

4. Determinanten en eigenwaarden

In dit hoofdstuk bestuderen we vierkante matrices. We kunnen zo'n $n \times n$ matrix opvatten als een lineaire transformatie van $\mathbb{R}^n$. We onderscheiden deze matrices in twee typen: reguliere en singuliere matrices

Reguliere matrices. We noemen een $n \times n$ matrix A regulier als $\text{rang } A = n$. Zoals je in zelfstudie-oefening 7c van hoofdstuk 2 hebt ontdekt, heeft bij zo'n A iedere vector precies één origineel. Een reguliere lineaire transformatie A van $\mathbb{R}^n$ is dus inverteerbaar, dat wil zeggen: er bestaat een inverse transformatie A^{-1} die aan iedere vector zijn A -origineel toevoegt. Deze inverse is zelf ook weer een lineaire afbeelding en voldoet aan $A^{-1} \cdot A = I$ en $A \cdot A^{-1} = I$. We kennen inmiddels de volgende eigenschappen van reguliere $n \times n$ matrices A :

- de rijen van A zijn onafhankelijk
- de kolommen van A zijn onafhankelijk
- $\text{rang } A = n$
- $\text{Ker } A = \{\vec{0}\}$
- $\text{Im } A = \mathbb{R}^n$
- iedere vector uit $\mathbb{R}^n$ heeft precies één A -origineel
- A is kolom-veegbaar tot I
- A is rij-veegbaar tot I
- A is inverteerbaar

Singuliere matrices. Met singulier bedoelen we niet-regulier. Een singuliere $n \times n$ matrix A heeft dus de volgende eigenschappen:

- de rijen van A zijn afhankelijk
- de kolommen van A zijn afhankelijk
- $\text{rang } A < n$
- $\text{Ker } A \neq \{\vec{0}\}$
- $\text{Im } A \neq \mathbb{R}^n$
- iedere vector uit $\mathbb{R}^n$ heeft ófwel geen enkel A -origineel, ófwel een heleboel originelen
- A is niet inverteerbaar

Voorbeeld 1. Zij $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de draaiing over een hoek φ tegen de wijzers van de klok in.

In hoofdstuk 2 hebben we zijn matrix uitgerekend: $A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$. Deze A is regulier.

De inverse transformatie is: draaiing over een hoek $-\varphi$, met matrix $A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{pmatrix}$

Reken zelf maar even na, dat inderdaad $\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Voorbeeld 2. Zij A de lineaire transformatie van $\mathbb{R}^2$, die vastgelegd wordt door $\begin{cases} A\vec{e}_1 = (1, -1) \\ A\vec{e}_2 = (2, 1) \end{cases}$

In de matrix van A zien we $A\vec{e}_1$ en $A\vec{e}_2$ als kolommen verschijnen: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Omdat de kolommen onafhankelijk zijn, is A regulier. Het beeld van een willekeurige vector $\vec{x}$ kun je eenvoudig berekenen:

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

Om de inverse van A uit te rekenen, kun je bijvoorbeeld als volgt te werk gaan: Stel $A\vec{x} = \vec{y}$. Dan is

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = y_1 \\ -x_1 + x_2 = y_2 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_2 \\ x_2 = \frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 \end{cases} \implies \vec{x} = B\vec{y} \text{ waarbij } B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Inderdaad kun je narekenen dat A en B elkaars inverse zijn: $AB = BA = I$

Voorbeeld 3. Zij A de transformatie van $\mathbb{R}^2$ met matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Deze A is singulier, want $\text{Ker}(A) = \mathbb{[(3, 1)]}$

Voorbeeld 4. Zij $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de spiegeling om het vlak met vergelijking $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$. Bepaal de matrix van A en zijn inverse

Oplossing. Zij $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$. We gaan $A\vec{x}$ uitrekenen. Hiervoor hebben we een ruime keus uit allerlei omslachtige en slimme methoden. Ik kies een slimme methode die gebaseerd is op trucs uit de hoofdstukken 2 van Wiskunde 1 en dit diktaat: ik bereken eerst de projectie $\vec{p}$ van $\vec{x}$ op de normaal van het vlak, en zie vervolgens in dat $A\vec{x} = \vec{x} - 2\vec{p}$ (als je dat niet inzielt is dat domme pech, en ben je helaas veroordeeld tot een omslachtige methode)

$$\vec{p} = \frac{\vec{x} \bullet (2, 1, -2)}{(2, 1, -2) \bullet (2, 1, -2)} \cdot (2, 1, -2) = \left(\frac{4}{9}x_1 + \frac{2}{9}x_2 - \frac{4}{9}x_3, \frac{2}{9}x_1 + \frac{1}{9}x_2 - \frac{2}{9}x_3, -\frac{4}{9}x_1 - \frac{2}{9}x_2 + \frac{4}{9}x_3 \right)$$

$$\text{Dus } A\vec{x} = \vec{x} - 2\vec{p} = \left(\frac{1}{9}x_1 - \frac{4}{9}x_2 + \frac{8}{9}x_3, -\frac{4}{9}x_1 + \frac{7}{9}x_2 + \frac{4}{9}x_3, \frac{8}{9}x_1 + \frac{4}{9}x_2 + \frac{1}{9}x_3 \right)$$

$$\text{De matrix van } A \text{ is dus } \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{8}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Tenslotte nog ons antwoord op het bijzonder flauwe vraagje naar de inverse van A : vanzelfsprekend is $A \circ A = I$, want twee keer spiegelen is hetzelfde als niks doen. A is dus zijn eigen inverse. Wie het niet vertrouwt mag het nog even narekenen:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{8}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{8}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berekening van de inverse. De methode, die we in voorbeeld 2 gehanteerd hebben om A^{-1} te berekenen, komt neer op het volgende rekenwerk: plak de matrices A en I aan elkaar tot

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right)$$

en veeg met de rijen van deze $2n \times n$ matrix net zolang tot je iets van de vorm

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{array} \right)$$

bereikt hebt (met links van de streep de matrix I). Dan is $B = A^{-1}$. Lukt dit niet (doordat links van de streep een rij ontstaat met uitsluitend nullen), dan bestaat A^{-1} niet

Voorbeeld 5. We proberen de inverse te berekenen van de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{rij 1}]{\text{bezem}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{rij 2}]{\text{bezem}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Wat een domme pech, A is niet inverteerbaar. Blijkbaar is A een singuliere matrix

Voorbeeld 6. Bereken de inverse van $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Oplossing.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \xrightarrow[\text{rij 1}]{\text{bezem}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow[\text{rij 2}]{\text{bezem}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow[\text{rij 3}]{\text{bezem}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Dus } A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 6 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Even controleren: } \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 6 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinant. De determinant van een vierkante matrix A is een reëel getal dat genoteerd wordt als $\det(A)$ (of soms als $|A|$) en dat als volgt wordt berekend:

1×1 matrix. Voor een 1×1 matrix is het eenvoudig: $\det \begin{pmatrix} a \end{pmatrix} = a$

2×2 matrix. $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

3×3 matrix. $\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3$

Merk op dat in de uitkomst alle mogelijke producten voorkomen van drie getallen die uit drie verschillende rijen en bovendien uit drie verschillende kolommen afkomstig zijn. De helft van deze producten met een plusteken (namelijk de producten van termen in \-richting) en de andere helft met een minteken (dat zijn die in /-richting)

4×4 matrix. Ook voor de determinant van een 4×4 matrix zou je een dergelijke formule kunnen opschrijven, met 24 producten $a_i b_j c_k d_l$ waarvan de helft met een plusteken. Zoiets is echter voor een gewoon mens nauwelijks meer te onthouden, laat staan voor een natuurwetenschapper. We doen het daarom anders. De nu volgende berekeningswijze, waarin een 4×4 determinant wordt gereduceerd tot 3×3 determinanten, heet ‘ontwikkelen naar de eerste rij’:

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \det \begin{pmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix} - b_1 \cdot \det \begin{pmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix} +$$

$$+ c_1 \cdot \det \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{pmatrix} - d_1 \cdot \det \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{pmatrix}$$

Deze werkwijze is gemakkelijk te onthouden: je vermenigvuldigt telkens een getal uit de eerste rij met de ‘onderdeterminant’ die ontstaat door de betreffende rij en kolom te schrappen. Linksboven is een plusteken aan de beurt, verder om beurten + en -. Je mag ook bijvoorbeeld ontwikkelen naar de tweede rij of de vierde kolom (te beginnen met een minteken)

Grotere matrices. Dezelfde methode als bij 4×4 matrices. Bijvoorbeeld (we ontwikkelen telkens naar de eerste kolom):

$$\det \begin{pmatrix} 7 & 0 & 5 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 8 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 7 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} = 7 \det \begin{pmatrix} 4 & 8 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} - 3 \det \begin{pmatrix} 0 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 28 \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 7 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} + 14 \det \begin{pmatrix} 8 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} - 6 \det \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} = 480$$

Eigenschappen van determinanten. Uit de rekentechnische definitie kun je de volgende eigenschappen bewijzen:

- $\det(I) = 1$
- $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ (als $\det(A) \neq 0$)
- A is regulier $\iff \det(A) \neq 0$
(dit levert een nieuwe manier om na te gaan of een matrix inverteerbaar is)
- (voor een 3×3 matrix) Een voorwerp *ding* wordt door $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ getransformeerd in een voorwerp $A(\text{ding})$. Er geldt nu:

$$\text{volume}(A(\text{ding})) = |\det(A)| \cdot \text{volume}(\text{ding})$$
 $|\det(A)|$ is dus de vergrotingsfactor van de transformatie A
- (voor een 2×2 matrix) Een begrensde deelverzameling *gebied* van $\mathbb{R}^2$ wordt overgevoerd in $A(\text{gebied})$. De oppervlakte van $A(\text{gebied})$ is dan $|\det(A)|$ keer zo groot als de oppervlakte van *gebied*

Voorbeeld 7. Ga na of $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ inverteerbaar is

Oplossing. $\det \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = 7 \neq 0$, dus $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ is inverteerbaar

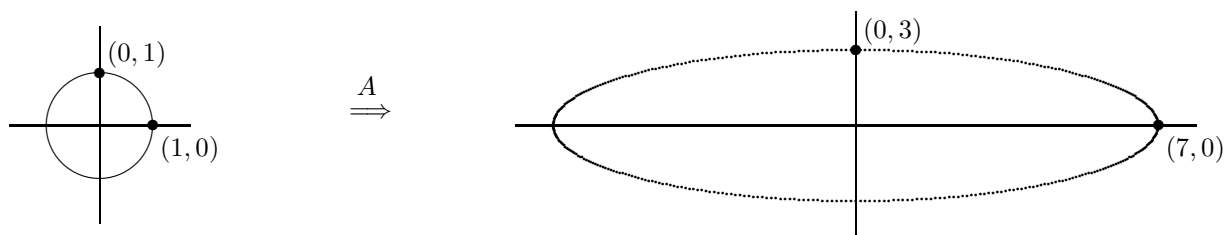
Voorbeeld 8. De lineaire transformatie $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ transformeert de kubus $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ in een veelvlak. Wat is de inhoud van dit veelvlak?

Oplossing. De kubus heeft inhoud 1, dus het veelvlak heeft inhoud $|\det(A)| = |-8| = 8$

Voorbeeld 9. Bereken de oppervlakte van de ellips $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{9} \leq 1$

Oplossing. Deze ellips is het A -beeld van het cirkeltje $x^2 + y^2 \leq 1$ met $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

De oppervlakte van het cirkeltje is π , dus de oppervlakte van de ellips is $|\det(A)| \cdot \pi = 21\pi$



Eigenwaarden en eigenvectoren. Zij A een vierkante matrix (of, anders gezegd, $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$). We definiëren dan:

λ is een eigenwaarde van A	$\stackrel{\text{def}}{=}$ er bestaat een $\vec{x} \neq \vec{0}$ met $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$
$\vec{x}$ is een eigenvector van A bij de eigenwaarde λ	$\stackrel{\text{def}}{=}$ $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$
de eigenruimte bij de eigenwaarde λ	$\stackrel{\text{def}}{=}$ de verzameling van alle eigenvectoren bij λ

Voorbeeld 10. $A = \begin{pmatrix} -5 & 27 \\ 18 & 40 \end{pmatrix}$. Dan is 49 een eigenwaarde van A , en $(1, 2)$ is een eigenvector.

Reken dat zelf maar even na: $\begin{pmatrix} -5 & 27 \\ 18 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 \\ 98 \end{pmatrix}$

Hoe vind ik de eigenwaarden? Het systematisch opsporen van eigenwaarden is een buitengewoon lastig karweitje. Gelukkig hebben slimme wiskundigen hier een prachtige truc voor bedacht door als volgt te redeneren: uit $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ volgt $A\vec{x} - \lambda\vec{x} = \vec{0}$, dus $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$, dus $\vec{x} \in \text{Ker}(A - \lambda I)$, dus $\text{Ker}(A - \lambda I) \neq \{\vec{0}\}$, dus $\det(A - \lambda I) = 0$. We zullen eens kijken hoe deze truc in bovenstaand voorbeeld werkt:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 27 \\ 18 & 40 \end{pmatrix} \quad \text{dus } A - \lambda I = \begin{pmatrix} -5 & 27 \\ 18 & 40 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 - \lambda & 27 \\ 18 & 40 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\text{dus } \det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 35\lambda - 686 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 49 \text{ of } \lambda = -14$$

We hebben dus twee eigenwaarden gevonden: 49 en -14 . De moraal:

$$\boxed{\lambda \text{ is een eigenwaarde van } A \iff \det(A - \lambda I) = 0}$$

Hoe vind ik de eigenvectoren? We zagen dat $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ op hetzelfde neerkwam als $\vec{x} \in \text{Ker}(A - \lambda I)$. Het opsporen van eigenvectoren komt dus neer op het berekenen van $\text{Ker}(A - \lambda I)$, en deze kern kun je berekenen met behulp van de hiervoor in hoofdstuk 2 ontwikkelde technieken. Laten we eens kijken hoe dat werkt bij de matrix $A = \begin{pmatrix} -5 & 27 \\ 18 & 40 \end{pmatrix}$ uit voorbeeld 10. We vonden twee eigenwaarden van A : de getallen 49 en -14 . Nu kunnen we de bijbehorende eigenvectoren opsporen:

- De verzameling van de bij 49 behorende eigenvectoren is niets anders dan $\text{Ker}(A - 49I)$, en deze kern kunnen we op de vanouds bekende manier ('vegen met rijen') berekenen:

$$\text{Ker}(A - 49I) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -54 & 27 \\ 18 & -9 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \text{Opl}(2x_1 - x_2 = 0) = [(1, 2)]$$

- Net zo berekenen we de verzameling van alle bij -14 behorende eigenvectoren (de eigenruimte bij de eigenwaarde -14):

$$\text{Ker}(A + 14I) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 9 & 27 \\ 18 & 54 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Opl}(x_1 + 3x_2 = 0) = [(-3, 1)]$$

Merk op dat een eigenruimte altijd een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^n$ is, simpelweg omdat het een kern is:

$$\boxed{\text{de eigenruimte bij } \lambda \text{ is } \text{Ker}(A - \lambda I)}$$

Het inventariseren van eigenwaarden en eigenvectoren kan interessante informatie opleveren over een transformatie. Een voorbeeldje:

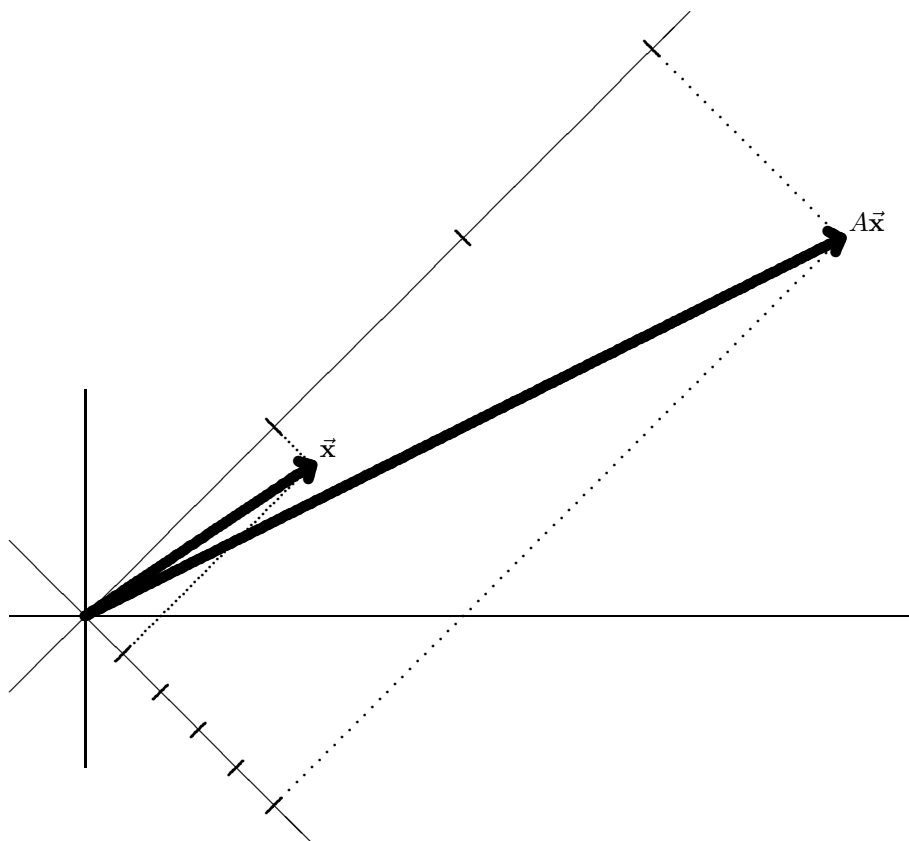
Voorbeeld 11. Geef een meetkundige interpretatie van de lineaire transformatie $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

Oplossing. Laten we even aannemen dat je geen flauw benul hebt wat dit meetkundig te betekenen heeft. Je kunt dan interessante informatie over A vergaren door even wat eigenwaarden en eigenvectoren uit te rekenen:

$$\begin{aligned} \bullet \lambda \text{ is een eigenwaarde van } A &\iff \det(A - \lambda I) = 0 \iff \det \begin{pmatrix} 4 - \lambda & -1 \\ -1 & 4 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff (4 - \lambda)^2 - 1 = 0 \iff \lambda = 3 \text{ of } \lambda = 5 \end{aligned}$$

- de eigenruimte bij $\lambda = 3$ is $\text{Ker}(A - 3I) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \text{Opl}(x_1 - x_2 = 0) = \llbracket(1, 1)\rrbracket$
- de eigenruimte bij $\lambda = 5$ is $\text{Ker}(A - 5I) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \text{Opl}(-x_1 - x_2 = 0) = \llbracket(1, -1)\rrbracket$

We hebben ontdekt dat A de vector $(1, 1)$ verdrievoudigt en de vector $(1, -1)$ verviervoudigt, en er is maar één lineaire transformatie die dit presteert: de transformatie A die iedere vector $\vec{x}$ ontbindt in componenten in de richtingen $(1, 1)$ en $(1, -1)$, deze componenten met factor respectievelijk 3 en 5 uitrekt, en de uitreksels weer samenstelt:



Opgaven hoofdstuk 4

Opgave 1. Ga na of de matrix $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ regulier is

Opgave 2. Ga na of de matrix $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & -7 & 1 \end{pmatrix}$ regulier is

Opgave 3. Welke van de volgende matrices zijn inverteerbaar?

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Opgave 4. Bereken (indien deze bestaat) de inverse van $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

Opgave 5. Bereken de inverse van $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ of bewijs dat die niet bestaat

Opgave 6. Bereken de determinant van $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Opgave 7. Bereken de determinant van $\begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Opgave 8.

a) Zij A de matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Bewijs dat $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

b) Bereken met behulp van de bovenstaande formule de inverse van $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Opgave 9. A is een 2×2 matrix met determinant 5.

$\mathbf{P}$ en $\mathbf{Q}$ zijn punten in $\mathbb{R}^2$, zó dat de driehoek $\triangle \mathbf{OPQ}$ oppervlakte 7 heeft.

Bereken de oppervlakte van $\triangle \mathbf{OAPQ}$

Opgave 10. Zij $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gedefinieerd door

$$A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 - 3x_2 + x_3, 5x_1 + x_2 + x_3)$$

Bereken de inhoud van het zesvlak met de volgende hoekpunten:

$$(0, 0, 0), A(1, 0, 0), A(0, 1, 0), A(0, 0, 1), A(1, 1, 0), A(1, 0, 1), A(0, 1, 1), A(1, 1, 1)$$

Opgave 11. Zij A de matrix $\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

- a) Bepaal de eigenwaarden van A
- b) Bepaal bij elke gevonden eigenwaarde de bijbehorende eigenvectoren

Opgave 12. Zij A de lineaire transformatie van $\mathbb{R}^3$ met matrix $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 12 \\ 2 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

- a) Bepaal alle eigenwaarden en de bijbehorende eigenruimten van A
- b) Geef een meetkundige beschrijving van deze transformatie

Opgave 13. Zij A de matrix $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

- a) Verzin een meetkundige interpretatie van A (dat lukt je vast wel, als je je nog voorbeeld 4 van dit hoofdstuk herinnert)
- b) Bepaal de eigenwaarden van A (ofwel via bruto rekenwerk, ofwel via slim inzicht)
- c) Bepaal bij elke gevonden eigenwaarde de bijbehorende eigenruimte (ofwel via bruto rekenwerk, ofwel via slim inzicht)

Zelfstudiepakketje bij hoofdstuk 4

Opgave 1. Zij $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de lineaire transformatie met matrix $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 7 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Bereken de inhoud van het viervlak met hoekpunten $(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $A(0, 1, 0)$, $A(0, 0, 1)$

Opgave 2. Zij $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de lineaire afbeelding met matrix $\begin{pmatrix} 7 & -2 & -2 \\ 8 & -1 & -4 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

- a) Bepaal de eigenwaarden van A
- b) Bepaal bij elke gevonden eigenwaarde de bijbehorende eigenruimte
- c) Geef een meetkundige interpretatie van A

Opgave 3. We definiëren de volgende twee transformaties van $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} A\vec{x} &\stackrel{\text{def}}{=} \text{de projectie van } \vec{x} \text{ op de lijn } \llbracket(2, 3)\rrbracket \\ B\vec{x} &\stackrel{\text{def}}{=} 3\vec{x} + 13A\vec{x} \end{aligned}$$

- a) Bepaal de matrix van B
- b) Bepaal de eigenwaarden van B
- c) Bepaal de eigenwaarden van B^{-1}

Opgave 4. Zij A een lineaire transformatie van $\mathbb{R}^2$ die voldoet aan $\|A\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$ voor alle vectoren $\vec{x}$

- a) Bewijs dat A de hoeken invariant laat (dat wil zeggen: voor ieder tweetal vectoren $\vec{x}, \vec{y}$ is de hoek tussen $A\vec{x}$ en $A\vec{y}$ gelijk aan de hoek tussen $\vec{x}$ en $\vec{y}$)
- b) Bewijs dat $|\det(A)| = 1$

Opgave 5. Zij A de matrix $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}$

- a) Bepaal de eigenwaarden van A
- b) Bepaal de eigenwaarden van de inverse van A^{237}
- c) Bepaal de oppervlakte van de verzameling van alle punten, die het beeld onder de transformatie A^7 zijn van een vector met lengte ≤ 5

Opgave 6. Zij $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de lineaire transformatie met matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- a) Bepaal de eigenwaarden van A
- b) Bepaal de eigenruimte, behorende bij de eigenwaarde 3
- c) Bepaal de verzameling van alle vectoren $\vec{x}$ waarvoor geldt: $A\vec{x} \perp (-1, 1, 1)$

Opgave 7. Zij A de matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

- a) Bepaal alle eigenwaarden van A
- b) Bepaal de eigenruimte behorende bij de eigenwaarde 3

Opgave 8. Bepaal alle eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix $A = \begin{pmatrix} -3 & -15 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$

Opgave 9. Zij A de lineaire transformatie van $\mathbb{R}^2$, die bij een vector zijn projectie op $(1, 3)$ optelt:

$$A\vec{x} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{x} + (\text{de projectie van } \vec{x} \text{ op } (1, 3))$$

Is A regulier? Zo ja, bepaal dan de matrix van de inverse van A

Opgave 10. Gegeven is een homogeen en constant (in de tijd) magnetisch veld met veldsterkte

$$\vec{B} = (B_1, B_2, B_3) \neq \vec{0}$$

Een deeltje met lading q en snelheid $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ beweegt zich door dit magnetisch veld en ondervindt daarvan een Lorentz kracht. Deze is gelijk aan:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Om deze Lorentz kracht te onderzoeken, definiëren we de lineaire transformatie A van $\mathbb{R}^3$ door

$$A\vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} q\vec{v} \times \vec{B}$$

- a) Bepaal de matrix van A in termen van q , B_1 , B_2 en B_3
- b) Bepaal een eigenwaarde en een daarbij horende eigenvector van A
- c) Heeft A een inverse?

Opgave 11. We definiëren een lineaire transformatie A van $\mathbb{R}^2$ door $A(x_1, x_2) = (3x_1, x_1 + 2x_2)$

- a) Welke vectoren worden door A overgevoerd in een veelvoud van zichzelf?
- b) Geef een meetkundige interpretatie van A

Oplossingen

Opgave 1. De inhoud van de piramide met hoekpunten $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ is $\frac{1}{6}$, want van een eenheidsblokje kaas kun je de vijf poesjes en jezelf trakteren op zo'n lekkere kaaspiramide, als je de kaas handig snijdt. De inhoud van het A -beeld van deze piramide is dus $\frac{1}{6} \cdot |\det(A)| = 9$

Opgave 2.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lambda \text{ is eigenwaarde van } A &\iff \det(A - \lambda I) = 0 \iff \det \begin{pmatrix} 7 - \lambda & -2 & -2 \\ 8 & -1 - \lambda & -4 \\ 4 & -2 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 15\lambda + 9 = 0 \iff \lambda = 1 \text{ of } \lambda = 3 \end{aligned}$$

$$\text{b) De eigenruimte bij } \lambda = 1 \text{ is } \text{Ker}(A - I) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 8 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \llbracket (1, 2, 1) \rrbracket.$$

$$\begin{aligned} \text{De eigenruimte bij } \lambda = 3 \text{ is } \text{Ker}(A - 3I) &= \text{Ker} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 8 & -4 & -4 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &\llbracket (1, 0, 2), (0, 1, -1) \rrbracket \end{aligned}$$

$$\text{c) De drie onafhankelijke eigenvectoren } \begin{cases} \vec{f}_1 = (1, 2, 1) \\ \vec{f}_2 = (1, 0, 2) \\ \vec{f}_3 = (0, 1, -1) \end{cases} \text{ voldoen aan } \begin{cases} A\vec{f}_1 = \vec{f}_1 \\ A\vec{f}_2 = 3\vec{f}_2 \\ A\vec{f}_3 = 3\vec{f}_3 \end{cases}$$

A ontbindt dus een vector in drie componenten in de richtingen $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ en $\vec{f}_3$, vermenigvuldigt de tweede en derde component met 3, en stelt het zaakje weer samen

Opgave 3.

$$\text{a) } A(1, 0) = \left(\frac{4}{13}, \frac{6}{13}\right) \text{ en } A(0, 1) = \left(\frac{6}{13}, \frac{9}{13}\right), \text{ dus } A = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{6}{13} & \frac{9}{13} \end{pmatrix} \text{ en dus } B = 3I + 13A = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lambda \text{ is eigenwaarde van } B &\iff \det(B - \lambda I) = 0 \iff \det \begin{pmatrix} 7 - \lambda & 6 \\ 6 & 12 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \lambda^2 - 19\lambda + 48 = 0 \iff \lambda = 3 \text{ of } \lambda = 16 \end{aligned}$$

c) De eigenwaarden van B^{-1} zijn $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{16}$. Dat kun je natuurlijk héél onhandig achterhalen via een kwartierte rekenwerk (door eerst de matrix van B^{-1} uit te rekenen), maar je kunt het ook in een helder moment als volgt inzien:

$$B\vec{x} = \lambda\vec{x} \iff \vec{x} = B^{-1}(\lambda\vec{x}) \iff \vec{x} = \lambda \cdot B^{-1}\vec{x} \iff B^{-1}\vec{x} = \frac{1}{\lambda} \cdot \vec{x}$$

Opgave 4.

a) Driehoek $\triangle_1$ met hoekpunten $\vec{O}, \vec{x}, \vec{y}$ is congruent met de driehoek $\triangle_2$ met hoekpunten $\vec{O}, A\vec{x}, A\vec{y}$.

$$\text{Want hun zijden zijn even lang: } \begin{cases} \|A\vec{x}\| = \|\vec{x}\| \\ \|A\vec{y}\| = \|\vec{y}\| \\ \|A\vec{y} - A\vec{x}\| = \|A(\vec{y} - \vec{x})\| = \|\vec{y} - \vec{x}\| \end{cases}$$

Dus ook de overeenkomstige hoeken van $\triangle_1$ en $\triangle_2$ zijn gelijk

b) $\triangle_2$ is het A -beeld van $\triangle_1$, dus $|\det(A)| = \frac{\text{oppervlakte van } \triangle_2}{\text{oppervlakte van } \triangle_1} = 1$

Opgave 5.

- a) $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 8\lambda + 15$. De eigenwaarden van A zijn dus 3 en 5
- b) Als $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, dan $A^2\vec{x} = \lambda^2\vec{x}$ (want $A^2\vec{x} = A(A\vec{x}) = A(\lambda\vec{x}) = \lambda \cdot A\vec{x} = \lambda \cdot \lambda\vec{x}$), dus $A^3\vec{x} = \lambda^3\vec{x}$, ..., dus $A^{237}\vec{x} = \lambda^{237}\vec{x}$, dus $\vec{x} = (A^{237})^{-1}(\lambda^{237}\vec{x})$, dus $(A^{237})^{-1}\vec{x} = \frac{\vec{x}}{\lambda^{237}}$
De eigenwaarden van $(A^{237})^{-1}$ zijn dus 3^{-237} en 5^{-237}
- c) $\det(A) = 15$, dus $\det(A^7) = 15^7$. Zij nu C de cirkelschijf die bestaat uit alle vectoren $\vec{x}$ met $\|\vec{x}\| \leq 5$. De oppervlakte van C is 25π , dus de oppervlakte van het A^7 -beeld van C is $15^7 \cdot 25\pi$

Opgave 6.

- a) $\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^3 - 4(1 - \lambda) = (1 - \lambda)(\lambda + 1)(\lambda - 3)$. De eigenwaarden zijn dus 1, -1 en 3
- b) De eigenruimte bij 3 is $\text{Ker}(A - 3I) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \llbracket(2, 2, 1)\rrbracket$
- c) $A\vec{x} \perp (-1, 1, 1) \iff (x_1 + 2x_2, x_1 + x_2 + 2x_3, x_2 + x_3) \perp (-1, 1, 1) \iff 3x_3 = 0$
Dat is dus het vlak $x_3 = 0$

Opgave 7.

- a) De determinant van $A - \lambda I$ is $\lambda^2 - \lambda - 6$. De eigenwaarden zijn de nulpunten hiervan, dus 3 en -2
- b) De eigenruimte bij 3 is de kern van $A - 3I$, en deze is $\llbracket(1, 1)\rrbracket$

Opgave 8.

- $\det(A - \lambda I) = 0 \iff (-3 - \lambda)(7 - \lambda) - 75 = 0 \iff \lambda^2 - 4\lambda - 96 = 0 \iff \lambda = 12 \text{ of } \lambda = -8$
De eigenwaarden zijn dus 12 en -8
- De eigenruimte bij 12 is $\text{Ker}(A - 12I) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -15 & -15 \\ -5 & -5 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Opl}(x_1 + x_2 = 0) = \llbracket(1, -1)\rrbracket$
- De eigenruimte bij -8 is $\text{Ker}(A + 8I) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 5 & -15 \\ -5 & 15 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Opl}(x_1 - 3x_2 = 0) = \llbracket(3, 1)\rrbracket$

Opgave 9. De matrix van A is $\begin{pmatrix} \frac{11}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{19}{10} \end{pmatrix}$. Dus A is regulier, en $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{19}{20} & -\frac{3}{20} \\ -\frac{3}{20} & \frac{11}{20} \end{pmatrix}$

Opgave 10.

- a) $A\vec{v} = q(v_2B_3 - v_3B_2, v_3B_1 - v_1B_3, v_1B_2 - v_2B_1)$, dus de matrix van A is $\begin{pmatrix} 0 & qB_3 & -qB_2 \\ -qB_3 & 0 & qB_1 \\ qB_2 & -qB_1 & 0 \end{pmatrix}$
- b) $\det A = 0$ (reken maar na), dus 0 is een eigenwaarde, met eigenruimte $\text{Ker} A$. Je kunt $\text{Ker} A$ natuurlijk uit de matrix van A berekenen, maar het kan ook rechtstreeks dankzij je formidabele kennis van uitproductfeiten:

$$A\vec{v} = \vec{0} \iff \vec{v} \times \vec{B} = \vec{0} \iff \vec{v} \in \llbracket\vec{B}\rrbracket$$

Een voorbeeld van een eigenvector bij 0 is dus $7\vec{B}$

- c) Uit $\det A = 0$ volgt dat A niet inverteerbaar is

Opgave 11.

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Berekening eigenwaarden:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \iff \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 0 \\ 1 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \iff \lambda = 2 \text{ of } 3$$

Bij $\lambda = 2$ vind je als eigenruimte de lijn $\mathbb{L}(0, 1)$, en bij $\lambda = 3$ de lijn $\mathbb{L}(1, 1)$

b) Uit (a) volgt dat $A\vec{x}$ als volgt geconstrueerd kan worden: ontbind $\vec{x}$ in een component in richting $(0, 1)$ en een component in richting $(1, 1)$. Vermenigvuldig de eerste component met 2, de tweede met 3, en stel de resultaten weer samen:

