

6. Lineaire operatoren

Dit hoofdstukje is een generalisatie van hoofdstuk 2. De meeste dingen die we in hoofdstuk 2 met de $\mathbb{R}^n$ deden, gaan we nu uitbreiden tot andere lineaire ruimten

Definitie. Een lineaire afbeelding van een lineaire ruimte $\mathbf{V}$ naar een lineaire ruimte $\mathbf{W}$ is een functie $A : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ waarvoor geldt:

$$\begin{array}{ll} A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y} & \text{voor alle } \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V} \\ A(\lambda\vec{x}) = \lambda \cdot A\vec{x} & \text{voor alle } \vec{x} \in \mathbf{V} \text{ en } \lambda \in \mathbb{R} \end{array}$$

In plaats van lineaire afbeelding zegt men ook wel lineaire operator of functor

Voorbeeld 1. $A : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$, gedefinieerd door $A(f) = f'$ (waarbij $\mathbf{V}$ de lineaire ruimte van alle oneindig vaak differentieerbare functies is). Dat A een lineaire afbeelding is, betekent niks anders dan $(f + g)' = f' + g'$ en $(\lambda f)' = \lambda f'$. Men noemt deze A de differentiaaloperator

Voorbeeld 2. Zij $\mathbf{V}$ als in voorbeeld 1. De functie $A : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}^2$, gedefinieerd door $A(f) = (f(0), f''(5))$, is dan een lineaire afbeelding, want hij voldoet aan $A(f + g) = A(f) + A(g)$ en aan $A(\lambda f) = \lambda A(f)$

Voorbeeld 3. De functie $A : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, gedefinieerd door $A(f) = |f|$, is géén lineaire afbeelding, want $|\sin + \cos| \neq |\sin| + |\cos|$

Eigenschappen. Als A een lineaire afbeelding is, dan geldt:

$$\begin{cases} A(\vec{0}) = \vec{0} \\ A(\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n) = \lambda_1 A\vec{x}_1 + \dots + \lambda_n A\vec{x}_n \end{cases}$$

Kern en bereik. Voor een lineaire afbeelding $A : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ definiëren we:

$$\begin{array}{ll} \text{Ker } A & \stackrel{\text{def}}{=} \text{ de verzameling van alle } \vec{x} \in \mathbf{V} \text{ waarvoor } A\vec{x} = \vec{0} \\ \text{Im } A & \stackrel{\text{def}}{=} \text{ de verzameling van alle beelden } A\vec{x} \text{ van elementen } \vec{x} \text{ uit } \mathbf{V} \end{array}$$

$\text{Ker } A$ en $\text{Im } A$ hebben weer soortgelijke eigenschappen als in hoofdstuk 2:

- $\text{Ker } A$ is een lineaire deelruimte van $\mathbf{V}$
- $\text{Im } A$ is een lineaire deelruimte van $\mathbf{W}$
- $\dim(\text{Ker } A) + \dim(\text{Im } A) = \dim \mathbf{V}$

Deze laatste eigenschap (de dimensiestelling) is natuurlijk alleen interessant als deze dimensies eindig zijn

Voorbeeld 4. Zij $\mathbb{P}_4$ de lineaire ruimte van alle veeltermfuncties van graad ≤ 4 , en zij $A : \mathbb{P}_4 \rightarrow \mathbb{P}_4$ de differentiaaloperator $A(f) = f'$. Dan:

- $\text{Ker } A$ is de lineaire deelruimte van $\mathbb{P}_4$ die bestaat uit alle constante functies
 $\dim(\text{Ker } A) = 1$, want $\text{Ker } A$ wordt opgespannen door de functie $t \mapsto 1$

- $\text{Im } A$ bestaat uit alle veeltermfuncties van graad ≤ 3

$$\dim(\text{Im } A) = 4, \text{ want } \text{Im } A \text{ is het opspansel van de vier functies } \begin{cases} t \mapsto 1 \\ t \mapsto t \\ t \mapsto t^2 \\ t \mapsto t^3 \end{cases}$$

- De dimensiestelling zegt dat $\dim(\text{Ker } A) + \dim(\text{Im } A) = \dim \mathbb{P}_4$ en dus $1 + 4 = 5$ (maar dat wist je vermoedelijk al)

Voorbeeld 5. Zij $\mathbf{V}$ de lineaire ruimte van alle functies op $\mathbb{R}$ van het type $t \mapsto a \cos t + b \sin t$, en zij $A : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door $A(f) = (f(0), f''(0))$. Dan is

- $\text{Ker } A = \llbracket \sin \rrbracket$, want A beeldt alleen de veelvouden van $\sin$ op $(0, 0)$ af
- $\text{Im } A = \llbracket (1, -1) \rrbracket$, want de A -beelden zijn precies alle vectoren $(a, -a)$
- De dimensiestelling klopt alweer: $1 + 1 = 2$

Matrix van een lineaire afbeelding. Zij $\mathbf{V}$ een lineaire ruimte met basis $\vec{\mathbf{e}}_1, \dots, \vec{\mathbf{e}}_n$, en $\mathbf{W}$ een lineaire ruimte met basis $\vec{\mathbf{f}}_1, \dots, \vec{\mathbf{f}}_m$. Een lineaire afbeelding $A : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ is dan volledig vastgelegd door de beelden $A\vec{\mathbf{e}}_1, \dots, A\vec{\mathbf{e}}_n$.

Als $A\vec{\mathbf{e}}_i = a_{1i}\vec{\mathbf{f}}_1 + \dots + a_{mi}\vec{\mathbf{f}}_m$ (voor $i = 1, \dots, n$), dan heet

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ de } \underline{\text{matrix van } A} \text{ ten opzichte van de bases } \vec{\mathbf{e}}_1, \dots, \vec{\mathbf{e}}_n \text{ en } \vec{\mathbf{f}}_1, \dots, \vec{\mathbf{f}}_m$$

In de i -de kolom van deze matrix vinden we dus de coëfficiënten van $\vec{\mathbf{f}}_1, \dots, \vec{\mathbf{f}}_m$ in $A\vec{\mathbf{e}}_i$

Voorbeeld 6. Zij $\mathbb{P}_2$ de lineaire ruimte van alle veeltermfuncties van graad ≤ 2 , en A de lineaire operator op $\mathbb{P}_2$ die iedere f transformeert in de functie $t \mapsto 3f'(t) + f(5t)$. Anders gezegd: $A : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ wordt vastgelegd door

$$(Af)(t) = 3f'(t) + f(5t)$$

Kies een basis van $\mathbb{P}_2$, en bepaal ten opzichte van de gekozen basis de matrix van A

Oplossing. We kiezen als basis $\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3$ waarbij
$$\begin{cases} \vec{\mathbf{e}}_1(t) = 1 \\ \vec{\mathbf{e}}_2(t) = t \\ \vec{\mathbf{e}}_3(t) = t^2 \end{cases}$$

Vervolgens moeten we $A\vec{\mathbf{e}}_1$, $A\vec{\mathbf{e}}_2$ en $A\vec{\mathbf{e}}_3$ uitrekenen. Dat gaat als volgt:

$$\begin{aligned} (A\vec{\mathbf{e}}_1)(t) &= 3\vec{\mathbf{e}}_1'(t) + \vec{\mathbf{e}}_1(5t) = 1 & \text{dus } A\vec{\mathbf{e}}_1 &= \vec{\mathbf{e}}_1 \\ (A\vec{\mathbf{e}}_2)(t) &= 3\vec{\mathbf{e}}_2'(t) + \vec{\mathbf{e}}_2(5t) = 3 + 5t & \text{dus } A\vec{\mathbf{e}}_2 &= 3\vec{\mathbf{e}}_1 + 5\vec{\mathbf{e}}_2 \\ (A\vec{\mathbf{e}}_3)(t) &= 3\vec{\mathbf{e}}_3'(t) + \vec{\mathbf{e}}_3(5t) = 6t + 25t^2 & \text{dus } A\vec{\mathbf{e}}_3 &= 6\vec{\mathbf{e}}_2 + 25\vec{\mathbf{e}}_3 \end{aligned}$$

De matrix van A ten opzichte van de basis $\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3$ is dus
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

Opmerking. Met behulp van deze matrix kunnen we, analoog aan hoofdstuk 2, voor allerlei functies f héél snel Af uitrekenen.

Bijvoorbeeld: als $f(t) = 2t^2 - 3t + 7$ (of, anders gezegd, $f = 7\vec{\mathbf{e}}_1 - 3\vec{\mathbf{e}}_2 + 2\vec{\mathbf{e}}_3$), dan kan f voorgesteld

worden door de ‘kolomvector’ $\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ en kunnen we Af berekenen via matrixvermenigvuldiging:

$$Af = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 50 \end{pmatrix} \quad \text{en dus is } Af \text{ de functie } t \mapsto 50t^2 - 3t - 2$$

Voorbeeld 7. Zij Spieg de lineaire transformatie van $\mathbb{R}^2$ die gedefinieerd is door

$$\text{Spieg}(\vec{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{het spiegelbeeld van } \vec{x} \text{ in de spiegel } \llbracket(3, 7)\rrbracket$$

In hoofdstuk 2 heb je de matrix van Spieg bepaald. Daarmee bedoelde je toen: de matrix van Spieg ten opzichte van de natuurlijke basis. Jouw uitkomst was een nogal ingewikkelde matrix:

$$\text{Spieg} = \begin{pmatrix} -\frac{20}{29} & \frac{21}{29} \\ \frac{21}{29} & \frac{20}{29} \end{pmatrix}$$

Je kunt ook de matrix van Spieg ten opzichte van een andere basis bepalen. Laten we maar eens een andere basis kiezen: de basis $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ met $\begin{cases} \vec{f}_1 = (3, 7) \\ \vec{f}_2 = (7, -3) \end{cases}$

We gaan eens kijken wat de matrix van Spieg ten opzichte van deze nieuwe basis is. Hiervoor moeten we $\text{Spieg}(\vec{f}_1)$ en $\text{Spieg}(\vec{f}_2)$ uitrekenen, de uitkomsten weer in $\vec{f}_1$ en $\vec{f}_2$ uitdrukken, en de gevonden coëfficiënten in de kolommen zetten. Dat lijkt misschien een vreselijk ingewikkeld karweitje, maar dat valt reuze mee: $\text{Spieg}(\vec{f}_1) = \vec{f}_1$ en $\text{Spieg}(\vec{f}_2) = -\vec{f}_2$

$$\text{De matrix van Spieg ten opzichte van de basis } \vec{f}_1, \vec{f}_2 \text{ is dus } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Merk op dat deze matrix dezelfde determinant heeft als de matrix van Spieg ten opzichte van de natuurlijke basis: beide determinanten zijn -1 . Dat verbaast je niks, want de determinant is de vermenigvuldigingsfactor van oppervlakken (met nog een minteken omdat de oriëntatie in de spiegel andersom is). En die factor is natuurlijk niet afhankelijk van wat voor basis die dwaze wiskundigen zoal verzinnen. Ook het spoor van beide matrices (dat wil zeggen de som van de getallen op de hoofddiagonaal) is gelijk. En ook dat is geen toeval, maar het is mij streng verboden natuurwetenschappers lastig te vallen met het begrip spoor. Vergeet dat dus maar gauw weer

Samenstelling en inverse. Samenstelling en inverse van lineaire afbeeldingen zijn (als ze bestaan) zelf ook weer lineaire afbeeldingen. En net zo als in hoofdstuk 2 is de matrix van $B \circ A$ ten opzichte van een gegeven basiskeuze weer het product van de matrix van B met de matrix van A

Voorbeeld 8. Zij Diff de differentiaaloperator op $\llbracket \cos, \sin \rrbracket$. Ten opzichte van de basis $\cos, \sin$ is dan

$$\text{Diff} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Diff}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Diff}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

- Ik heb de matrix van Diff kolom voor kolom uitgerekend: $\boxed{\text{Diff}(\cos) = -\sin}$ levert de eerste kolom als resultaat, en $\boxed{\text{Diff}(\sin) = \cos}$ de tweede kolom
- De matrix van Diff^{-1} heb ik met de betreffende techniek uit het vorige hoofdstuk uitgerekend, maar die had je natuurlijk ook rechtstreeks kolom voor kolom kunnen bepalen, want Diff^{-1} is de primitiveringsoperator die aan iedere functie uit $\llbracket \cos, \sin \rrbracket$ zijn primitieve uit $\llbracket \cos, \sin \rrbracket$ toevoegt
- De matrix van Diff^2 is simpelweg het matrixproduct $\text{Diff} \cdot \text{Diff}$, maar ook die had ik rechtstreeks kunnen berekenen door Diff^2 te interpreteren als de operator die aan iedere functie f uit $\llbracket \cos, \sin \rrbracket$ zijn tweede afgeleide f'' toevoegt

Determinant. De determinant van een lineaire transformatie A van $\mathbf{V}$ reken je als volgt uit:

- Kies een basis van $\mathbf{V}$
- Bepaal de matrix van A ten opzichte van deze basis
- Bereken de determinant van deze matrix

(wees zo lief zonder bewijs te geloven dat de uitkomst onafhankelijk is van de gekozen basis)

Voorbeeld 9. Bereken de determinant van de transformatie A van $\mathbb{P}_2$ die iedere veeltermfunctie f transformeert in de functie $t \mapsto f(3t + 5)$

Oplossing.

- Als basis van $\mathbb{P}_2$ kies ik maar weer saai $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ met
$$\begin{cases} \mathbf{e}_1(t) = 1 \\ \mathbf{e}_2(t) = t \\ \mathbf{e}_3(t) = t^2 \end{cases}$$
- De matrix van A ten opzichte van deze basis vind je door de kolommen stuk voor stuk uit te rekenen:

$$\text{Kolom 1: } A\mathbf{e}_1 = \boxed{t \mapsto \mathbf{e}_1(3t + 5)} = \boxed{t \mapsto 1} = \mathbf{e}_1$$

$$\text{Kolom 2: } A\mathbf{e}_2 = \boxed{t \mapsto \mathbf{e}_2(3t + 5)} = \boxed{t \mapsto 3t + 5} = 5\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$$

$$\text{Kolom 3: } A\mathbf{e}_3 = \boxed{t \mapsto \mathbf{e}_3(3t + 5)} = \boxed{t \mapsto (3t + 5)^2} = 25\mathbf{e}_1 + 30\mathbf{e}_2 + 9\mathbf{e}_3$$

$$\text{De gevonden matrix van } A \text{ is } \begin{pmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 0 & 3 & 30 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

- De determinant van A is dus 27

Eigenwaarden, eigenfuncties. Als je het verschijnsel $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ tegenkomt met $\vec{x} \neq \vec{0}$, mag je λ een eigenwaarde noemen, en $\vec{x}$ een eigenvector (of, als de lineaire ruimte uit functies bestaat, een eigenfunctie). Soms kun je deze dingetjes opsporen met gezond verstand, maar je mag ook je toevlucht nemen tot de trucs die je in het vorige hoofdstuk hebt geleerd:

$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda \text{ is een eigenwaarde van } A \iff \det(A - \lambda I) = 0 \\ \text{de eigenruimte bij } \lambda \text{ is } \text{Ker}(A - \lambda I) \end{array}}$$

Voorbeeld 10. Zij $\mathbb{P}$ de lineaire ruimte van alle veeltermfuncties, en zij A de differentiaaloperator op $\mathbb{P}$. Dan is het getal 0 de enige eigenwaarde, en de bijbehorende eigenfuncties zijn de constante functies

Voorbeeld 11. Bereken de eigenwaarden en eigenvectoren van de transformatie A van $\mathbb{P}_2$ die iedere veeltermfunctie f transformeert in de functie $t \mapsto f(3t + 5)$

Oplossing. Ten opzichte van de in voorbeeld 9 gekozen basis is de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 0 & 3 & 30 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

$$\text{Nu de eigenwaarden: } \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 5 & 25 \\ 0 & 3 - \lambda & 30 \\ 0 & 0 & 9 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)(3 - \lambda)(9 - \lambda)$$

en dit is 0 als λ een van de getallen 1, 3 en 9 is. Tenslotte bepalen we de eigenfuncties:

- Bij $\lambda = 1$ vinden we $\text{Ker}(A - I) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 25 \\ 0 & 2 & 30 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \mathbb{L}(1, 0, 0) = \mathbb{L}(\mathbf{e}_1)$

De eigenfuncties bij eigenwaarde 1 zijn dus de constante functies

- Bij $\lambda = 3$ vinden we $\text{Ker}(A - 3I) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -2 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \llbracket (5, 2, 0) \rrbracket = \llbracket 5\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 \rrbracket$

De eigenfuncties bij eigenwaarde 3 zijn dus de functies van het type $t \mapsto \alpha(5 + 2t)$

- Bij $\lambda = 9$ vinden we $\text{Ker}(A - 9I) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -8 & 5 & 25 \\ 0 & -6 & 30 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \llbracket (25, 20, 4) \rrbracket = \llbracket 25\vec{e}_1 + 20\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 \rrbracket$

De eigenfuncties bij eigenwaarde 9 zijn dus de functies van het type $t \mapsto \alpha(25 + 20t + 4t^2)$

Ik heb in deze kernberekeningen de vegen-met-rijen techniek uit hoofdstuk 2 gebruikt. De details heb ik je ditmaal maar bespaard, in de hoop dat je met zoiets geen problemen (meer) hebt. Interessant is nog, wat er gebeurt als je een uit eigenfuncties bestaande basis van $\mathbb{P}_2$ kiest. Laten we dat maar eens doen:

We kiezen de basis $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ met
$$\begin{cases} \vec{f}_1(t) = 1 \\ \vec{f}_2(t) = 5 + 2t \\ \vec{f}_3(t) = 25 + 20t + 4t^2 \end{cases}$$

De matrix van A ten opzichte van deze nieuwe basis is dan $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ wegens
$$\begin{cases} A\vec{f}_1 = \vec{f}_1 \\ A\vec{f}_2 = 3\vec{f}_2 \\ A\vec{f}_3 = 9\vec{f}_3 \end{cases}$$

De moraal: als je de lineaire transformaties die je in het dagelijks leven ontmoet op een eenvoudige manier wil beschrijven, kies dan een basis die uit eigenvectoren bestaat

Opgaven hoofdstuk 6

Opgave 1. Zij $\mathbb{P}_3$ de verzameling van alle veeltermfuncties van graad ≤ 3 , en zij $A : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_3$ gedefinieerd door $A(f) = f''$

- a) Bepaal $\text{Ker } A$
- b) Bepaal $\text{Im } A$
- c) Voldoen jouw uitkomsten aan de dimensiestelling? Zo nee, raad dan wie in de fout ging, de arme student of de goed betaalde geleerden die de dimensiestelling hebben bedacht

Opgave 2. Zij $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de lineaire afbeelding met matrix $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ten opzichte van de natuurlijke basis

- a) Bereken $F(1, 3)$, en schrijf de uitkomst als lineaire combinatie van $(1, 3)$ en $(-2, 1)$
- b) Bereken $F(-2, 1)$, en schrijf de uitkomst als lineaire combinatie van $(1, 3)$ en $(-2, 1)$
- c) Bepaal de matrix van F ten opzichte van de basis $(1, 3), (-2, 1)$ van $\mathbb{R}^2$
- d) Heeft de in (c) gevonden matrix nog steeds dezelfde determinant als de gegeven matrix $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$? Zo nee, wie ging er weer grandioos de mist in?

Opgave 3. Zij $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de lineaire afbeelding met matrix $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ten opzichte van de natuurlijke basis van $\mathbb{R}^2$. Zoek een nieuwe basis $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ van $\mathbb{R}^2$ zó dat de matrix van F ten opzichte van $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ de volgende gedaante heeft: $\begin{pmatrix} \cdots & 0 \\ 0 & \cdots \end{pmatrix}$

Opgave 4. $\mathbb{P}_2$ is de verzameling van alle veeltermfuncties van graad ≤ 2 . Zij A de lineaire transformatie van $\mathbb{P}_2$ die gegeven wordt door $A(f) = f'' + 7f'$

- a) Maak een basis voor $\mathbb{P}_2$
- b) Bepaal de matrix van A ten opzichte van de door jou gekozen basis
- c) Bepaal alle eigenfuncties van A

Opgave 5. Zij $\mathbb{P}_6$ de verzameling van alle veeltermen in t van graad ≤ 6 , en zij $A : \mathbb{P}_6 \rightarrow \mathbb{P}_6$ gedefinieerd door $A(f) = f''$

- a) Bereken $\det(A)$
- b) Bepaal de eigenwaarden van A
- c) Bepaal de matrix van A^3 ten opzichte van de basis $f_0, \dots, f_6$ van V met $f_n(t) = (2t + 3)^n$

Opgave 6. Bepaal alle eigenfuncties van de lineaire functor F op $[[\cos, \sin]]$ die vastgelegd wordt door

$$\begin{cases} F(\cos) = \sin \\ F(\sin) = \cos \end{cases}$$

Opgave 7. Zij A de lineaire transformatie schrapping de eerste term in $\mathbb{R}^\infty$

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$$

Bepaal de eigenruimte bij de eigenwaarde 7

Opgave 8. Zij F de lineaire functor op $\mathbb{P}_2$ die iedere veeltermfunctie f transformeert in de veeltermfunctie

$$t \mapsto \frac{d}{dt} (t \cdot f(t+3))$$

- a) Bereken alle eigenwaarden van F
- b) Bepaal alle eigenfuncties van F bij de eigenwaarde 3

Opgave 9. Zij F de functor op de lineaire ruimte van alle differentieerbare functies uit $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ die gedefinieerd wordt door

$$F(f) = 3f + f'$$

- a) Bepaal de kern van F
- b) Zoek een eigenfunctie van F bij de eigenwaarde 5

Zelfstudiepakketje bij hoofdstuk 6

Opgave 1. Zij A de lineaire transformatie van $\mathbb{R}^2$ met matrix $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ten opzichte van de natuurlijke basis. Bepaal de matrix van A ten opzichte van de basis $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ waarbij $\begin{cases} \vec{f}_1 = (1, -1) \\ \vec{f}_2 = (0, 1) \end{cases}$

Opgave 2. Zij $\mathbb{TP}_2$ de lineaire ruimte van alle functies van het type $t \mapsto a_0 + a_1 \cos t + a_2 \cos 2t + b_1 \sin t + b_2 \sin 2t$ (dat soort functies noemt men trigonometrische polynomen van orde ≤ 2), en zij DD de lineaire transformatie van $\mathbb{TP}_2$ die iedere functie overvoert in zijn tweede afgeleide. In formule:

$$DD(f) = f''$$

a) Bepaal de matrix van DD ten opzichte van de basis $\vec{c}_0, \vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{s}_1, \vec{s}_2$ van $\mathbb{TP}_2$ waarbij

$$\begin{cases} \vec{c}_0 \text{ is de functie } t \mapsto 1 \\ \vec{c}_1 \text{ is de functie } t \mapsto \cos t \\ \vec{c}_2 \text{ is de functie } t \mapsto \cos 2t \\ \vec{s}_1 \text{ is de functie } t \mapsto \sin t \\ \vec{s}_2 \text{ is de functie } t \mapsto \sin 2t \end{cases}$$

b) Bereken de determinant van DD

c) Bepaal de kern van DD

Opgave 3. Zij V de lineaire ruimte van $\mathbb{P}_2$ die bestaat uit alle veeltermfuncties f van graad ≤ 2 die voldoen aan $f(3) = 0$, en zij A de operator die bij iedere functie zijn afgeleide optelt:

$$Af = f + f'$$

a) Bepaal een basis van $\mathbb{P}_2$

b) Is A een lineaire transformatie van $\mathbb{P}_2$?

Is je antwoord op deze vraag ja, ga dan na of A regulier of singulier is;

is je antwoord nee, leg dan uit waarom A geen lineaire transformatie van $\mathbb{P}_2$ is

c) Bepaal een basis van V

d) Is A een lineaire transformatie van V ?

Is je antwoord op deze vraag ja, ga dan na of A regulier of singulier is;

is je antwoord nee, leg dan uit waarom A geen lineaire transformatie van V is

Opgave 4. Zij $\mathbf{V}$ de lineaire ruimte van alle functies $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ die voldoen aan $f''(x) = f'(2)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$, en zij $A : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door $A(f) \stackrel{\text{def}}{=} (f(0), f(2))$

a) Bepaal een basis van $\mathbf{V}$

b) Bepaal de matrix van A ten opzichte van de door jou gekozen basis van $\mathbf{V}$ en de natuurlijke basis van $\mathbb{R}^2$

c) Bepaal $\text{Ker } A$

Opgave 5. Zij $\mathbf{V}$ de lineaire ruimte van alle oneindige rijen van reële getallen $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$ die voldoen aan $a_n = 3a_{n-2}$ voor alle $n \geq 3$, en zij A de operator schrab de beginterm op $\mathbf{V}$. Netjes geformuleerd:

$$A(a_1, a_2, a_3, \dots) \stackrel{\text{def}}{=} (a_2, a_3, a_4, \dots)$$

- a) Verzin een basis van $\mathbf{V}$
- b) Is A een lineaire transformatie? Zo ja, bepaal de matrix van A ten opzichte van de in (a) gekozen basis

Opgave 6. Zij $\mathbb{P}_3$ de lineaire ruimte van alle veeltermfuncties van graad ≤ 3 , en zij $A : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_3$ gedefinieerd door

$Af \stackrel{\text{def}}{=} \text{de tweede-orde Taylorbenadering van } f \text{ in } x = 1$

of, anders geformuleerd, $(Af)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(1) + f'(1) \cdot (x - 1) + \frac{1}{2}f''(1) \cdot (x - 1)^2$

- a) Kies een basis van $\mathbb{P}_3$, en bepaal de matrix van A ten opzichte van de door jou gekozen basis
- b) Bepaal $\text{Ker } A$
- c) Bepaal $\text{Im } A$

Opgave 7. Zij V het vlak in $\mathbb{R}^3$ met vergelijking $x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0$. We definiëren lineaire afbeeldingen A en B van $\mathbb{R}^3$ naar $\mathbb{R}^3$ door:

$A\vec{x} \stackrel{\text{def}}{=} \text{het spiegelbeeld van } \vec{x} \text{ ten opzichte van } V$

$B\vec{x} \stackrel{\text{def}}{=} \text{de projectie van } \vec{x} \text{ op } V$

Kies een basis van $\mathbb{R}^3$, en bepaal ten opzichte van de door jou gekozen basis:

- a) de matrix van A
- b) de matrix van B
- c) de matrix van $A \circ B \circ A^{-1}$

Opgave 8. Zij V de lineaire ruimte van alle $f \in \mathbb{P}_3$ waarvoor $\int_0^1 f(x) dx = 0$

- a) Bepaal een basis van V
- b) Zij $A : V \rightarrow V$ de lineaire afbeelding, gedefinieerd door $(A(f))(x) = f(1 - x)$. Bepaal de matrix van A ten opzichte van de in (a) gevonden basis

Opgave 9. Zij V de lineaire ruimte van alle oplossingen van de differentiaalvergelijking $f''' + 3f' = 0$. We definiëren een lineaire afbeelding $A : V \rightarrow V$ door $A(f) = f'$

- a) Bepaal een basis van V
- b) Bepaal de matrix van A ten opzichte van de gevonden basis
- c) Bepaal $\text{Ker } A$

Opgave 10. We definiëren lineaire deelruimten V en $\mathbb{P}_3$ van $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ door

$V \stackrel{\text{def}}{=} \text{de verzameling van alle functies van het type } t \mapsto \alpha \sin(t + \beta)$

$\mathbb{P}_3 \stackrel{\text{def}}{=} \text{de verzameling van alle veeltermfuncties van graad } \leq 3$

Maak een matrix van de lineaire afbeelding $A : V \rightarrow \mathbb{P}_3$, die aan iedere functie uit V zijn derdegraads Taylorbenadering toevoegt

Oplossingen

Opgave 1. Methode: bereken $A\vec{f}_1$ en $A\vec{f}_2$, en druk deze uit in $\vec{f}_1$ en $\vec{f}_2$. Je vindt: $A\vec{f}_1 = 2\vec{f}_1$ en $A\vec{f}_2 = -\vec{f}_1 + 2\vec{f}_2$. De matrix van A ten opzichte van de basis $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ is dus $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Opgave 2.

a) Eerst even de DD-beelden van de basisvectoren uitrekenen:

$$DD(\vec{c}_0) = \vec{0} \quad DD(\vec{c}_1) = -\vec{c}_1 \quad DD(\vec{c}_2) = -4\vec{c}_2 \quad DD(\vec{s}_1) = -\vec{s}_1 \quad DD(\vec{s}_2) = -4\vec{s}_2$$

$$\text{De matrix van DD ten opzichte van de basis } \vec{c}_0, \vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{s}_1, \vec{s}_2 \text{ is dus } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

b) De determinant van DD is 0

c) De kern van DD is $\llbracket \vec{c}_0 \rrbracket$, en dat is de verzameling van alle constante functies

Opgave 3.

a) Je kunt als basis van $\mathbb{P}_2$ bijvoorbeeld de drie functies $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ en $\vec{e}_3$ nemen met $\begin{cases} \vec{e}_1(t) = 1 \\ \vec{e}_2(t) = t \\ \vec{e}_3(t) = t^2 \end{cases}$

b) Ja. Deze A is regulier, wat je bijvoorbeeld kunt ontdekken door de matrix van A ten opzichte van de in (a) gevonden basis op te stellen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en vervolgens te constateren dat de determinant hiervan 1 is

c) Een mogelijke basis van V is $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ waarbij $\begin{cases} \vec{f}_1(t) = t - 37 \\ \vec{f}_2(t) = (t - 37)^2 \end{cases}$

d) A is géén transformatie van V , want $A\vec{f}_1$ is de functie $t \mapsto t - 36$, en deze zit helaas niet in V

Opgave 4.

a) Als $f \in \mathbf{V}$, dan is f'' constant, en dus f een veelterm van graad ≤ 2 . Zij $f(x) = \lambda + \mu x + \nu x^2$. Dan $f \in \mathbf{V} \Leftrightarrow f''(x) = f'(2) \Leftrightarrow 2\nu = \mu + 4\nu \Leftrightarrow \mu = -2\nu$.

$\mathbf{V}$ bestaat dus uit alle functies van het type $f(x) = \lambda - 2\nu x + \nu x^2 = \lambda + \nu(x^2 - 2x)$.

Een basis van $\mathbf{V}$ is dus $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ waarbij $\vec{e}_1(x) = 1$ en $\vec{e}_2(x) = x^2 - 2x$

b) $A\vec{e}_1 = (1, 1)$ en $A\vec{e}_2 = (0, 0)$, dus de gevraagde matrix is $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) Uit (b) volgt direct: $\text{Ker } A = \llbracket \vec{e}_2 \rrbracket$

Opgave 5.

a) Als basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ van V kunnen we nemen: $\begin{cases} \vec{e}_1 = (1, 0, 3, 0, 9, 0, 27, 0, 81, 0, 243, \dots) \\ \vec{e}_2 = (0, 1, 0, 3, 0, 9, 0, 27, 0, 81, 0, \dots) \end{cases}$

b) A is lineair, want $\begin{cases} A(\vec{x} + \vec{y}) = (x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4, \dots) = A\vec{x} + A\vec{y} \\ A(\lambda\vec{x}) = (\lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4, \dots) = \lambda A\vec{x} \end{cases}$

$A\vec{e}_1 = 3\vec{e}_2$ en $A\vec{e}_2 = \vec{e}_1$, dus de matrix van A ten opzichte van $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ is $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Opgave 6.

a) Een handige basis van $\mathbb{P}_3$ is $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ met $\begin{cases} \vec{e}_1(x) = 1 \\ \vec{e}_2(x) = x - 1 \\ \vec{e}_3(x) = (x - 1)^2 \\ \vec{e}_4(x) = (x - 1)^3 \end{cases}$ Hiervoor geldt: $\begin{cases} A\vec{e}_1 = \vec{e}_1 \\ A\vec{e}_2 = \vec{e}_2 \\ A\vec{e}_3 = \vec{e}_3 \\ A\vec{e}_4 = \vec{0} \end{cases}$

De matrix van A ten opzichte van $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ is dus $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\text{Ker } A = [\vec{e}_4] =$ de verzameling van alle $f \in \mathbb{P}_3$ van het type $f(x) = \lambda(x - 1)^3$

c) $\text{Im } A = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3] = \mathbb{P}_2$

Opgave 7. Bij deze opgave kun je je heel wat rekenwerk besparen door een slimme basiskeuze.

Kies bijvoorbeeld $\vec{f}_1$ en $\vec{f}_2$ in V , en $\vec{f}_3$ loodrecht op V : $\begin{cases} \vec{f}_1 = (3, -1, 0) \\ \vec{f}_2 = (5, 0, 1) \\ \vec{f}_3 = (1, 3, -5) \end{cases}$

a) Uit de definitie: $\begin{cases} A\vec{f}_1 = \vec{f}_1 \\ A\vec{f}_2 = \vec{f}_2 \\ A\vec{f}_3 = -\vec{f}_3 \end{cases}$ De matrix van A ten opzichte van $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ is dus $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) Uit de definitie volgt $\begin{cases} B\vec{f}_1 = \vec{f}_1 \\ B\vec{f}_2 = \vec{f}_2 \\ B\vec{f}_3 = \vec{0} \end{cases}$ De matrix van B ten opzichte van $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ is dus $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $A \circ B \circ A^{-1} = B$, want de samengestelde handeling ‘eerst spiegelen, daarna projecteren en tenslotte weer spiegelen’ is hetzelfde als ‘projecteren’

Opgave 8.

a) Stel $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$. Dan $\int_0^1 f(x) dx = a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{4}a_3$

$$\text{Dus } f \in V \iff a_0 = -\frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{3}a_2 - \frac{1}{4}a_3$$

De algemene gedaante van een f uit V is dus:

$$f(x) = \left(-\frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{3}a_2 - \frac{1}{4}a_3\right) + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = a_1\left(x - \frac{1}{2}\right) + a_2\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) + a_3\left(x^3 - \frac{1}{4}\right)$$

$$\text{Dus } V = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3] \text{ waarbij } \begin{cases} \vec{e}_1(x) = x - \frac{1}{2} \\ \vec{e}_2(x) = x^2 - \frac{1}{3} \\ \vec{e}_3(x) = x^3 - \frac{1}{4} \end{cases}$$

b)

$$\begin{aligned} (A\vec{e}_1)(x) &= \vec{e}_1(1-x) = \frac{1}{2} - x = -\vec{e}_1(x) & \text{dus } A\vec{e}_1 &= -\vec{e}_1 \\ (A\vec{e}_2)(x) &= \vec{e}_2(1-x) = \frac{2}{3} - 2x + x^2 = \vec{e}_2(x) - 2\vec{e}_1(x) & \text{dus } A\vec{e}_2 &= \vec{e}_2 - 2\vec{e}_1 \\ (A\vec{e}_3)(x) &= \frac{3}{4} - 3x + 3x^2 - x^3 = -\vec{e}_3(x) + 3\vec{e}_2(x) - 3\vec{e}_1(x) & \text{dus } A\vec{e}_3 &= -\vec{e}_3 + 3\vec{e}_2 - 3\vec{e}_1 \end{aligned}$$

$$\text{De matrix van } A \text{ ten opzichte van de basis } \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \text{ is dus } \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Opgave 9.

a) V bestaat uit alle functies van het type $t \mapsto A + B \sin t\sqrt{3} + C \cos t\sqrt{3}$. Een basis van V is dus $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ waarbij $\vec{e}_1(t) = 1$, $\vec{e}_2(t) = \sin t\sqrt{3}$ en $\vec{e}_3(t) = \cos t\sqrt{3}$

b) $A\vec{e}_1 = \vec{0}$, $A\vec{e}_2 = \sqrt{3}\vec{e}_3$ en $A\vec{e}_3 = -\sqrt{3}\vec{e}_2$. De matrix van A ten opzichte van $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ is dus

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

c) $\text{Ker } A = [\vec{e}_1]$ = de verzameling van alle constante functies

Opgave 10. $\alpha \sin(t + \beta) = \alpha \cos \beta \sin t + \alpha \sin \beta \cos t$. Als basis voor V kunnen we dus $\sin, \cos$ nemen. Verder nemen we voor $\mathbb{P}_3$ de basis $\vec{1}, \vec{t}, \vec{t}^2, \vec{t}^3$, waarin bijvoorbeeld $\vec{t}^2$ een afkorting is voor de functie $t \mapsto t^2$. Uit Wiskunde 1 herinneren we ons nog levendig:

$$\begin{aligned} A(\sin) &= \vec{t} - \frac{1}{6}\vec{t}^3 \\ A(\cos) &= \vec{1} - \frac{1}{2}\vec{t}^2 \end{aligned}$$

$$\text{De matrix van } A \text{ ten opzichte van de gekozen bases is dus } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}$$