gehele getallen in in de volgende reactievergelijkingen:



Opgave 7. Zij $A\vec{x} = \vec{0}$ een stelsel van 83 vergelijkingen in 37 onbekenden, waarbij A een matrix van rang 25 is. Bereken de dimensie van de oplossingsverzameling

Opgave 8. Verzin een stelsel van vergelijkingen $A\vec{x} = \vec{b}$ waarvan de oplossingsverzameling de lineaire variëteit $(1, 0, 0, 0) + \llbracket(8, -3, 7, 1)\rrbracket$ is

Opgave 9. Zij A een 5×5 matrix met rang 5. Hoeveel oplossingen heeft $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$?

Opgave 10. Zij $A\vec{x} = \vec{b}$ een inhomogeen stelsel van drie vergelijkingen met drie onbekenden, dat precies één oplossing heeft. Wat kun je uit deze gegevens concluderen omtrent de rang van A ?

0°							Opgave 11. De temperatuur in de punten op de rand is gegeven:
0°	22°						0° links en onder, 22° langs de schuine kant. De temperaturen
0°	t_1	22°					$t_1, \dots, t_6$ in de andere punten zijn zodanig dat in ieder van
0°	t_2	t_3	22°				deze zes punten de temperatuur het gemiddelde is van de
0°	t_4	t_5	t_6	22°			temperaturen in de vier dichtstbijzijnde roosterpunten.
0°	0°	0°	0°	0°	0°		Bereken $t_1, \dots, t_6$
							(gewone stervelingen en chemici zijn doorgaans niet
							bijster dol op stelsels van zes vergelijkingen met zes
							onbekenden. Gelukkig zijn zij sluw en slagvaardig:
							zij gebruiken de symmetrie $t_1 = t_6$ en $t_2 = t_5$)

Zelfstudiepakketje bij hoofdstuk 3

Opgave 1. Voor welke reële getallen λ heeft het stelsel vergelijkingen

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 3 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 12 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

méér dan één oplossing?

Opgave 2. Zij A een 3×3 matrix met rang 2 waarvoor geldt:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad A \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bepaal alle oplossingen van het stelsel vergelijkingen $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Opgave 3. Welke van de volgende beweringen zijn juist voor alle 3×3 matrices A met rang 3? Geef bij elk antwoord een korte toelichting

a) Het stelsel vergelijkingen $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 \\ -5 \\ 13 \end{pmatrix}$ heeft precies één oplossing

b) Het A -beeld van de lijn $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$ is een lijn in $\mathbb{R}^3$ die niet door de oorsprong gaat

Opgave 4. Zij A een 2×2 matrix van rang 1

- a) Welke gedaante kan de verzameling van alle vectoren waarvan het A -beeld op de lijn $\llbracket (2, 5) \rrbracket$ ligt zoal aannemen?
- b) Welke gedaante kan de verzameling van alle vectoren waarvan het A -beeld op de lijn $(1, 3) + \llbracket (2, 5) \rrbracket$ ligt zoal aannemen?

Oplossingen

Opgave 1. We definiëren $A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 3 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 12 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

De oplossingsverzameling van $A_\lambda(\vec{x}) = \vec{b}$ is volgens de theorie ofwel leeg, ofwel van de vorm $\vec{p} + \text{Ker}(A_\lambda)$. Als deze oplossingsverzameling minstens twee elementen bevat, is dus $\text{Ker}(A_\lambda) \neq \{\vec{0}\}$ en dus volgens de dimensiestelling $\text{rang}(A_\lambda) \leq 2$. De rijen van A_λ moeten dus afhankelijk zijn, dus λ is een van de getallen 0, 6 en -6 (bij $\lambda = 0$ is de tweede rij de nulrij, en bij $\lambda = \pm 6$ is de eerste rij een veelvoud van de derde rij). Nader onderzoek van de betreffende oplossingsverzamelingen levert de volgende resultaten op:

- de oplossingsverzameling van $A_0(\vec{x}) = \vec{b}$ is leeg
- de oplossingsverzameling van $A_6(\vec{x}) = \vec{b}$ is leeg
- de oplossingsverzameling van $A_{-6}(\vec{x}) = \vec{b}$ is $(0, -\frac{5}{6}, \frac{1}{3}) + \llbracket(1, 0, 2)\rrbracket$

Conclusie: alleen $\lambda = -6$ levert minstens twee oplossingen

Opgave 2. Uit de gegevens volgt dat $\text{Ker } A = \llbracket \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \rrbracket$ want de dimensie van de kern is volgens

de dimensiestelling $3 - \text{rang}(A) = 1$, en de vector $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ zit in de kern

De oplossingsverzameling van $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ is dus $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \llbracket \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \rrbracket$

Opgave 3.

a) Juist, want

- er is minstens één oplossing omdat $\text{Im } A = \mathbb{R}^3$ wegens $\dim(\text{Im } A) = \text{rang}(A) = 3$
- er is hoogstens één oplossing, want de oplossingsverzameling is van de vorm $\vec{p} + \text{Ker } A$, en $\text{Ker } A = \{\vec{0}\}$ wegens $\dim(\text{Ker } A) = 3 - \text{rang } A = 0$

b) Juist, want

- dit A -beeld is een lijn, namelijk de lijn $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \llbracket A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rrbracket$

- deze lijn gaat niet door $\vec{0}$, want $\text{Ker } A = \{\vec{0}\}$ en $\vec{0}$ ligt niet op de lijn $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \llbracket \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rrbracket$

Opgave 4.

a) $\text{Im } A$ is een lijn door $\vec{O}$, want $\dim(\text{Im } A) = \text{rang } A = 1$. Er zijn nu twee mogelijkheden:

- (1) $\text{Im } A = \llbracket(2, 5)\rrbracket$. In dat geval is de gevraagde verzameling de hele $\mathbb{R}^2$
- (2) $\text{Im } A \neq \llbracket(2, 5)\rrbracket$. Dan is de gevraagde verzameling de kern van A , en dit is een lijn door $\vec{O}$ wegens $\dim(\text{Ker } A) = 2 - \text{rang } A = 1$

b) Er zijn weer twee mogelijkheden:

- (1) $\text{Im } A = \llbracket(2, 5)\rrbracket$. Dan is de gevraagde verzameling leeg
- (2) $\text{Im } A \neq \llbracket(2, 5)\rrbracket$. Dan lopen de lijnen $\text{Im } A$ en $(1, 3) + \llbracket(2, 5)\rrbracket$ niet evenwijdig. Ze hebben dus precies één snijpunt $A\vec{p}$, en dus is de gevraagde verzameling $\vec{p} + \text{Ker } A$