

## 5. Lineaire ruimten

Tot nu toe hebben we ons uitsluitend met de  $\mathbb{R}^n$  bezig gehouden. We gaan de behandelde theorie nu uitbreiden tot verzamelingen die een sterke overeenkomst met een  $\mathbb{R}^n$  vertonen. Een dergelijke verzameling noemen we een lineaire ruimte of vectorruimte

**Definitie.** Een lineaire ruimte is een verzameling  $\mathbf{V}$  van dingen (die we ook vectoren zullen noemen) waarvoor geldt:

- (1) er is een bewerking optelling op  $\mathbf{V}$  gedefinieerd  
(bij ieder tweetal  $\vec{x}$  en  $\vec{y}$  uit  $\mathbf{V}$  is ook  $\vec{x} + \vec{y}$  een element van  $\mathbf{V}$ )
- (2) er is een scalaire vermenigvuldiging gedefinieerd  
(bij iedere  $\vec{x}$  uit  $\mathbf{V}$  en  $\lambda \in \mathbb{R}$  is ook  $\lambda \cdot \vec{x}$  een element van  $\mathbf{V}$ )
- (3) er is een nulvector  $\vec{0}$  in  $\mathbf{V}$ , die voldoet aan  $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$  voor alle  $\vec{x} \in \mathbf{V}$
- (4) iedere  $\vec{x}$  uit  $\mathbf{V}$  heeft een tegengestelde  $-\vec{x}$  die voldoet aan  $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$
- (5) verder gelden de volgende rekenregeltjes voor alle  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbf{V}$  en  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ :

|                                                                                         |                            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|
| $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$                                                 | (optelling is commutatief) |
| $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$                         | (optelling is associatief) |
| $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$                                                             |                            |
| $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{x}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{x}$                        |                            |
| $(\lambda + \mu) \cdot \vec{x} = (\lambda \cdot \vec{x}) + (\mu \cdot \vec{x})$         |                            |
| $\lambda \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = (\lambda \cdot \vec{x}) + (\lambda \cdot \vec{y})$ |                            |

**Voorbeeld 1.**  $\mathbf{V} = \{0\}$ . Dit is een erg kleine, niet bijster interessante lineaire ruimte. Je kunt er inderdaad in optellen ( $0 + 0 = 0$ ), en ook aan de andere eisen voor een lineaire ruimte is voldaan (ga maar na). Het is de kleinst mogelijke lineaire ruimte, ook wel de nulruimte genoemd

**Voorbeeld 2.**  $\mathbf{V} = \mathbb{R}^7$ , de verzameling van alle rijtjes  $(x_1, \dots, x_7)$  van zeven reële getallen. De nulvector is  $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$

**Voorbeeld 3.**  $\mathbf{V} = \mathbb{R}^\infty$ , de verzameling van alle oneindige rijen  $(x_1, x_2, x_3, \dots)$  van reële getallen. Optelling en scalaire vermenigvuldiging zijn weer plaatsgewijs gedefinieerd, bijvoorbeeld:  $7 \cdot (x_1, x_2, x_3, \dots) = (7x_1, 7x_2, 7x_3, \dots)$ . De nulvector is de rij  $(0, 0, 0, \dots)$

**Voorbeeld 4.**  $\mathbf{V}$  = de verzameling van alle oneindige rijen  $(x_1, x_2, x_3, \dots)$  van reële getallen die naar 0 convergeren. Ook dit is een lineaire ruimte: je kunt erin optellen (want de som van twee rijen met limiet 0 is weer een rij met limiet 0), scalaire vermenigvuldiging is weer mogelijk (want een veelvoud van een rij met limiet 0 heeft ook limiet 0), en er is weer een nulvector aanwezig (dat is de nulrij  $(0, 0, 0, \dots)$ ). Omdat deze lineaire ruimte een deelverzameling van  $\mathbb{R}^\infty$  is, noemen we hem een lineaire deelruimte van  $\mathbb{R}^\infty$

**Voorbeeld 5.**  $\mathbf{V}$  = de verzameling van alle oneindige rijen  $(x_1, x_2, x_3, \dots)$  van reële getallen die naar 1 convergeren. Dit is géén lineaire ruimte, want je kunt er niet in optellen: de rijtjes  $(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots)$  en  $(1, 1, 1, 1, \dots)$  zitten in  $\mathbf{V}$ , maar hun som zit niet in  $\mathbf{V}$  (want deze heeft limiet 2)

**Voorbeeld 6.**  $\mathbf{V}$  = de verzameling van alle oneindige rijen van reële getallen met slechts eindig veel coördinaten  $\neq 0$ . Dit is weer een lineaire ruimte, want door optelling en scalaire vermenigvuldiging blijf je binnen  $\mathbf{V}$ , en ook de nulvector  $(0, 0, 0, \dots)$  zit in  $\mathbf{V}$ . Om de rekenregels hoeft je je niet te bekommeren, want die zijn geldig voor alle oneindige rijen (zie voorbeeld 3), dus ook voor die uit  $\mathbf{V}$

**Voorbeeld 7.**  $\mathbf{V}$  = de verzameling van alle functies  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Optelling van functies is gedefinieerd door  $(f + g)(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(t) + g(t)$  (plaatsgewijs dus), en scalaire vermenigvuldiging door  $(\lambda f)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \cdot f(t)$ . De rol van nulvector wordt gespeeld door de nulfunctie (de functie die in ieder punt als waarde het getal 0 heeft). We noemen deze lineaire ruimte  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

**Voorbeeld 8.**  $\mathbf{V}$  = de verzameling van alle differentieerbare functies  $f : (23, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Omdat de som van twee differentieerbare functies weer differentieerbaar is, een veelvoud van een differentieerbare functie differentieerbaar is, en de nulfunctie differentieerbaar is, is ook dit weer een lineaire ruimte

**Voorbeeld 9.**  $\mathbf{V}$  = de verzameling van alle veeltermen in  $x$  van graad  $\leq 25$ .

(Onder een veelterm in  $x$  van graad  $\leq 25$  verstaan we een uitdrukking van het type  $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots + \alpha_{25} x^{25}$  waarbij de  $\alpha_0, \dots, \alpha_{25}$  reële getallen zijn; zo'n veelterm kun je opvatten als een functie  $x \mapsto \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{25} x^{25}$ )

Je kunt twee veeltermen van graad  $\leq 25$  bij elkaar optellen:  $(\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{25} x^{25}) + (\beta_0 + \beta_1 x + \dots + \beta_{25} x^{25}) = (\alpha_0 + \beta_0) + (\alpha_1 + \beta_1)x + \dots + (\alpha_{25} + \beta_{25})x^{25}$ . Zoals je ziet resulteert dit weer in een veelterm van graad  $\leq 25$ . Ook als je een veelterm van graad  $\leq 25$  met een reëel getal vermenigvuldigt, krijg je weer een veelterm van graad  $\leq 25$ . Kijk maar:  $\lambda \cdot (\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{25} x^{25}) = \lambda \alpha_0 + \lambda \alpha_1 x + \dots + \lambda \alpha_{25} x^{25}$ . En er zit ook een nulvector in  $\mathbf{V}$ , namelijk de veelterm  $0 + 0x + \dots + 0x^{25}$ . Conclusie:  $\mathbf{V}$  is een lineaire deelruimte van  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Men noemt deze lineaire ruimte ook wel  $\mathbb{P}_{25}$

**Voorbeeld 10.**  $\mathbf{V}$  = de verzameling van alle functies  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  die te schrijven zijn als  $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5$  voor zekere getallen  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ . Dit is een lineaire deelruimte van de ruimte van alle functies op  $[0, 1]$

**Voorbeeld 11.**  $\mathbf{V}$  = de verzameling van alle functies  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  die voldoen aan  $f(\pi) = f(88)$ . De som van twee functies met deze eigenschap heeft weer deze eigenschap, en scalaire vermenigvuldiging verstoort de eigenschap niet (want uit  $f(\pi) = f(88)$  volgt onmiddellijk  $(\lambda f)(\pi) = (\lambda f)(88)$ ). Ook de nulfunctie heeft in  $\pi$  dezelfde waarde als in 88. Conclusie:  $\mathbf{V}$  is een lineaire ruimte

**Voorbeeld 12.**  $\mathbf{V}$  = de verzameling van alle oplossingen van de differentiaalvergelijking  $f''' + 7f' = f$ . Bewijs zelf maar even dat dit een lineaire deelruimte van  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  is. Maak daarbij een verstandige keuze tussen de volgende twee methoden:

Methode 1. Los de differentiaalvergelijking even op. Je ziet dan snel dat de gevonden verzameling van oplossingen gesloten is onder optelling en scalaire vermenigvuldiging, en dat ook de nulfunctie in je oplossingsverzameling zit

Methode 2. Los de differentiaalvergelijking niet op, maar bewijs tóch de drie dingen waar het om draait:

- De som van twee functies uit  $V$  zit weer in  $V$   
Bewijs: Neem aan dat  $f$  en  $g$  in  $V$  zitten, dat wil zeggen dat  $f''' + 7f' = f$  en  $g''' + 7g' = g$ . Dan is  $(f + g)''' + 7(f + g)' = f''' + g''' + 7f' + 7g' = f + g$ , en dus zit ook  $f + g$  in  $V$   $\square$   
(ik heb bij dit bewijsje alleen maar wijsheden gebruikt die iedere student zich nog haarfijn uit Wiskunde 1 herinnert, zoals  $(f + g)' = f' + g'$  en  $(\lambda f)' = \lambda \cdot f'$ )
- Een veelvoud van een functie uit  $V$  zit weer in  $V$  (dat kun je nu hopelijk zelf wel bewijzen)
- De nulfunctie zit in  $V$  (want die voldoet aan de differentiaalvergelijking)

Ik gok dat je methode 2 hebt gekozen, want die differentiaalvergelijking ‘hebben we niet gehad, dus kunnen we niet’. Gelukkig kun je soms inzien dat iets een lineaire ruimte is, zonder dat ‘iets’ precies te kennen

**Voorbeeld 13.**  $V$  = het vlak in  $\mathbb{R}^3$  door de punten  $(-3, 8, -5)$ ,  $(6, -2, 3)$  en  $(9, 4, 1)$ . Ga zelf maar even na dat dit een lineaire deelruimte van  $\mathbb{R}^3$  is, door te verifiëren dat dit toevallig een vlak door de oorsprong is. Hopelijk gebruik je bij dit karweitje geen akelige meetkundige constructies, maar verifieer je simpelweg de afhankelijkheid van deze drie vectoren middels wat poetswerk, of door de berekening

$$\det \begin{pmatrix} -3 & 6 & 9 \\ 8 & -2 & 4 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

**Voorbeeld 14.**  $V$  = het vlak in  $\mathbb{R}^3$  door de punten  $(-3, 8, -5)$ ,  $(6, -2, 3)$  en  $(9, 4, 2)$ . Dit is géén lineaire ruimte, want de nulvector zit er niet in

**Voorbeeld 15.** Is de lijn  $\llbracket(1, 3, 0)\rrbracket$  een lineaire deelruimte van het vlak  $\llbracket(1, 1, 1), (0, 2, -1)\rrbracket$ ? (Antwoord: ja, want met wat rekenwerk kun je laten zien dat de vector  $(1, 3, 0)$  in dit vlak ligt)

**Voorbeeld 16.** De lineaire deelruimten van  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  zijn alle verzamelingen  $V$  van functies met domein  $\mathbb{R}$  die voldoen aan:

$$\begin{cases} V \text{ is gesloten onder optelling en scalaire vermenigvuldiging} \\ \text{de nulfunctie zit in } V \end{cases}$$

**Lineair opspansel.** Als  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$  vectoren uit een lineaire ruimte  $V$  zijn, dan definiëren we:

- Een lineaire combinatie van  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$  is een vector  $\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n$  (waarbij  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  reële getallen zijn)
- Het lineaire opspansel van  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$  (notatie:  $\llbracket\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\rrbracket$ ) is de verzameling van alle lineaire combinaties van  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$

**Voorbeeld 17.** De verzameling van alle veeltermfuncties op  $\mathbb{R}$  van graad  $\leq 30$  is  $\llbracket\vec{p}_0, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_{30}\rrbracket$  waarbij  $\vec{p}_k$  de veeltermfunctie is die gegeven wordt door  $\vec{p}_k(t) = t^k$

**Voorbeeld 18.** De verzameling van alle oplossingen van de differentiaalvergelijking  $f'' + f = 0$  is  $\llbracket\cos, \sin\rrbracket$ . Want de algemene oplossing van  $f''(t) + f(t) = 0$  is  $f(t) = \lambda \cos t + \mu \sin t$  of, anders gezegd,  $f = \lambda \cos + \mu \sin$

**Voorbeeld 19.**  $\llbracket(1, 1, 1, 1, 1, \dots), (1, 2, 3, 4, 5, \dots)\rrbracket$  is de verzameling van alle rijen  $(a_1, a_2, a_3, \dots)$  uit  $\mathbb{R}^{\infty}$  die voldoen aan  $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$  voor alle  $n \geq 1$

**Voorbeeld 20.**  $\llbracket(1, 1, 1, 1, 1, \dots)\rrbracket$  is de lineaire deelruimte van  $\mathbb{R}^{\infty}$  die bestaat uit alle constante rijen

**Voorbeeld 21.** De verzameling van alle functies van het type  $t \mapsto \alpha + \beta t^7 + \gamma \sqrt[3]{t}$  is het opspansel van de functies  $f$ ,  $g$  en  $h$  die gedefinieerd worden door

$$\begin{cases} f(t) = 1 \\ g(t) = t^7 \\ h(t) = \sqrt[3]{t} \end{cases}$$

**Afhankelijk en onafhankelijk.** De vectoren  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$  heten lineair afhankelijk als (minstens) één van hen een lineaire combinatie is van de anderen. Is dat niet het geval, dan heten ze lineair onafhankelijk.

**Voorbeeld 22.** Ga na of in de lineaire ruimte van alle differentieerbare functies op  $\mathbb{R}$  de volgende drie vectoren  $f, g, h$  afhankelijk zijn:

$$\begin{cases} f(t) = 3 \cos t + 5 \sin t \\ g(t) = 7 \sin t - \cos t \\ h(t) = 23 \cos t - 13 \sin t \end{cases}$$

**Oplossing.** We gaan vegen. Laten we maar beginnen met  $g$  als bezem om uit de twee andere functies de ‘cosinus-component’ weg te poetsen. Dat wil zeggen: we vervangen  $f$  door  $f + 3g$ , en we vervangen  $h$  door  $h + 23g$ . Deze poetsbeurt laat het opspansel ongewijzigd, want  $\llbracket f, g, h \rrbracket = \llbracket f + 3g, g, h + 23g \rrbracket$ . Het resultaat is al heel wat overzichtelijker:

$$\begin{array}{l} \boxed{\begin{array}{l} f = 3 \cos + 5 \sin \\ g = -\cos + 7 \sin \\ h = 23 \cos - 13 \sin \end{array}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} f + 3g = 26 \sin \\ g = -\cos + 7 \sin \\ h + 23g = 148 \sin \end{array}}$$

Natuurlijk kun je nog een tijdje doorgaan met vegen, maar voor het oplossen van het probleem is dat niet nodig: je ziet al met het blote oog dat

$$h + 23g = \frac{148}{26}(f + 3g) \quad \text{en dus} \quad h = \frac{74}{13}f - \frac{77}{13}g$$

Overigens kun je, door ijverig verder te gaan met vegen, gemakkelijk ontdekken dat  $\llbracket f, g, h \rrbracket = \llbracket \cos, \sin \rrbracket$ . Men formuleert dit resultaat ook wel als volgt:

$$\begin{cases} \text{het rijtje vectoren } \cos, \sin \text{ is een basis van } \llbracket f, g, h \rrbracket \\ \text{de dimensie van } \llbracket f, g, h \rrbracket \text{ is } 2 \end{cases}$$

Hier volgen de formele definities van deze begrippen ‘basis’ en ‘dimensie’:

**Basis.** We noemen het stel vectoren  $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$  een basis van  $\mathbf{V}$  als geldt:

$$\begin{cases} \mathbf{V} = \llbracket \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n \rrbracket \\ \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n \text{ is onafhankelijk} \end{cases}$$

**Dimensie.** De dimensie van  $\mathbf{V}$  is het aantal vectoren van een basis van  $\mathbf{V}$ . Notatie:  $\dim(\mathbf{V})$ . Als er geen (eindige) basis van  $\mathbf{V}$  bestaat, heet  $\mathbf{V}$  oneindig-dimensionaal (notatie:  $\dim(\mathbf{V}) = \infty$ ).

**Voorbeeld 23.** Zij  $\mathbf{V}$  de lineaire ruimte, bestaande uit alle rijen  $(x_1, x_2, x_3, \dots)$  van reële getallen waarvoor geldt: ieder getal uit de rij is de som van de twee voorgaande getallen.

De rijen  $(1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots)$  en  $(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots)$  vormen dan een basis van  $\mathbf{V}$ , en dus  $\dim(\mathbf{V}) = 2$ .

**Voorbeeld 24.** Zij  $\mathbf{V}$  de lineaire ruimte, bestaande uit alle oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$f'''(t) - 10f''(t) + 31f'(t) - 30f(t) = 0$$

De functies  $t \mapsto e^{2t}$ ,  $t \mapsto e^{3t}$  en  $t \mapsto e^{5t}$  vormen een basis van  $\mathbf{V}$ , en er geldt:  $\dim(\mathbf{V}) = 3$ .

**Voorbeeld 25.** De lineaire ruimte  $\mathbf{V}$  van alle veeltermen in  $x$  is  $\infty$ -dimensionaal, want de onderstelling  $\mathbf{V} = \llbracket \vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n \rrbracket$  leidt tot een tegenspraak (immers, veeltermen van een hogere graad dan  $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n$  zitten wél in  $\mathbf{V}$ , maar niet in  $\llbracket \vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n \rrbracket$ )

**Voorbeeld 26.** Bepaal de dimensie van de lineaire ruimte  $\mathbf{V}$  van alle functies  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die voldoen aan  $f'(t) = f(7)$  voor alle  $t$

**Oplossing.** Uit  $f'(t) = f(7)$  volgt:  $f(t) = f(7) \cdot t + c$  voor een zekere constante  $c$ . Als je hierin  $t = 7$  invult, zie je:  $f(7) = -\frac{1}{6}c$ . Dus  $f(t) = -\frac{1}{6}ct + c$ , dus  $f$  is een veelvoud van de functie  $g$ , gedefinieerd door  $g(t) = -\frac{1}{6}t + 1$ . Blijkbaar is  $\mathbf{V} = \llbracket g \rrbracket$  en dus  $\dim(\mathbf{V}) = 1$

**Inproduct.** Tot nu toe waren de begrippen die we in hoofdstuk 1 voor de  $\mathbb{R}^n$  hadden gedefinieerd, gladjes te generaliseren tot andere lineaire ruimten. Dat ligt heel wat moeilijker bij het begrip ‘inproduct’. In bijvoorbeeld de  $\mathbb{R}^2$  was dat simpel: we definieerden  $\vec{x} \bullet \vec{y}$  als  $x_1y_1 + x_2y_2$ . Zoiets loopt in de soep als  $\vec{x}$  en  $\vec{y}$  gedrochten uit een exotische lineaire ruimte  $\mathbf{V}$  zijn, bijvoorbeeld functies uit de  $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ . Ik definieer daarom niet wat het inproduct in zo’n  $\mathbf{V}$  is, maar zet de eigen fantasie van de studenten aan het werk door hen zelf een definitie te laten bedenken. Wel zal ik nu even duidelijk maken wanneer ik zo’n poging geslaagd zal noemen

Stel de student produceert een formule  $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$  en zegt dat dit het inproduct van  $\vec{x}$  en  $\vec{y}$  is. Ik accepteer dit dan als aan de volgende zes eisen is voldaan:

1. bij ieder tweetal vectoren  $\vec{x}$  en  $\vec{y}$  moet  $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$  een reëel getal zijn
2.  $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \langle \vec{y} | \vec{x} \rangle$
3.  $\langle \vec{x} + \vec{y} | \vec{z} \rangle = \langle \vec{x} | \vec{z} \rangle + \langle \vec{y} | \vec{z} \rangle$
4.  $\langle \lambda \vec{x} | \vec{y} \rangle = \lambda \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$
5.  $\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle \geq 0$
6.  $\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle = 0$  alleen als  $\vec{x} = \vec{0}$

Deze eisen zijn niet al te streng. Meestal zul je er wel in slagen, bij een gegeven lineaire ruimte een inproduct te componeren. Zo kun je bijvoorbeeld in de lineaire ruimte  $\mathbf{V}$  van alle veeltermfuncties op het domein  $[5, 7]$  het volgende inproduct verzinnen:

$$\langle f | g \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_5^7 f(t)g(t) dt$$

(een student komt op zo’n idee als hij zich laat inspireren door de  $\mathbb{R}^n$ , waar het inproduct berekend werd door de overeenkomstige coördinaten van  $\vec{x}$  en  $\vec{y}$  te vermenigvuldigen en de resultaten te sommeren:

$\sum_{k=1}^n x_k y_k$ . Omdat functies  $f$  en  $g$  oneindig veel ‘coördinaten’  $f(t)$  en  $g(t)$  hebben, moet je sommeren vervangen door integreren)

**Voorbeeld 27.** Ook in  $\mathbb{R}^2$  zijn er nu verschillende soorten inproduct mogelijk. De oude definitie  $\vec{x} \bullet \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2$  noemen we in het vervolg het natuurlijke inproduct in  $\mathbb{R}^2$ , maar je kunt ook andere inproducten definiëren, bijvoorbeeld  $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 3x_1y_1 + 7x_2y_2$  (ga maar even na dat ook deze definitie door mij geaccepteerd zou worden)

**Voorbeeld 28.**  $\mathbf{V}$  = de lineaire ruimte van alle continue functies  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  en

$$\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx$$

(ga zelf even na dat dit voldoet aan de eisen voor een inproduct)

**Norm en orthogonaliteit.** Zij  $\mathbf{V}$  een lineaire ruimte, en  $\langle \cdots | \cdots \rangle$  een inproduct in  $\mathbf{V}$ . We definiëren dan:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \|\vec{x}\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle} & (\text{de } \underline{\text{norm}} \text{ van } \vec{x}, \text{ ook wel genoteerd als } |\vec{x}|) \\ \vec{x} \perp \vec{y} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0 & (\vec{x} \text{ en } \vec{y} \text{ zijn } \underline{\text{orthogonaal}}) \end{array}}$$

Onder een orthogonale basis van  $\mathbf{V}$  verstaan we een basis die bestaat uit vectoren die onderling orthogonaal zijn. Hebben ze bovendien allemaal norm 1, dan noemen we het een orthonormale basis. Hier nog wat handige dingetjes die je met een klein beetje veel moeite uit de definitie kunt bewijzen:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \|\vec{x}\| \geq 0 & \|\vec{x}\| = 0 \text{ alleen als } \vec{x} = \vec{0} \\ \|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\| & \\ \|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| & (\text{driehoeksongelijkheid}) \\ |\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| & (\text{ongelijkheid van Schwarz}) \end{array} \right.$$

**Voorbeeld 29.**  $\mathbf{V}$  is de lineaire ruimte van de continue functies  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  met als inproduct

$$\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

Bepaal de norm van de volgende vectoren  $f$  en  $g$ , en onderzoek of ze orthogonaal zijn:  $\begin{cases} f(t) = t + 3 \\ g(t) = e^t \end{cases}$

- $\|f\| = \sqrt{\langle f | f \rangle} = \sqrt{\int_0^1 (f(t))^2 dt} = \sqrt{\int_0^1 (t+3)^2 dt} = \sqrt{\frac{37}{3}}$
- $\|g\| = \sqrt{\langle g | g \rangle} = \sqrt{\int_0^1 (g(t))^2 dt} = \sqrt{\int_0^1 e^{2t} dt} = \sqrt{\frac{e^2 - 1}{2}}$
- $\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt = \int_0^1 (t+3)e^t dt = 3e - 2$ , dus  $f$  en  $g$  zijn niet orthogonaal

**Voorbeeld 30.** Bepaal een orthonormale basis van de lineaire ruimte  $\mathbf{V}$  van alle functies van het type  $x \mapsto \alpha \sin x + \beta \cos x$  met als inproduct

$$\langle f | g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$$

**Oplossing.**  $\mathbf{V} = [\sin, \cos]$ . We pakken eerst zomaar een basis:  $\sin, \cos$ . Eerst even kijken of deze basis

toevallig al orthogonaal is:  $\langle \sin | \cos \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x dx = \left[ \frac{1}{2}(\sin x)^2 \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$

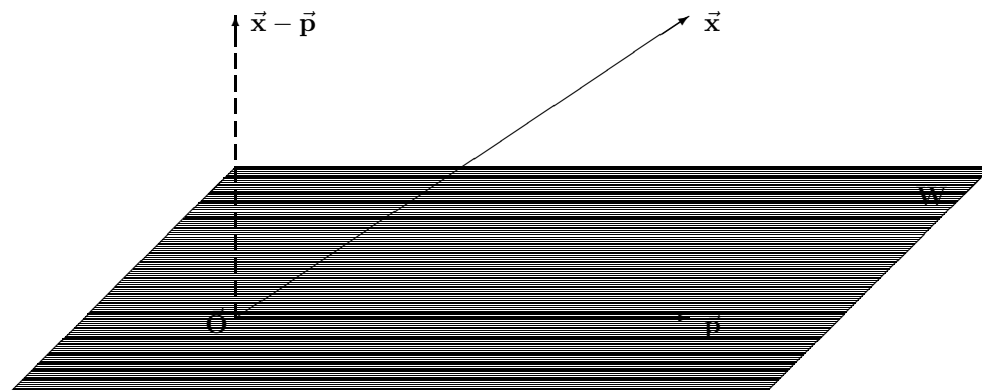
Wat een geluk:  $\sin \perp \cos$ . Nu nog even controleren of ze ook allebei norm 1 hebben:

$$\|\sin\| = \sqrt{\langle \sin | \sin \rangle} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^2 dx} = \sqrt{\pi} \quad \|\cos\| = \sqrt{\langle \cos | \cos \rangle} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (\cos x)^2 dx} = \sqrt{\pi}$$

Wat een botte pech, hun norm is niet 1. Maar daar kunnen we wel iets aan doen: als je een vector deelt door zijn eigen norm, krijg je een vector met norm 1. En zo vinden we toch een orthonormale basis van  $\mathbf{V}$ , namelijk de basis die bestaat uit de functies  $\frac{\sin}{\sqrt{\pi}}$  en  $\frac{\cos}{\sqrt{\pi}}$

$$\text{Of, anders geformuleerd, de basis } f, g \text{ met } \begin{cases} f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x \\ g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x \end{cases}$$

**Projectie.** Zij  $\mathbf{V}$  een lineaire ruimte met inproduct,  $\mathbf{W}$  een lineaire deelruimte van  $\mathbf{V}$ , en  $\vec{x}$  een vector uit  $\mathbf{V}$ . We definiëren dan: de projectie van  $\vec{x}$  op  $\mathbf{W}$   $\stackrel{\text{def}}{=}$  de vector  $\vec{p}$  uit  $\mathbf{W}$  waarvoor  $\vec{x} - \vec{p} \perp \mathbf{W}$  (met  $\dots \perp \mathbf{W}$  bedoelen we natuurlijk:  $\dots \perp$  alle vectoren uit  $\mathbf{W}$ )



Natuurlijk is zo'n plaatje flauwekul: ik teken het net alsof  $\mathbf{W}$  een vlak in de  $\mathbb{R}^3$  is, terwijl het in feite een uit functies of andere griezelige gedachten bestaande verzameling kan zijn. Toch zijn dit soort plaatjes wel handig om al deze abstracte nonsens nog enigszins te kunnen visualiseren teneinde de draad niet te verliezen

### Eigenschappen.

- de projectie van  $\vec{x}$  op  $\vec{y}$  is  $\frac{\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle}{\langle \vec{y} | \vec{y} \rangle} \cdot \vec{y}$
- als  $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$  een orthogonale basis van  $\mathbf{W}$  is, dan geldt: de projectie van  $\vec{x}$  op  $\mathbf{W}$  is de som van de projecties van  $\vec{x}$  op de  $\vec{y}_i$ 's

**Voorbeeld 31.** In de lineaire ruimte van alle continue functies op het domein  $[0, 4]$  definiëren we het volgende inproduct:

$$\langle f | g \rangle = \int_0^4 f(t)g(t) dt$$

Bereken de projectie van de functie  $t \mapsto \sqrt{t}$  op de functie  $t \mapsto t$

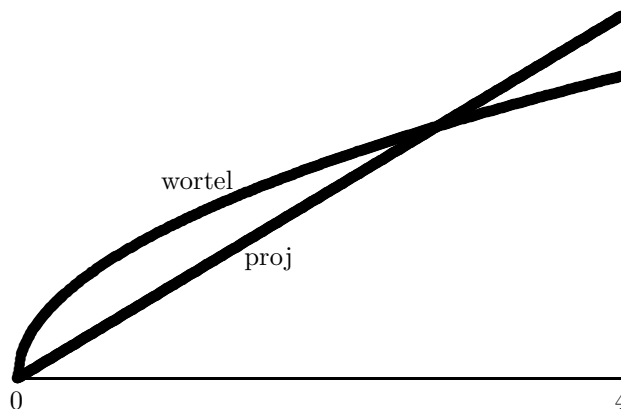
**Oplossing.** Laten we die functies even namen geven, dat praat wat gemakkelijker. De functie  $t \mapsto \sqrt{t}$  noemen we wortel, en de functie  $t \mapsto t$  noemen we id. De berekening van de projectie van wortel op id gaat als volgt:

$$\text{proj} = \frac{\langle \text{wortel} | \text{id} \rangle}{\langle \text{id} | \text{id} \rangle} \cdot \text{id} = \frac{\int_0^4 \text{wortel}(t) \cdot \text{id}(t) dt}{\int_0^4 \text{id}(t) \cdot \text{id}(t) dt} \cdot \text{id} = \frac{\int_0^4 t\sqrt{t} dt}{\int_0^4 t^2 dt} \cdot \text{id} = \frac{\frac{64}{5}}{\frac{64}{3}} \cdot \text{id} = \frac{3}{5} \cdot \text{id}$$

De projectie is dus de functie  $t \mapsto \frac{3}{5}t$

**Opmerking 1.** Misschien vond je het overdreven om die functies aparte namen te geven, en heb je de neiging om de wortelfunctie gewoon  $\sqrt{t}$  te noemen. Dat is een kwestie van smaak, ik raak altijd hopeloos in de war als ik  $f$  dezelfde naam geef als  $f(t)$

**Opmerking 2.** De gevonden functie  $\text{proj}$  is het veelvoud van  $\text{id}$  dat het dichtst bij wortel ligt, als we het afstandsbegrip hanteren dat behoort bij het gegeven inproduct. Preciezer gezegd:  $\|\text{wortel} - \text{proj}\|$  is zo klein mogelijk. De grafieken van wortel en  $\text{proj}$  zullen dus globaal optimaal bij elkaar aansluiten in die zin dat de integraal van de kwadraten van de verschillen minimaal is:



**Voorbeeld 32.** Zij  $\mathbf{V}$  de verzameling van alle differentieerbare functies op  $[-\pi, \pi]$  met als inproduct

$$\langle f | g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) dt$$

Bereken de projectie van de functie  $f(t) = 3t + 7$  op de lineaire deelruimte  $\llbracket \sin, \cos \rrbracket$

**Oplossing.** We hebben in voorbeeld 30 gezien dat  $\sin \perp \cos$ . De gevraagde projectie is dus de som van de volgende twee projecties:

$$(1) \text{ de projectie van } f \text{ op } \sin \text{ is } \frac{\langle f | \sin \rangle}{\langle \sin | \sin \rangle} \cdot \sin = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} (3t + 7) \sin t dt}{\int_{-\pi}^{\pi} (\sin t)^2 dt} \cdot \sin = \frac{6\pi}{\pi} \cdot \sin = 6 \sin$$

$$(2) \text{ de projectie van } f \text{ op } \cos \text{ is } \frac{\langle f | \cos \rangle}{\langle \cos | \cos \rangle} \cdot \cos = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} (3t + 7) \cos t dt}{\int_{-\pi}^{\pi} (\cos t)^2 dt} \cdot \cos = \frac{0}{\pi} \cdot \cos = \vec{0}$$

De projectie van  $f$  op  $\llbracket \sin, \cos \rrbracket$  is dus de functie  $t \mapsto 6 \sin t$



**Voorbeeld 33.** Voor welke veelterm  $p$  van graad  $\leq 2$  is  $\int_{-1}^1 \left( \left| t + \frac{1}{2} \right| - p(t) \right)^2 dt$  minimaal?

**Oplossing.** De aanpak van dit probleem met methoden uit Wiskunde 1 belooft niet veel goeds (probeer er zelf maar eens een paar nachtjes aan te verknoeien). Daarom geven we het probleem een modern jasje:  $\mathbf{V} \stackrel{\text{def}}{=} \text{de lineaire ruimte van alle continue functies op } [-1, 1] \text{ met als inproduct}$

$$\langle f | g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$$

en  $\mathbf{W}$  is de lineaire deelruimte, bestaande uit alle veeltermfuncties op  $[-1, 1]$  van graad  $\leq 2$ . In dit jasje ziet ons probleem er als volgt uit:

Zij  $g \in \mathbf{V}$  de functie  $g(t) = \left| t + \frac{1}{2} \right|$ . Voor welke  $p \in \mathbf{W}$  is  $\|g - p\|^2$  minimaal?

Dit probleem komt neer op het berekenen van een projectie, want je hebt natuurlijk al begrepen dat

$$\|g - p\|^2 \text{ is minimaal} \iff \|g - p\| \text{ is minimaal} \iff p \text{ is de projectie van } g \text{ op } \mathbf{W}$$

Om deze projectie te kunnen berekenen, moeten we eerst een orthogonale basis van  $\mathbf{W}$  gaan bepalen. Dat subkarweitje klaren we door te beginnen met zomaar een basis van  $\mathbf{W}$ . Laten we maar de meest voor de hand liggende keuze doen:  $f_0, f_1, f_2$  waarbij

$$\begin{cases} f_0(t) = 1 \\ f_1(t) = t \\ f_2(t) = t^2 \end{cases} \quad \text{Ze zijn helaas niet orthogonaal, want} \quad \begin{cases} f_0 \perp f_1 & (\text{want } \langle f_0 | f_1 \rangle = 0) \\ f_0 \not\perp f_2 & (\text{want } \langle f_0 | f_2 \rangle = \frac{2}{3}) \\ f_1 \perp f_2 & (\text{want } \langle f_1 | f_2 \rangle = 0) \end{cases}$$

Geen probleem, want via een eenvoudige ingreep kunnen we er een orthogonale basis van maken:

De projectie van  $f_2$  op  $f_0$  is  $\frac{\langle f_2 | f_0 \rangle}{\langle f_0 | f_0 \rangle} \cdot f_0 = \frac{1}{3}f_0$ . Dus is  $f_0, f_1, f_2 - \frac{1}{3}f_0$  een orthogonale basis van  $\mathbf{W}$ .

De gezochte projectie  $p$  van  $g$  op  $\mathbf{W}$  kunnen we nu eenvoudig berekenen:

1) de projectie van  $g$  op  $f_0$  is  $\frac{\langle g | f_0 \rangle}{\langle f_0 | f_0 \rangle} \cdot f_0 = \frac{5}{8}f_0$

2) de projectie van  $g$  op  $f_1$  is  $\frac{\langle g | f_1 \rangle}{\langle f_1 | f_1 \rangle} \cdot f_1 = \frac{11}{16}f_1$

3) de projectie van  $g$  op  $f_2 - \frac{1}{3}f_0$  is  $\frac{\langle g | f_2 - \frac{1}{3}f_0 \rangle}{\langle f_2 - \frac{1}{3}f_0 | f_2 - \frac{1}{3}f_0 \rangle} \cdot (f_2 - \frac{1}{3}f_0) = \frac{135}{256}(f_2 - \frac{1}{3}f_0)$

4) de projectie  $p$  van  $g$  op  $\mathbf{W}$  is dus  $p = \frac{5}{8}f_0 + \frac{11}{16}f_1 + \frac{135}{256}(f_2 - \frac{1}{3}f_0) = \frac{115}{256}f_0 + \frac{11}{16}f_1 + \frac{135}{256}f_2$  of,  
anders gezegd:  $p(t) = \frac{115}{256} + \frac{11}{16}t + \frac{135}{256}t^2$

## Opgaven hoofdstuk 5

**Opgave 1.** Is de lijn in  $\mathbb{R}^2$  door de punten  $(1, 0)$  en  $(0, 3)$  een lineaire ruimte?

**Opgave 2.** Is de verzameling van alle functies  $f$  uit  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  waarvoor  $f(1) = f(7)$  een lineaire ruimte?

**Opgave 3.** Is het vlak met vergelijking  $x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5$  een lineaire deelruimte van  $\mathbb{R}^3$ ?

**Opgave 4.** Onder een *rekenkundige rij* verstaan we een oneindige rij van reële getallen waarbij het verschil tussen twee opeenvolgende termen een constante is. Dat is dus een rij van het type

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d, a + 5d, a + 6d, a + 7d, \dots$$

Zij  $\mathbf{V}$  de verzameling van alle rekenkundige rijen

- a) Is  $\mathbf{V}$  een lineaire deelruimte van  $\mathbb{R}^{\infty}$ ?
- b) Kun je  $\mathbf{V}$  schrijven als een opspansel?
- c) Wat is de dimensie van  $\mathbf{V}$ ?

**Opgave 5.** Onder een *meetkundige rij* verstaan we een oneindige rij van reële getallen waarbij elke volgende term uit zijn voorganger berekend kan worden door met een constante factor te vermenigvuldigen. Dat is dus een rij van het type

$$a, ap, ap^2, ap^3, ap^4, ap^5, ap^6, ap^7, \dots$$

Is de verzameling van alle meetkundige rijen een lineaire deelruimte van  $\mathbb{R}^{\infty}$ ? Zo ja, wat is zijn dimensie?

**Opgave 6.** Zij  $\mathbf{V}$  de verzameling van alle functies  $f$  uit  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  die een functievoorschrift hebben van het type

$$f(t) = \frac{\alpha + \beta t}{1 + t^2}$$

- a) Is  $\mathbf{V}$  een lineaire ruimte?
- b) Zo ja, zoek dan een basis van  $\mathbf{V}$

**Opgave 7.** In  $\mathbb{P}_2$  definiëren we  $f, g$  en  $h$  door 
$$\begin{cases} f(t) = 3 + t - 2t^2 \\ g(t) = 7 - 3t^2 \\ h(t) = 1 - 2t + t^2 \end{cases}$$

- a) Ga na of  $f, g, h$  een onafhankelijk stel vectoren is
- b) Zoek een basis van  $\llbracket f, g, h \rrbracket$

**Opgave 8.** Zoek een basis van de lineaire deelruimte van  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  die bestaat uit alle oplossingen van de differentiaalvergelijking  $f''(t) + f(t) = 0$

**Opgave 9.** Bereken de dimensie van de lineaire ruimte die bestaat uit alle functies  $f \in \mathbb{P}_4$  die voldoen aan  $f(0) = f(1) = 0$

**Opgave 10.**  $\mathbb{TP}_1$  is, zoals je weet, de lineaire ruimte van alle functies van het type

$$f(t) = \alpha + \beta \cos t + \gamma \sin t$$

We definiëren in  $\mathbb{TP}_1$  een inproduct door

$$\langle f | g \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt$$

- a) Bepaal een basis van  $\mathbb{TP}_1$
- b) Bepaal een orthogonale basis van  $\mathbb{TP}_1$
- c) Bepaal een orthonormale basis van  $\mathbb{TP}_1$

**Opgave 11.** We definiëren in  $\mathbb{R}^2$  een inproduct door

$$\langle (a_1, a_2) | (b_1, b_2) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} 3a_1b_1 + 2a_2b_2$$

Bepaal de afstand van de oorsprong tot de lijn met vergelijking  $2x_1 - x_2 = 5$   
(met ‘afstand’ bedoel ik hier: de bij het gegeven inproduct behorende afstand)

**Opgave 12.** Bepaal een basis van de lineaire ruimte van alle  $f \in \mathbb{TP}_1$  die voldoen aan  $f'(0) = f(0)$

**Opgave 13.** In de lineaire ruimte  $\mathbb{P}_2$  definiëren we een inproduct door

$$\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

Bepaal de projectie van de functie  $t \mapsto (5 + 4t + 3t^2)$  op de functie  $t \mapsto 1$

**Opgave 14.** Bepaal een basis van de lineaire ruimte van alle veeltermfuncties  $f$  van graad  $\leq 4$  die voldoen aan

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = f(-1) \end{cases}$$

**Opgave 15.** Bepaal de projectie van de functie  $t \mapsto \sin \pi t$  op de functie  $t \mapsto t$  in de lineaire ruimte van alle continue functies op het domein  $[0, 1]$  met als inproduct

$$\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

**Opgave 16.** Bepaal een orthogonale basis van  $\mathbb{R}_2$  ten opzichte van het inproduct

$$\langle (a_1, a_2) | (b_1, b_2) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} 2a_1b_1 + 3a_2b_2$$

## Zelfstudiepakketje bij hoofdstuk 5

**Opgave 1.** Is het vlak in  $\mathbb{R}^3$  door de punten  $(1, 0, 1)$ ,  $(0, 3, 2)$  en  $(2, 1, 1)$  een lineaire ruimte?

**Opgave 2.** Als  $a_0, \dots, a_n$  reële getallen zijn met  $a_n \neq 0$ , dan heet de uitdrukking  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  een veelterm in  $x$  van graad  $n$

- a) Is de verzameling van alle veeltermen in  $x$  van graad 73 een lineaire ruimte?
- b) Is de verzameling van alle veeltermen in  $x$  een lineaire ruimte?

**Opgave 3.** Zij  $\mathbf{V}$  de verzameling van alle functies  $f$  uit  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  waarvoor  $f(5) = 7$ . Is  $\mathbf{V}$  een lineaire ruimte?

**Opgave 4.** Zij  $\mathbf{V}$  de verzameling van alle differentieerbare functies  $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  die voldoen aan  $f'(3) = f(7)$ . Is  $\mathbf{V}$  een lineaire ruimte?

**Opgave 5.** Zoek vijf lineaire deelruimten van het vlak met vergelijking  $x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0$

**Opgave 6.** Ga na welke van de volgende beweringen noodzakelijk juist zijn voor ieder drietal vectoren  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  uit een lineaire ruimte  $\mathbf{V}$ :

- a) Als  $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = [\vec{x}, \vec{y}]$ , dan is  $\vec{z}$  een lineaire combinatie van  $\vec{x}$  en  $\vec{y}$
- b) Als  $\vec{x}$  een lineaire combinatie is van  $\vec{y}$  en  $\vec{z}$ , dan is  $\vec{y}$  een lineaire combinatie van  $\vec{x}$  en  $\vec{z}$
- c) Als  $\vec{z} \in [\vec{x}]$  en  $\vec{z} \in [\vec{y}]$ , dan  $[\vec{x}] = [\vec{y}]$

**Opgave 7.** In  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  definiëren we vectoren  $f$ ,  $g$  en  $h$  door 
$$\begin{cases} f(t) = 2 - 3t + \cos t \\ g(t) = 6 + t + 3 \cos t \\ h(t) = 4 - 5t + 2 \cos t \end{cases}$$

- a) Ga na of  $f$ ,  $g$ ,  $h$  een onafhankelijk stel vectoren is
- b) Zoek een zo klein mogelijk stel zo eenvoudig mogelijke vectoren, dat  $[f, g, h]$  opspant

**Opgave 8.** Zoek een basis van de lineaire deelruimte van  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  die bestaat uit alle oplossingen van de differentiaalvergelijking  $f'' = 9f$

**Opgave 9.** Zoek een basis van de lineaire ruimte van alle functies  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die voor alle  $t \in \mathbb{R}$  voldoen aan  $f'''(t) = f(1)$

**Opgave 10.** Bereken de dimensie van de lineaire ruimte van alle veeltermen in  $x$  van graad  $\leq 5$

**Opgave 11.** Bereken, in de lineaire ruimte van alle continue functies op  $[0, \pi]$  met als inproduct

$$\langle f | g \rangle = \int_0^\pi f(x)g(x) dx$$

- a)  $\langle \sin | \cos \rangle$
- b)  $\| \sin \|^2$
- c)  $\| \cos \|^2$

**Opgave 12.** Bewijs dat voor alle continue functies  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  geldt:

$$\int_0^1 f(x) dx \leq \sqrt{\int_0^1 (f(x))^2 dx}$$

**Opgave 13.** We beschouwen in  $\mathbb{R}^2$  het inproduct, gedefinieerd door  $\langle (x_1, x_2) | (y_1, y_2) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} 3x_1y_1 + x_2y_2$

a) Bereken (ten opzichte van dit inproduct) de hoek tussen  $(0, 1)$  en  $(1, 1)$

Zoals je je nog uit Wiskunde 1 herinnert, is deze hoek de arccosinus van  $\frac{\langle (0,1) | (1,1) \rangle}{\|(0,1)\| \cdot \|(1,1)\|}$

b) Zoek een vector die (ten opzichte van dit inproduct) loodrecht staat op  $(1, 1)$

**Opgave 14.** Bewijs de Stelling van Pythagoras:

In een lineaire ruimte met inproduct geldt: als  $\vec{x} \perp \vec{y}$ , dan  $\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 = \|\vec{y} - \vec{x}\|^2$

**Opgave 15.** We beschouwen de ruimte van alle continue functies  $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  met als inproduct

$$\langle f | g \rangle = \int_1^2 f(x)g(x) dx$$

Bereken de projectie van  $x \mapsto \ln x$  op de deelruimte die bestaat uit alle functies waarvan de grafiek een rechte lijn is

**Opgave 16.** Zij  $\mathbf{V}$  de ruimte van alle oplossingen van de differentiaalvergelijking  $f''(t) + 9f(t) = 0$  (zoals je hopelijk nog weet zijn dit de functies van het type  $f(t) = \lambda \cos 3t + \mu \sin 3t$ ). We definiëren een inproduct in  $\mathbf{V}$  door

$$\langle f | g \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt$$

a) Bepaal een basis van  $\mathbf{V}$

b) Bepaal een orthogonale basis van  $\mathbf{V}$

c) Bepaal een orthonormale basis van  $\mathbf{V}$

**Opgave 17.** We definiëren in  $\mathbb{R}^2$  een inproduct door  $\langle (a_1, a_2) | (b_1, b_2) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} a_1b_1 + 3a_2b_2$ . Bepaal (ten opzichte van dit inproduct) de afstand van het punt  $(1, 0)$  tot de lijn  $\llbracket (3, 1) \rrbracket$

**Opgave 18.** Bepaal een basis van de lineaire ruimte van alle veeltermfuncties  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  van graad  $\leq 3$ , die voldoen aan  $f'(1) = f(2)$ . Wat is de dimensie van deze lineaire ruimte?

**Opgave 19.** Zij  $V$  de lineaire ruimte van alle functies  $f$  met domein  $[0, \infty)$  van het type  $f(t) = a + bt^2$ . In  $V$  definiëren we een inproduct door

$$\langle f | g \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty f(t)g(t)e^{-t} dt$$

Bepaal een orthogonale basis van  $V$

**Opgave 20.** Zij  $V$  de lineaire ruimte van alle veeltermfuncties van graad  $\leq 3$ , en zij  $W$  de lineaire deelruimte, bestaande uit alle  $f \in V$  waarvoor  $f(1) = f(-1) = 0$ . In  $V$  definiëren we een inproduct door

$$\langle f | g \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$$

a) Bepaal een basis van  $W$

b) Zij  $\vec{E}$  de functie  $t \mapsto 1$ . Bepaal de projectie van  $\vec{E}$  op  $W$

**Opgave 21.** Zij  $V$  de verzameling van alle veeltermfuncties  $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  van graad  $\leq 5$  die voldoen aan

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin t \, dt = 0$$

- a) Bewijs dat  $V$  een lineaire ruimte is
- b) Bepaal de dimensie van  $V$

**Opgave 22.** Zij  $V$  de lineaire ruimte van alle functies  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  van het type  $f(t) = \lambda + \mu\sqrt{t}$

- a) Bepaal een basis van  $V$
- b) Bepaal een orthonormale basis van  $V$  ten opzichte van het inproduct  $\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) \, dt$

**Opgave 23.** Zoek een basis van de lineaire ruimte van alle veeltermfuncties  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  van graad  $\leq 2$  die voldoen aan

$$\int_0^1 t f(t) \, dt = 0$$

**Opgave 24.** Zij  $V$  de lineaire ruimte die bestaat uit alle functies  $f$  van het type  $f(t) = \lambda \cos t + \mu \sin t$ . Anders gezegd:  $V = \llbracket \cos, \sin \rrbracket$ . We definiëren in  $V$  een inproduct door

$$\langle f | g \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(t)g(t) \, dt$$

Bepaal een ten opzichte van dit inproduct orthogonale basis van  $V$

**Opgave 25.** De lineaire ruimte  $\mathbb{P}_2$  bestaat uit alle veeltermfuncties van graad  $\leq 2$ . We definiëren een inproduct in  $\mathbb{P}_2$  door

$$\langle f | g \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 f(t)g(t) \, dt$$

Zij  $V$  de lineaire deelruimte die bestaat uit alle  $f \in \mathbb{P}_2$  die voldoen aan  $f''(5) = f(1) = 0$

- a) Bereken de norm van de functie  $t \mapsto 1 + 3t$
- b) Bepaal de dimensie van  $V$
- c) Bereken de projectie van de functie  $t \mapsto t^2$  op  $V$

## Oplossingen

**Opgave 1.** Nee, dit vlak gaat niet door de oorsprong en is dus geen lineaire ruimte

**Opgave 2.**

- a) Nee, want deze verzameling is niet gesloten onder optelling: de veeltermen  $2 + x^2 - 3x^{17} + 5x^{73}$  en  $6x - x^7 - 5x^{73}$  hebben allebei graad 73, maar hun som niet
- b) Ja, want deze verzameling is gesloten onder optelling en scalaire vermenigvuldiging, en ook 0 is een veelterm in  $x$

**Opgave 3.** Nee, want de nulfunctie voldoet niet aan de eis  $f(5) = 7$  en zit dus niet in  $\mathbf{V}$

**Opgave 4.** Ja, want

- $\mathbf{V}$  is gesloten onder optelling, want als  $f$  en  $g$  twee functies uit  $\mathbf{V}$  zijn, dan geldt:

$$\left. \begin{array}{l} f'(3) = f(7) \\ g'(3) = g(7) \end{array} \right\} \text{ dus } (f+g)'(3) = f'(3) + g'(3) = f(7) + g(7) = (f+g)(7), \text{ oftewel } f+g \in \mathbf{V}$$

- $\mathbf{V}$  is gesloten onder scalaire vermenigvuldiging, want als  $f \in \mathbf{V}$ , dan  $f'(3) = f(7)$ , dus  $(\lambda f)'(3) = \lambda \cdot f'(3) = \lambda \cdot f(7) = (\lambda f)(7)$  en dus  $\lambda f \in \mathbf{V}$
- De nulfunctie zit in  $\mathbf{V}$ , want die voldoet aan  $f'(3) = f(7)$

**Opgave 5.** Neem bijvoorbeeld vijf verschillende lijnen door de oorsprong, die in dit vlak liggen. Of, als je wat meer variatie in je oplossingen wilt aanbrengen:

- (1) de nulruimte  $\{\vec{0}\}$
- (2) de lijn  $\llbracket(3, -1, 0)\rrbracket$
- (3) de lijn  $\llbracket(0, 2, 3)\rrbracket$
- (4) de lijn  $\llbracket(2, 0, 1)\rrbracket$
- (5) het vlak met vergelijking  $x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0$

**Opgave 6.** a) Waar

- b) Dit is niet altijd waar. Een tegenvoorbeeld in de lineaire ruimte  $\mathbb{R}^2$  is: 
$$\begin{cases} \vec{x} = (0, 0) \\ \vec{y} = (7, 2) \\ \vec{z} = (-3, \pi) \end{cases}$$

- c) Ook dit is niet noodzakelijk waar. Tegenvoorbeeld: 
$$\begin{cases} \vec{x} = (2, 7) \\ \vec{y} = (7, 2) \\ \vec{z} = (0, 0) \end{cases}$$

**Opgave 7.** We vegen er op los. Eerst maar eens  $f$  als bezem nemen:  $\llbracket f, g, h \rrbracket = \llbracket f, g - 3f, h - 2f \rrbracket$ .

Dit is dus het opspansel van de functies  $\begin{cases} t \mapsto 2 - 3t + \cos t \\ t \mapsto 10t \\ t \mapsto t \end{cases}$

Door nu de derde functie als bezem te nemen (en vervolgens de nulfunctie weg te laten) herleid je dit tot het opspansel van  $\begin{cases} t \mapsto 2 + \cos t \\ t \mapsto t \end{cases}$

Dit is dus het antwoord op vraag (b). Onderweg hebben we ook vraag (a) beantwoord: het stel vectoren  $f, g, h$  is afhankelijk

**Opgave 8.** De oplossingen zijn de functies  $f(t) = Ae^{3t} + Be^{-3t}$ , dat zijn dus alle lineaire combinaties van de twee functies  $t \mapsto e^{3t}$  en  $t \mapsto e^{-3t}$ . Deze twee functies vormen dus een basis voor de verzameling van alle oplossingen

**Opgave 9.** Je moet eerst even uitvissen welke functies  $f$  voldoen aan  $f'''(t) = f(1)$ . Je hoeft daarbij alleen te vissen in de vijver met veeltermen van graad 3 of lager, want dat zijn de enige functies waarvan de derde afgeleide een constante is. Werp je hengeltje maar uit:

Stel  $f(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \delta t^3$ . Dan  $f'''(t) = 6\delta$  en  $f(1) = \alpha + \beta + \gamma + \delta$

Dus  $f'''(t) = f(1) \iff 6\delta = \alpha + \beta + \gamma + \delta \iff \alpha = 5\delta - \beta - \gamma$

$\iff f(t) = 5\delta - \beta - \gamma + \beta t + \gamma t^2 + \delta t^3 = \beta(t - 1) + \gamma(t^2 - 1) + \delta(t^3 + 5)$

Het zijn dus precies alle lineaire combinaties van de drie functies  $\begin{cases} t \mapsto t - 1 \\ t \mapsto t^2 - 1 \\ t \mapsto t^3 + 5 \end{cases}$  en deze drie functies vormen dan ook een basis

**Opgave 10.** Deze lineaire ruimte  $\mathbb{P}_5$  is het opspansel van de zes veeltermen  $1, x, x^2, x^3, x^4$  en  $x^5$ . De dimensie is dus 6

**Opgave 11.**

a)  $\langle \sin \mid \cos \rangle = \int_0^\pi \sin x \cos x \, dx = 0$

b)  $\| \sin \| = \sqrt{\langle \sin \mid \sin \rangle} = \sqrt{\int_0^\pi (\sin x)^2 \, dx} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

c)  $\| \cos \| = \sqrt{\langle \cos \mid \cos \rangle} = \sqrt{\int_0^\pi (\cos x)^2 \, dx} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

**Opgave 12.** Het is niet slim, urenlang op deze opgave te ploeteren met methoden uit Wiskunde 1. Veel sneller gaat het in de context van de lineaire ruimte van alle continue functies op  $[0, 1]$  met als inproduct

$$\langle f \mid g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) \, dx:$$

Uit de ongelijkheid van Schwarz, toegepast op de functies  $f$  en  $t \mapsto 1$ , volgt  $\int_0^1 f(x) \, dx \leq \sqrt{\int_0^1 (f(x))^2 \, dx}$



**Opgave 13.**

- a) De hoek tussen  $(0, 1)$  en  $(1, 1)$  is  $\arccos \frac{\langle (0, 1) | (1, 1) \rangle}{\|(0, 1)\| \cdot \|(1, 1)\|} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{4}} = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$
- b)  $(-1, \alpha) \perp (1, 1) \iff \langle (-1, \alpha) | (1, 1) \rangle = 0 \iff \alpha = 3$ . Zo vind je de vector  $(-1, 3)$

**Opgave 14.** Dat lukt door er maar wat eigenschappen van inproduct op los te laten:  $\vec{x} \perp \vec{y}$  betekent  $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0$  en dus:

$$\begin{aligned} \|\vec{y} - \vec{x}\|^2 &= \langle \vec{y} - \vec{x} | \vec{y} - \vec{x} \rangle = \langle \vec{y} | \vec{y} - \vec{x} \rangle - \langle \vec{x} | \vec{y} - \vec{x} \rangle \\ &= \langle \vec{y} | \vec{y} \rangle - \langle \vec{y} | \vec{x} \rangle - \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle + \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle = \langle \vec{y} | \vec{y} \rangle + \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle = \|\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}\|^2 \end{aligned}$$

Wees even zo lief om zelf middels een tekeningetje te verifiëren dat deze stelling in het speciale geval  $\mathbb{R}^2$  (met het natuurlijke inproduct) precies de oude Stelling van Pythagoras is, waar je in je jeugd het bewijs ook al niet van begreep

**Opgave 15.** Gevraagd wordt de projectie van  $\ln$  op  $\mathbb{P}_1$ . Hiervoor moet je de volgende berekeningen uitvoeren:

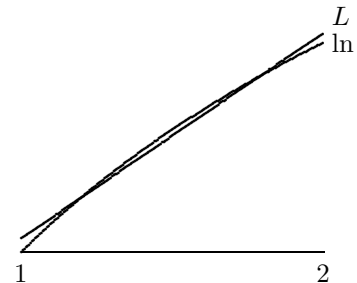
- (1) Zoek een orthogonale basis van  $\mathbb{P}_1$ . Je probeert eerst de functies  $t \mapsto 1$  en  $t \mapsto t$ , maar deze zijn helaas niet orthogonaal: hun inproduct blijkt  $\frac{3}{2}$  te zijn. Wel kun je eerst even  $t \mapsto t$  projecteren op  $t \mapsto 1$  (resultaat:  $t \mapsto \frac{3}{2}$ ) waarna je inziet dat  $t \mapsto t - \frac{3}{2}$  en  $t \mapsto 1$  loodrecht op elkaar staan
- (2) De projectie van  $\ln$  op  $t \mapsto t - \frac{3}{2}$  is (na enig rekenwerk) de functie  $t \mapsto (9 - 12 \ln 2)(t - \frac{3}{2})$
- (3) En de projectie van  $\ln$  op  $t \mapsto 1$  blijkt de functie  $t \mapsto 2 \ln 2 - 1$  te zijn
- (4) De gezochte lijn is de som van deze twee projecties, en dat is de functie  $t \mapsto (9 - 12 \ln 2)t - \frac{29}{2} + 20 \ln 2$

**Opmerking.** Het resultaat van deze opgave kun je interpreteren als:

$L(t) = (9 - 12 \ln 2)t - \frac{29}{2} + 20 \ln 2$  is de lijn  $L$  die op  $[1, 2]$

het beste aansluit bij  $\ln$ .

Dat had je natuurlijk ook wel ongeveer verwacht:



**Opgave 16.**

- a) Een basis van  $\mathbf{V}$  wordt gevormd door de functies  $t \mapsto \cos 3t$  en  $t \mapsto \sin 3t$ . We zullen deze functies  $\vec{c}_3$  en  $\vec{s}_3$  noemen, dat praat wat makkelijker
- b)  $\langle \vec{c}_3 | \vec{s}_3 \rangle = \int_0^{2\pi} \cos 3t \sin 3t dt = \left[ \frac{1}{6} (\sin 3t)^2 \right]_0^{2\pi} = 0$ , dus  $\vec{c}_3, \vec{s}_3$  is een orthogonale basis van  $\mathbf{V}$
- c) We gaan nu deze basis normeren. Eerst even de lengte van  $\vec{c}_3$  en  $\vec{s}_3$  uitrekenen:

$$\begin{aligned} \|\vec{c}_3\| &= \sqrt{\langle \vec{c}_3 | \vec{c}_3 \rangle} = \sqrt{\int_0^{2\pi} (\cos 3t)^2 dt} = \sqrt{\int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 6t \right) dt} = \sqrt{\left[ \frac{1}{2}t + \frac{1}{12} \sin 6t \right]_0^{2\pi}} = \sqrt{\pi} \\ \|\vec{s}_3\| &= \sqrt{\langle \vec{s}_3 | \vec{s}_3 \rangle} = \sqrt{\int_0^{2\pi} (\sin 3t)^2 dt} = \sqrt{\int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 6t \right) dt} = \sqrt{\left[ \frac{1}{2}t - \frac{1}{12} \sin 6t \right]_0^{2\pi}} = \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

De genormeerde basis die we zo vinden is  $\frac{\vec{c}_3}{\sqrt{\pi}}, \frac{\vec{s}_3}{\sqrt{\pi}}$ .

Anders gezegd: de functies  $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 3t$  en  $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 3t$  vormen een orthonormale basis van  $\mathbf{V}$

**Opgave 17.** De projectie van  $(1, 0)$  op  $(3, 1)$  is  $\vec{p} = \frac{\langle (1, 0) | (3, 1) \rangle}{\langle (3, 1) | (3, 1) \rangle} \cdot (3, 1) = \frac{3}{12} \cdot (3, 1) = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$ ,

dus de gevraagde afstand is  $\|(1, 0) - \vec{p}\| = \left\| \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right) \right\| = \sqrt{\left\langle \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right) \mid \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right) \right\rangle} = \frac{1}{2}$

**Opgave 18.** Een veeltermfunctie van graad  $\leq 3$  is een functie van het type  $f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3$ . Als je hierin het gegeven  $f'(1) = f(2)$  invult krijg je  $\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = \alpha_0 + 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 8\alpha_3$ , oftewel  $\alpha_0 = -\alpha_1 - 2\alpha_2 - 5\alpha_3$ , dus  $f(t) = (-\alpha_1 - 2\alpha_2 - 5\alpha_3) + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 = \alpha_1(t-1) + \alpha_2(t^2-2) + \alpha_3(t^3-5)$ .

Blijkbaar bestaat die lineaire ruimte uit alle lineaire combinaties van de drie functies  $\begin{cases} t \mapsto t-1 \\ t \mapsto t^2-2 \\ t \mapsto t^3-5 \end{cases}$   
Deze functies vormen een basis. Het zijn er welgeteld drie, dus de dimensie is 3

**Opgave 19.** Zij  $e_1(t) = 1$  en  $e_2(t) = t^2$ . Dan is  $e_1, e_2$  een basis van  $V$ . Een orthogonale basis  $f_1, f_2$  kun je bijvoorbeeld als volgt construeren: kies  $f_1 = e_1$  en  $f_2 = e_2 - p$  waarbij  $p$  de projectie van  $e_2$  op  $e_1$  is. De berekening van  $p$  gaat als volgt:

$$p = \frac{\langle e_1 | e_2 \rangle}{\langle e_1 | e_1 \rangle} \cdot e_1 = \frac{\int_0^\infty t^2 e^{-t} dt}{\int_0^\infty e^{-t} dt} \cdot e_1 = \frac{2}{1} \cdot e_1 = 2e_1$$

De gevonden orthogonale basis is dus  $f_1, f_2$  waarbij  $\begin{cases} f_1(t) = 1 \\ f_2(t) = t^2 - 2 \end{cases}$

**Opgave 20.**

a) Zij  $f(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \delta t^3$ . Dan geldt:  $f \in W \iff \alpha + \beta + \gamma + \delta = \alpha - \beta + \gamma - \delta = 0$   
 $\iff \alpha + \gamma = \beta + \delta = 0 \iff f(t) = \alpha(1 - t^2) + \gamma(t - t^3)$ .

De functies  $\begin{cases} e_1(t) = 1 - t^2 \\ e_2(t) = t - t^3 \end{cases}$  vormen dus een basis van  $W$

b) Ik heb geluk:  $e_1 \perp e_2$ , dus kan ik de gevraagde projectie als volgt berekenen:

$$\text{de projectie van } \vec{E} \text{ op } e_1 \text{ is } \frac{\langle \vec{E} | e_1 \rangle}{\langle e_1 | e_1 \rangle} \cdot e_1 = \frac{4/3}{16/15} \cdot e_1 = \frac{5}{4} \cdot e_1$$

$$\text{dit is de functie } t \mapsto \frac{5}{4} - \frac{5}{4}t^2$$

$$\text{de projectie van } \vec{E} \text{ op } e_2 \text{ is } \frac{\langle \vec{E} | e_2 \rangle}{\langle e_2 | e_2 \rangle} \cdot e_2 = 0 \cdot e_2$$

dit is de nulfunctie

De projectie van  $\vec{E}$  op  $W$  is dus de functie  $t \mapsto \frac{5}{4} - \frac{5}{4}t^2$

### Opgave 21.

a)  $V$  is een deelverzameling van de lineaire ruimte van alle veeltermfuncties van graad  $\leq 5$ . We kunnen dus volstaan met de volgende drie bewijsjes:

(1) Zij  $f \in V$  en  $g \in V$ . Dan is ook  $f + g \in V$ , want

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f + g)(t) \sin t \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin t \, dt + \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin t \, dt = 0 + 0 = 0$$

(2) Zij  $f \in V$  en  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dan ook  $\lambda f \in V$ , want  $\int_{-\pi}^{\pi} \lambda f(t) \sin t \, dt = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin t \, dt = \lambda \cdot 0 = 0$

(3) De nulfunctie zit in  $V$ , want  $\int_{-\pi}^{\pi} 0 \sin t \, dt = 0$

b) Het is niet moeilijk, te raden dat  $\dim(V) = 5$ . Immers, de lineaire ruimte van alle veeltermen van graad  $\leq 5$  heeft dimensie 6, en de eis  $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin t \, dt = 0$  kost één vrijheidsgraad. Een exact bewijs is aanzienlijk moeilijker. We zullen een basis van  $V$  construeren. Allereerst berekenen we even

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \, dt &= 0 & \int_{-\pi}^{\pi} t \sin t \, dt &= 2\pi \\ \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \sin t \, dt &= 0 & \int_{-\pi}^{\pi} t^3 \sin t \, dt &= 2\pi^3 - 12\pi \\ \int_{-\pi}^{\pi} t^4 \sin t \, dt &= 0 & \int_{-\pi}^{\pi} t^5 \sin t \, dt &= 2\pi^5 - 40\pi^3 + 240\pi \end{aligned}$$

Zij nu  $f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \alpha_4 t^4 + \alpha_5 t^5$ . Dan  $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin t \, dt = \alpha_1 \cdot 2\pi + \alpha_3(2\pi^3 - 12\pi) + \alpha_5(2\pi^5 - 40\pi^3 + 240\pi)$ , dus

$$\begin{aligned} f \in V &\Leftrightarrow \alpha_1 = -\alpha_3(\pi^2 - 6) - \alpha_5(\pi^4 - 20\pi^2 + 120) \\ &\Leftrightarrow f(t) = \alpha_0 + (-\alpha_3(\pi^2 - 6) - \alpha_5(\pi^4 - 20\pi^2 + 120))t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \alpha_4 t^4 + \alpha_5 t^5 \\ &\Leftrightarrow f(t) = \alpha_0 + \alpha_2 t^2 + \alpha_3(t^3 - (\pi^2 - 6)t) + \alpha_4 t^4 + \alpha_5(t^5 - (\pi^4 - 20\pi^2 + 120)t) \end{aligned}$$

Een basis van  $V$  is dus  $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$  waarbij

$$\begin{cases} e_1(t) = 1 \\ e_2(t) = t^2 \\ e_3(t) = t^3 - (\pi^2 - 6)t \\ e_4(t) = t^4 \\ e_5(t) = t^5 - (\pi^4 - 20\pi^2 + 120)t \end{cases}$$

### Opgave 22.

a) Definieer  $e_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} 1$  en  $e_2(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{t}$ . Dan is  $e_1, e_2$  een basis van  $V$

b) De projectie van  $e_2$  op  $e_1$  is  $\frac{\langle e_2 | e_1 \rangle}{\langle e_1 | e_1 \rangle} \cdot e_1 = \frac{2}{3} e_1$ . Dus  $e_2 - \frac{2}{3} e_1 \perp e_1$ .

De functies  $f_1, f_2$ , gedefinieerd door  $f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$  en  $f_2 = \frac{e_2 - \frac{2}{3}e_1}{\|e_2 - \frac{2}{3}e_1\|}$  vormen dus een orthonormale basis van  $V$ . Na enig rekenwerk vind je

$$\begin{cases} f_1(t) = 1 \\ f_2(t) = 3\sqrt{2t} - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

**Opgave 23.** Zij  $f$  de veeltermfunctie  $t \mapsto \alpha + \beta t + \gamma t^2$ . Dan

$$\begin{aligned} \int_0^1 t f(t) dt = 0 &\iff \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3} + \frac{\gamma}{4} = 0 \iff \alpha = -\frac{2}{3}\beta - \frac{1}{2}\gamma \\ &\iff f(t) = -\frac{2}{3}\beta - \frac{1}{2}\gamma + \beta t + \gamma t^2 = \beta \left(t - \frac{2}{3}\right) + \gamma \left(t^2 - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

We vinden zo als basis de twee functies  $t \mapsto t - \frac{2}{3}$  en  $t \mapsto t^2 - \frac{1}{2}$

**Opgave 24.** De projectie van  $\sin$  op  $\cos$  is

$$\text{proj} = \frac{\langle \sin | \cos \rangle}{\langle \cos | \cos \rangle} \cdot \cos = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}} \cdot \cos = \frac{3}{2\pi + 3\sqrt{3}} \cdot \cos$$

Een orthogonale basis is dus  $\cos$ ,  $\sin - \text{proj}$ . Anders gezegd:  $\vec{p}, \vec{q}$  met 
$$\begin{cases} \vec{p}(t) = \cos t \\ \vec{q}(t) = \sin t - \frac{3 \cos t}{2\pi + 3\sqrt{3}} \end{cases}$$

**Opgave 25.**

a) Noem de functie  $t \mapsto 1 + 3t$  even  $f$ . De berekening van de norm van  $f$  gaat als volgt:

$$\|f\| = \sqrt{\langle f | f \rangle} = \sqrt{\int_0^1 (1 + 3t)^2 dt} = \sqrt{7}$$

b)  $V$  bestaat uit de functies  $t \mapsto \alpha + \beta t + \gamma t^2$  die voldoen aan  $f''(5) = f(1) = 0$ , hetgeen na invulling leidt tot  $\gamma = 0$  en  $\alpha + \beta + \gamma = 0$ . Dit zijn dus de functies  $t \mapsto \alpha - \alpha t$ , wat neerkomt op alle veelvoudigen van de functie  $g(t) = 1 - t$ . Deze functie  $g$  is dus een basis van  $V$ , en de dimensie van  $V$  is 1

c) De projectie van  $h(t) = t^2$  op  $V$  is de projectie van  $h$  op de in (b) gevonden functie  $g$ . Deze is

$$\frac{\langle h | g \rangle}{\langle g | g \rangle} \cdot g = \frac{\frac{1}{12}}{-\frac{2}{3}} \cdot g = -\frac{1}{8}g$$

Dit is dus de functie  $t \mapsto \frac{t-1}{8}$