

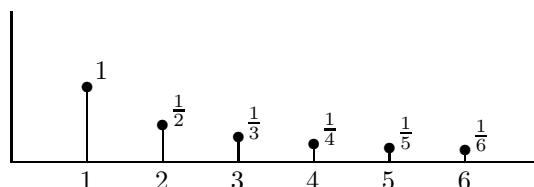
7. Lineaire recursie

Dit hoofdstuk gaat over de lineaire ruimte $\mathbb{R}^\infty$ van alle oneindige rijen $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$ van reële getallen. Zo'n rij kun je opvatten als een functie die aan de index n het reële getal a_n toevoegt. Het is dus een functie met als domein de verzameling van de indices $\{1, 2, 3, \dots\}$ (of $\{0, 1, 2, \dots\}$ als je de nummering bij 0 wilt laten beginnen). Voorbeelden:

- de rij $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$

anders gezegd:

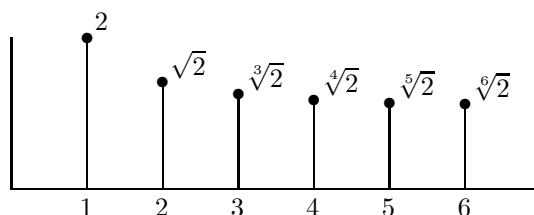
de rij $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$ met $a_n = \frac{1}{n}$



- de rij $2, \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2}, \sqrt[5]{2}, \dots$

anders gezegd:

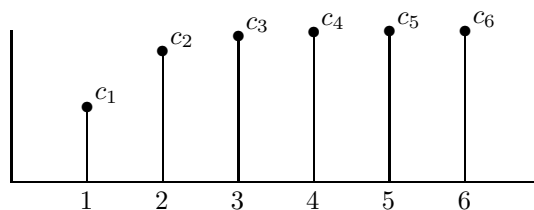
de rij $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, \dots$ met $b_n = \sqrt[n]{2}$



- de rij $1, \sqrt{3}, \sqrt{2 + \sqrt{3}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}, \dots$

anders gezegd:

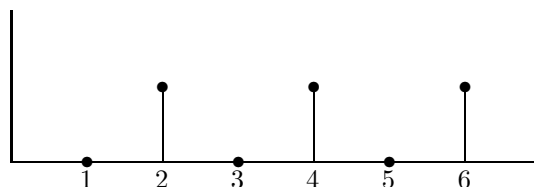
de rij $c_1, c_2, c_3, c_4, \dots$ met $\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_{n+1} = \sqrt{2 + c_n} \end{cases}$



- de rij $0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$

anders gezegd:

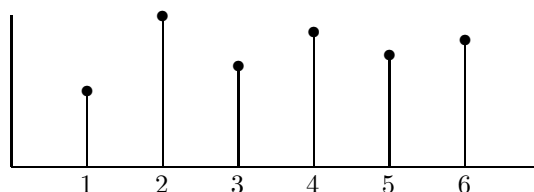
de rij $d_1, d_2, \dots$ met $d_n = \begin{cases} 0 & \text{als } n \text{ oneven is} \\ 1 & \text{als } n \text{ even is} \end{cases}$



- de rij $1, 2, \frac{4}{3}, \frac{16}{9}, \frac{40}{27}, \frac{136}{81}, \frac{376}{243}, \frac{1192}{729}, \frac{3448}{2187}, \dots$

anders gezegd:

de rij $e_1, e_2, \dots$ met $\begin{cases} e_1 = 1 \\ e_2 = 2 \\ e_{n+2} = \frac{1}{3}e_{n+1} + \frac{2}{3}e_n \end{cases}$



Een rij wordt soms vastgelegd door een 'gesloten formule' die de n -de term uitdrukt in n . Zo zijn $a_n = \frac{1}{n}$ en $b_n = \sqrt[n]{2}$ gesloten formules

Ook $d_n = \begin{cases} 0 & \text{als } n \text{ oneven is} \\ 1 & \text{als } n \text{ even is} \end{cases}$ is een gesloten formule, korter formuleerbaar als $d_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}$

De gegeven omschrijving van de rij $c_1, c_2, c_3, \dots$ noemen we een recursieve beschrijving: de rij wordt vastgelegd door te zeggen hoe hij begint ($c_1 = 1$) en hoe telkens een volgende term uit de voorgaande term(en) berekend kan worden ($c_{n+1} = \sqrt{2 + c_n}$). Ook de rij $d_1, d_2, d_3, \dots$ had recursief omschreven kunnen worden:

$$\begin{cases} d_1 = 0 \\ d_{n+1} = 1 - d_n \quad \text{voor alle } n \end{cases}$$

De rij $e_1, e_2, e_3, \dots$ is gegeven door een recursieve omschrijving van orde 2, waarmee elke volgende term uit de twee voorgaande termen berekend kan worden. Nog een paar nachtjes slapen, en dan ben je in staat binnen luttele seconden de gesloten formule $e_n = \frac{8}{5} + \frac{9}{10} \cdot (-\frac{2}{3})^n$ voor deze rij tevoorschijn te toveren. Andere eenvoudige voorbeeldjes:

- De rij $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \dots$ kan recursief beschreven worden door
$$\begin{cases} s_0 = 3 \\ s_{n+1} = \frac{s_n}{2} \end{cases} \text{ voor alle } n$$

Ook kun je deze rij $s_0, s_1, s_2, \dots$ beschrijven met een gesloten formule: $s_n = \frac{3}{2^n}$

(We hebben hier gekozen voor nummering vanaf 0, de rij is de functie $n \mapsto \frac{3}{2^n}$ met domein $\{0, 1, 2, \dots\}$)

- De rij $0!, 1!, 2!, 3!, \dots$ kan recursief beschreven worden met
$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = (n+1) \cdot n! \end{cases}$$

- De rij $t_0, t_1, t_2, \dots$ die recursief vastgelegd wordt door
$$\begin{cases} t_0 = \pi \\ t_{n+1} = 7t_n \end{cases} \text{ voor alle } n$$
 heeft als gesloten formule $t_n = 7^n \pi$

- Er zijn oneindig veel rijen $a_0, a_1, a_2, \dots$ die voldoen aan $a_{n+1} = 7a_n$ voor alle n . Je kunt zo'n rij maken door met een willekeurig gekozen reëel getal λ te beginnen, en vervolgens steeds met 7 te vermenigvuldigen. De algemene gedaante van zo'n rij is dus $n \mapsto \lambda \cdot 7^n$. We zeggen ook wel: de algemene oplossing van de recursieve betrekking $a_{n+1} = 7a_n$ is $a_n = \lambda \cdot 7^n$

In dit hoofdstuk hopen we twee vaardigheden te leren:

- 1) Hoe vind je een recursieve beschrijving?
- 2) Hoe kun je een recursieve beschrijving omzetten in een gesloten formule?

We zullen hiervoor een aantal methoden ontwikkelen aan de hand van concrete problemen

Probleem 1: weitjes. Met vier rechte rijen prikkeldraad kun je drie (begrensde) weitjes maken. Je moet dan natuurlijk geen twee rijen evenwijdig spannen, en geen drie door één punt. De vraag is nu: hoeveel weitjes kun je maken met 100 rijen prikkeldraad?

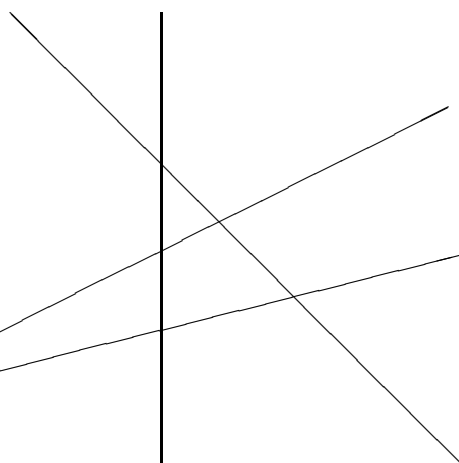
Oplossing. We zijn te lui om het via 'tekenen en tellen' te doen, dus grijpen we naar de recursie-truc. We definiëren: $a_n \stackrel{\text{def}}{=} \text{het maximale aantal weitjes bij } n \text{ rijen prikkeldraad.}$

Dan $a_{n+1} = a_n + (n-1)$, want de $(n+1)$ -ste rij levert $n-1$ extra weitjes op (ga dit zelf na). Uit deze recursieve betrekking

$a_{n+1} = a_n + (n-1)$ en de 'beginvoorwaarde'

$a_1 = 0$ kunnen we a_n als volgt 'oplossen':

$$a_n = a_{n-1} + (n-2) = a_{n-2} + (n-3) + (n-2) = \dots = 0 + 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) \implies a_{100} = 4851$$



Differentievergelijkingen. De recursieve betrekking $a_{n+1} - a_n = n-1$ uit dit voorbeeld noemt men ook wel een differentievergelijking: de vergelijking drukt het verschil $a_{n+1} - a_n$ uit in n . De gevonden formule $a_n = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ is een oplossing van deze differentievergelijking. Tijd om zelf even aan de slag te gaan met een paar sommetjes

Opgave 1. In hoeveel stukken wordt het platte vlak maximaal verdeeld door n rechte lijnen?

Opgave 2. In hoeveel stukken wordt de ruimte maximaal verdeeld door n vlakken?
Hoeveel van deze stukken zijn (begrensde) veelvlakken?

Opgave 3. Bepaal alle rijen $a_1, a_2, a_3, \dots$ van reële getallen die voldoen aan $a_{n+1} = 5a_n$ voor alle n

Opgave 4. Bepaal a_{12} als $a_{n+1}^2 = 5a_n^2$, $a_n > 0$ en $a_0 = 2$

Opgave 5. Bepaal de oplossing(en) van de recursieve betrekking $a_{n+1} - 3a_n = 2n - 1$ met beginvoorwaarde $a_1 = 4$

Opgave 6. Welke rij $a_1, a_2, a_3, \dots$ voldoet aan $a_1 = 2$ en $a_n - na_{n-1} = 3n - 3$ voor alle $n \geq 2$?

Opgave 7. Hoeveel begrensde gebieden krijg je maximaal als je duizend ellipsen tekent?

Opgave 8. De kans p_n dat een Nijmeegse vrouwtjes-poes tijdens haar leven precies n keer kleintjes krijgt voldoet aan de recursieve betrekking $p_n = \frac{3}{5}p_{n-1}$ (voor $n \geq 1$).
Bereken p_0

Opgave 9. In Arnhem is de situatie iets minder rooskleurig. Daar voldoet de kans q_n op precies n worpen aan $q_n = \frac{1}{n}q_{n-1}$ (voor $n \geq 1$).
Waar is de kans op kinderloosheid voor die beesten groter, in Nijmegen of in Arnhem?

Terminologie. $a_{n+1} + c \cdot a_n = 0$ heet een homogene lineaire recursievergelijking van orde 1 met constante coëfficiënten. Homogeen omdat het rechterlid 0 is, van orde 1 omdat het een betrekking is tussen termen uit $a_1, a_2, a_3, \dots$ die op afstand 1 liggen.

In opgave 6 zagen we een inhomogene lineaire recursie van orde 1 met variabele coëfficiënten. De nu volgende problemen gaan over lineaire recursieve betrekkingen van orde 2

Probleem 2. Zij V de verzameling van alle rijen $s_0, s_1, s_2, \dots$ die voldoen aan $s_{n+2} = 5s_{n+1} - 6s_n$. Bepaal alle elementen van V

Oplossing. Merk allereerst even op dat V een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^\infty$ is. Je kunt dat eenvoudig bewijzen door de volgende drie dingetjes te verifiëren:

- (1) de som van twee rijen uit V is weer een rij uit V
- (2) een veelvoud van een rij uit V is weer een rij uit V
- (3) de nulrij is een element van V

Het is niet moeilijk de dimensie van V te raden, want de rijen $(1, 0, \dots)$ en $(0, 1, \dots)$ vormen een basis van V (ik hoop dat je begrijpt hoe de ‘puntjes’ in $(1, 0, \dots)$ moeten worden ingevuld: zó dat er een rij uit V staat, dus $(1, 0, -6, -30, -114, \dots)$; en met $(0, 1, \dots)$ bedoel ik natuurlijk $(0, 1, 5, 19, 65, \dots)$). De dimensie van V is dus 2. We gaan nu eens even onderzoeken of er toevallig ook rijen van het type $1, x, x^2, x^3, \dots$ in V zitten met $x \neq 0$:

$$(1, x, x^2, x^3, \dots) \in V \iff x^{n+2} = 5x^{n+1} - 6x^n \iff x^2 = 5x - 6 \iff x = 2 \text{ of } x = 3$$

We hebben er twee ontdekt: de rij $(1, 2, 4, 8, \dots)$ en de rij $(1, 3, 9, 27, \dots)$. Uit $\dim V = 2$ volgt dat deze twee rijen ook een basis van V vormen. Anders gezegd: V bestaat uit alle lineaire combinaties van de twee rijen $(1, 2, 4, 8, \dots)$ en $(1, 3, 9, 27, \dots)$. V is dus de verzameling van alle rijen $n \mapsto \lambda \cdot 2^n + \mu \cdot 3^n$ waarbij λ en μ reële getallen zijn

We kunnen de gevolgde procedure generaliseren tot een recept voor het oplossen van een homogene lineaire recursieve betrekking van orde 2:

Recept voor het oplossen van $as_{n+2} + bs_{n+1} + cs_n = 0$

Zoek twee nulpunten p en q van $ax^2 + bx + c$
en je vindt als algemene oplossing: $s_n = \lambda p^n + \mu q^n$

We noemen $ax^2 + bx + c$ het karakteristieke polynoom van de recursieve betrekking $as_{n+2} + bs_{n+1} + cs_n = 0$. De vierkantsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ heet de karakteristieke vergelijking. Zoals je ongetwijfeld in je jeugd hebt geleerd, vind je niet altijd twee nulpunten. Het kan erg frustrerend zijn als je geen enkel nulpunt vindt. Die situatie zal zich gelukkig nooit voordoen, want zelfs het geval $b^2 - 4ac < 0$ is niet fataal: je neemt dan domweg de twee complexe nulpunten

Zijn er twee samenvallende nulpunten p en p , dan kunnen we ons recept simpel aanpassen: de algemene oplossing is dan $s_n = (\lambda + \mu n)p^n$. Als je je verveelt mag je dat zelf bewijzen, door te verifiëren dat de oplossingsverzameling weer een 2-dimensionale lineaire ruimte moet zijn, en dat de rijen $(1, p, p^2, p^3, \dots)$ en $(0, p, 2p^2, 3p^3, \dots)$ oplossingen zijn

Probleem 3. Bepaal een gesloten formule voor de rij $t_0, t_1, t_2, \dots$ die gegeven is door

$$\begin{cases} t_0 = 1 \\ t_1 = 3 \\ t_{n+2} = 2t_{n+1} + 2t_n \quad \text{voor alle } n \end{cases}$$

Oplossing. We bepalen eerst de algemene oplossing van $t_{n+2} - 2t_{n+1} - 2t_n = 0$ met behulp van ons recept. Het karakteristieke polynoom heeft nulpunten $1 \pm \sqrt{3}$ en dus is $t_n = \lambda(1 + \sqrt{3})^n + \mu(1 - \sqrt{3})^n$. Hierin gaan we de gegevens $t_0 = 1$ en $t_1 = 3$ invullen:

$$\left. \begin{aligned} t_0 = 1 &\implies \lambda(1 + \sqrt{3})^0 + \mu(1 - \sqrt{3})^0 = 1 \implies \lambda + \mu = 1 \\ t_1 = 3 &\implies \lambda(1 + \sqrt{3})^1 + \mu(1 - \sqrt{3})^1 = 3 \implies (\lambda + \mu) + \sqrt{3}(\lambda - \mu) = 3 \end{aligned} \right\} \implies \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \mu = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{cases}$$

En dus is $t_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{3}\right)(1 + \sqrt{3})^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\sqrt{3}\right)(1 - \sqrt{3})^n$

Probleem 4. De rij van Fibonacci $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ is de rij 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, $\dots$ die ontstaat door te beginnen met twee eentjes en vervolgens telkens op te tellen:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 = 1 \\ \varphi_{n+2} = \varphi_{n+1} + \varphi_n \quad \text{voor alle } n \geq 1 \end{cases}$$

Zoek een gesloten formule voor φ_n

Oplossing. De recursieve betrekking $\varphi_{n+2} - \varphi_{n+1} - \varphi_n = 0$ heeft als karakteristiek polynoom $x^2 - x - 1$, en de nulpunten hiervan zijn $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Hieruit volgt dat er reële getallen λ en μ bestaan waarvoor geldt:

$$\varphi_n = \lambda \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

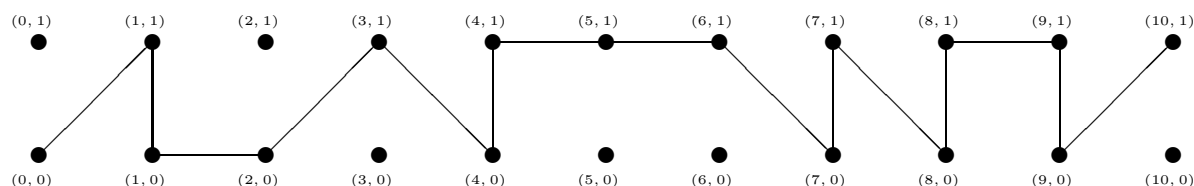
Welke die getallen λ en μ zijn, kun je eenvoudig achterhalen door de gegevens $\varphi_1 = 1$ en $\varphi_2 = 1$ hierin in te vullen. Desgewenst kun je ook de rij van Fibonacci naar links uitbreiden door $\varphi_0 = 0$ te definiëren. Invulling hiervan maakt het rekenwerk ietsje simpeler. Je vindt na een paar minuutjes zwoegen:

$$\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Probleem 5: beesten. Onder een n -beest verstaan we een rij van streepjes (ledematen), die ontstaat als we in het schema van roosterpunten $\{0, 1, 2, \dots\} \times \{0, 1\}$ bij $(0, 0)$ beginnen, en n keer naar een nieuw punt gaan. Hierbij zijn drie soorten ledematen toegestaan:

- (1) ‘pootjes’: streepjes van (k, i) naar $(k, 1 - i)$;
- (2) ‘rechtjes’: streepjes van (k, i) naar $(k + 1, i)$;
- (3) ‘schuintjes’: streepjes van (k, i) naar $(k + 1, 1 - i)$.

Als voorbeeld zie je hier een 15-beest met vijf pootjes en zes schuintjes:



Het probleem is: hoeveel n -beesten zijn er mogelijk?

Oplossing. Een beest dat als laatste ledemaatje een pootje heeft, noemen we ‘eindpotig’. We definiëren:

$$\begin{aligned} s_n &\stackrel{\text{def}}{=} \text{het aantal mogelijke } n\text{-beesten} \\ a_n &\stackrel{\text{def}}{=} \text{het aantal mogelijke eindpotige } n\text{-beesten} \\ b_n &\stackrel{\text{def}}{=} \text{het aantal mogelijke niet-eindpotige } n\text{-beesten} \end{aligned}$$

We kunnen nu inzien:

- (1) $s_n = a_n + b_n$ (dat is vanzelfsprekend)
- (2) $a_{n+1} = b_n$. Bewijs: pak een eindpotig $(n + 1)$ -beest en hak zijn laatste pootje eraf. Wat houdt je over? Juist ja, een niet-eindpotig n -beest $\square$
- (3) $b_{n+1} = 2s_n$. Bewijs: ieder n -beest kun je op precies twee manieren uitbreiden tot een niet-eindpotig $(n + 1)$ -beest, want je kunt er een rechtje of een schuintje aan vastplakken $\square$

We gaan nu handig spelen met deze resultaten, waarbij we proberen een recursieve betrekking voor s_n te vinden. Dat lukt als volgt: Optelling van (2) en (3) levert $s_{n+1} = 2s_n + b_n$. Hierin mag je volgens (3) de term b_n vervangen door $2s_{n-1}$. Resultaat: $s_{n+1} = 2s_n + 2s_{n-1}$. Verder is $s_1 = 3$ en $s_2 = 8$ (dat kun je inzien door kleine beestjes te tekenen en te tellen). Als je handig bent kun je de rij $s_1, s_2, s_3, \dots$ naar links uitbreiden met $s_0 = 1$. Dat bespaart heel wat rekenwerk, want opeens zie je dat Probleem 5 hetzelfde is als Probleem 3. Gelijke problemen hebben (meestal) gelijke oplossingen, en dus

$$s_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{3}\right)(1 + \sqrt{3})^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\sqrt{3}\right)(1 - \sqrt{3})^n$$

Opgave 10. Als iemand beweert dat er ruim $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{3})(1 + \sqrt{3})^{1001}$ verschillende 1001-beesten bestaan, wat doe je dan?

- je verklaart hem voor gek
- je geeft haar gelijk

Opgave 11. Bewijs dat $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{3})(1 + \sqrt{3})^{73} + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\sqrt{3})(1 - \sqrt{3})^{73}$ een geheel getal is

Probleem 6: gekleurde beesten. We beschouwen nu ‘gekleurde n -beesten’, waarbij de pootjes geel of groen zijn, de schuintjes rood, bruin of violet, en de rechtjes blauw of paars. Hoeveel gekleurde n -beesten bestaan er?

Oplossing. Zij t_n het aantal verschillende gekleurde n -beesten, waarvan er u_n eindpotig zijn en v_n niet-eindpotig. We kunnen dan inzien: $v_{n+1} = 5t_n$ en $u_{n+1} = 2v_n$. Dit leidt na enig gegoochel tot de recursieve betrekking $t_{n+1} = 5t_n + 10t_{n-1}$. De karakteristieke vergelijking luidt $x^2 = 5x + 10$, en deze heeft (hoera!) twee oplossingen: $\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{65}$ en $\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{65}$. Dus $t_n = \lambda(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{65})^n + \mu(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{65})^n$, waarbij we λ en μ kunnen uitrekenen door $n = 1$ en $n = 2$ in te vullen. Dit levert de volgende fraaie formule voor het aantal gekleurde n -beesten:

$$t_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{9}{130}\sqrt{65}\right) \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{65}\right)^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{9}{130}\sqrt{65}\right) \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{65}\right)^n$$

Probleem 7: besturing van een satelliet. Een satelliet wordt vanaf de aarde bestuurd. De afwijking van de ideale baan op tijdstip n zullen we s_n noemen. Laten we aannemen: $s_0 = 2$ en $s_1 = 1$. Ons besturingssysteem werkt als volgt: het meet de afwijking s_n en zendt een signaal uit dat de baan met $-s_n$ corrigeert. Dit signaal bereikt de satelliet pas op tijdstip $n + 1$, met als gevolg dat $s_{n+2} = s_{n+1} - s_n$. Beschrijf het gedrag van de satelliet uit deze gegevens

$$\begin{cases} s_0 = 2 \\ s_1 = 1 \\ s_{n+2} = s_{n+1} - s_n \end{cases}$$

Oplossing. We lossen de recursieve betrekking $s_{n+2} - s_{n+1} + s_n = 0$ op met ons recept: het bijbehorende karakteristieke polynoom $x^2 - x + 1$ heeft weliswaar geen reële nulpunten, maar daar laat de hedendaagse student zich niet meer door afschrikken. Met behulp van wat theorie uit hoofdstuk 3 van Wiskunde 2 vindt hij de twee complexe nulpunten $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ en $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ en dus $s_n = \lambda\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)^n + \mu\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)^n$. Als je hierin de begingegevens $s_0 = 2$ en $s_1 = 1$ invult vind je $\lambda = \mu = 1$ en dus

$$s_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)^n$$

Het afwijkingsgedrag van de satelliet is dus periodiek, want $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)^6 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)^6 = 1$ en dus $s_{n+6} = s_n$, zodat de eerste zes afwijkingen $(2, 1, -1, -2, -1, 1)$ telkens herhaald worden. In opgave 22 gaan we een slimmer besturingssysteem voor deze satelliet ontwerpen

Orde 3. Homogene lineaire recursies van hogere orde kunnen op analoge wijze opgelost worden. Bijvoorbeeld orde 3:

$$as_n + bs_{n-1} + cs_{n-2} + ds_{n-3} = 0 \quad (\text{waarbij } a \neq 0 \text{ en } d \neq 0)$$

Het karakteristieke polynoom is dan $ax^3 + bx^2 + cx + d$ en de bijbehorende mogelijke recepten zijn:

- Er zijn drie verschillende nulpunten p, q, r . Dan $s_n = \lambda p^n + \mu q^n + \nu r^n$
- Er is slechts één nulpunt p (met multipliciteit 3). Dan $s_n = (\lambda n^2 + \mu n + \nu) \cdot p^n$
- Er zijn twee nulpunten: p (multipliciteit 2) en q (multipliciteit 1).
Dan $s_n = (\lambda n + \mu)p^n + \nu q^n$

De oplossingsverzameling van een homogene lineaire recursie van orde k is dus een k -dimensionale lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^\infty$ of, als de nulpunten van het karakteristieke polynoom complex zijn, van $\mathbb{C}^\infty$

Probleem 8. Bereken s_n als $s_1 = 0$, $s_2 = 4$, $s_3 = 1$ en $s_n - 7s_{n-1} + 16s_{n-2} - 12s_{n-3} = 0$

Oplossing Karakteristieke polynoom: $x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = (x-2)^2(x-3)$.

Dus $s_n = (\lambda n + \mu) \cdot 2^n + \nu \cdot 3^n$, waarbij we λ , μ en ν uit $s_{1,2,3}$ kunnen berekenen.

Resultaat: $s_n = \left(\frac{19}{4}n + \frac{11}{4}\right) \cdot 2^n - 5 \cdot 3^n$

Inhomogene recursie. We onderzoeken de recursieve vergelijking

$$as_n + bs_{n-1} + cs_{n-2} = f(n)$$

Als de rijen $u_1, u_2, u_3, \dots$ en $v_1, v_2, v_3, \dots$ aan deze vergelijking voldoen, dan voldoet de ‘verschilrij’ $u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3, \dots$ aan de ‘bijbehorende’ homogene vergelijking $as_n + bs_{n-1} + cs_{n-2} = 0$. Dit inzicht levert ons het volgende recept voor het oplossen van $as_n + bs_{n-1} + cs_{n-2} = f(n)$:

- (1) Zoek (door dapper proberen) één oplossing van deze inhomogene vergelijking
- (2) Bepaal de algemene oplossing van de bijbehorende homogene vergelijking
- (3) Tel de resultaten van (1) en (2) bij elkaar op

We kunnen dit recept ook zo formuleren: de oplossingsverzameling van $as_n + bs_{n-1} + cs_{n-2} = f(n)$ is ofwel leeg, ofwel de lineaire variëteit $\vec{p} + \mathbf{V}$ waarbij $\vec{p}$ één oplossing is, en $\mathbf{V}$ de lineaire ruimte is van alle oplossingen van $as_n + bs_{n-1} + cs_{n-2} = 0$. We zijn dit grappige verschijnsel al eerder tegengekomen in hoofdstuk 5 van Wiskunde 2 (differentiaalvergelijkingen) en hoofdstuk 3 van Lineaire Algebra (stelsels van vergelijkingen)

Probleem 9. We zoeken alle oplossingen van $s_n - 8s_{n-1} + 15s_{n-2} = n^2$

Oplossing. We volgen het bovenstaande recept:

- (1) Na enig speurwerk vinden we één oplossing: $s_n = \frac{1}{8}n^2 + \frac{11}{16}n + \frac{69}{64}$
- (2) De bijbehorende homogene vergelijking $s_n - 8s_{n-1} + 15s_{n-2} = 0$ heeft als algemene oplossing:
 $s_n = \lambda \cdot 3^n + \mu \cdot 5^n$
- (3) Dus de algemene oplossing van $s_n - 8s_{n-1} + 15s_{n-2} = n^2$ is $s_n = \frac{1}{8}n^2 + \frac{11}{16}n + \frac{69}{64} + \lambda \cdot 3^n + \mu \cdot 5^n$

Opmerking. Wellicht schudt de lezer mismoedig het getergde hoofd bij het lezen van optimistische kreten als ‘door dapper proberen’ en ‘na enig speurwerk’. Speurwerk is allerm minst enig, en dapperheid is voor mij — een snel op tilt slaande zenuwpees — niet weggelegd als die suffe Gielen tijdens het gevreesde uur van de waarheid (het tentamen) zo stom staat te grijnzen, denk je dan.

Daarom dit advies: probeer iets van hetzelfde ‘type’ als het rechterlid. Is bijvoorbeeld het rechterlid n^2 , dan probeer je een veelterm van graad 2. Of, als dat mislukt, van graad 3

Probleem 10. Zoals je wellicht zult weten, bestaan er 5^{25} rijtjes van lengte 25 van aapjes, beertjes, hondjes, konijntjes en poesjes.

In hoeveel van deze 298023223876953125 rijtjes is het aantal poesjes oneven?

Oplossing. Zij s_n het aantal rijtjes van lengte n van aapjes, beertjes, hondjes, konijntjes en poesjes, waarin het aantal poesjes oneven is. We kunnen deze s_n rijtjes onderscheiden in twee typen:

- (1) rijtjes die eindigen met een poesje
- (2) rijtjes die niet eindigen met een poesje

Van type (1) zijn er $5^{n-1} - s_{n-1}$, want als je het laatste poesje weglaat, zie je een rijtje van lengte $n - 1$ waarin het aantal poesjes even is.

Van type (2) zijn er $4s_{n-1}$, want het laatste beestje (een aapje, beertje, hondje of konijntje) wordt voorafgegaan door een rijtje (lengte $n - 1$) waarin het aantal poesjes oneven is.

Conclusie: $s_n = (5^{n-1} - s_{n-1}) + 4s_{n-1}$, dus $s_n - 3s_{n-1} = 5^{n-1}$. We grijpen naar ons recept:

- De bijbehorende homogene recursie $s_n - 3s_{n-1} = 0$ heeft als algemene oplossing $\lambda \cdot 3^n$
- Een speciale oplossing van $s_n - 3s_{n-1} = 5^{n-1}$ vind je door $s_n = C \cdot 5^n$ te proberen. Dit lukt voor $C = \frac{1}{2}$
- De algemene oplossing van $s_n - 3s_{n-1} = 5^{n-1}$ is dus $s_n = \lambda \cdot 3^n + \frac{1}{2} \cdot 5^n$
- Tenslotte kun je λ uitrekenen door (bijvoorbeeld) $s_0 = 0$ in te vullen: $\lambda = -\frac{1}{2}$.

$$\text{Dus } s_n = \frac{5^n - 3^n}{2} \text{ en dus } s_{25} = \frac{5^{25} - 3^{25}}{2} = 149011188294171841$$

Probleem 11. In mijn huis zijn vandaag (op dag 0) 1000 vliegen en 50 spinnen

$$\begin{cases} v_n & \stackrel{\text{def}}{=} & \text{aantal vliegen in huis op dag } n \\ s_n & \stackrel{\text{def}}{=} & \text{aantal spinnen in huis op dag } n \end{cases}$$

v_n zou in een spinloos huis 1000 zijn, maar wordt nadelig beïnvloed door het aantal spinnen dat de voorgaande dag actief was: $v_n = 1000 - 10s_{n-1}$. Anderzijds zal het aantal spinnen toenemen als er veel vliegen zijn: $s_{n+1} = s_n + \frac{1}{10}v_n - 50$ (de term -50 kan verklaard worden door de aanwezigheid van stofzuiger en poezen). Uit deze gegevens kun je van dag tot dag de toestand in mijn huis bijhouden:

n	0	1	2	3	4	5	...
v_n	1000	500	0	0	500	1000	...
s_n	50	100	100	50	0	0	...

Bepaal gesloten formules voor s_n en v_n

Oplossing. Vul $v_n = 1000 - 10s_{n-1}$ in in $s_{n+1} = s_n + \frac{1}{10}v_n - 50$. Je vindt dan $s_{n+1} - s_n + s_{n-1} = 50$, en hierop pas je ons recept toe:

- (1) Je vindt één oplossing door $s_n = c$ te proberen. Dit blijkt te lukken voor $c = 50$
- (2) De bijbehorende homogene vergelijking $s_{n+1} - s_n + s_{n-1} = 0$ blijkt de 2-dimensionale complexe oplossingsruimte $s_n = \lambda \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)^n + \mu \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)^n$ te hebben
- (3) De oplossingsverzameling van de inhomogene vergelijking $s_{n+1} - s_n + s_{n-1} = 50$ is dus de lineaire variëteit

$$s_n = 50 + \lambda \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)^n + \mu \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)^n$$

- (4) Door nu $s_0 = 50$ en $s_1 = 100$ in te vullen kun je λ en μ berekenen, waarna je ook nog even v_n moet bepalen uit $v_n = 1000 - 10s_{n-1}$. De resultaten zijn:

$$\begin{cases} s_n = 50 + \frac{50}{3}i\sqrt{3} \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)^n - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)^n \right) \\ v_n = 500 - \frac{500}{3}i\sqrt{3} \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)^{n-1} \right) \end{cases}$$

Als geoefend complexrekenaar zie je wellicht het periodieke karakter van de toestand in mijn huis: $s_{n+6} = s_n$ en $v_{n+6} = v_n$

Opgaven hoofdstuk 7

Opgave 12. Een ‘zaat hermenieke’ (dat is een soort sjpaskapel) heeft een zéér beperkt repertoire: slechts twee verschillende deuntjes. Op hoeveel manieren kan het een programma van n deuntjes samenstellen, als niet drie keer achter elkaar hetzelfde deuntje gespeeld mag worden?

Opgave 13. Ons alfabet telt 26 letters, zodat we in principe 26^n woorden van lengte n zouden kunnen verzinnen. Zo’n woord heet vies als de combinatie BA erin voorkomt, anders heet het net. Bijvoorbeeld: ZBAE is vies, BBKACJ is net. Hoeveel nette woorden van lengte n kun je verzinnen?

Opgave 14. Ik werp n keer een dobbelsteen. Hoe groot is de kans dat ik hierbij twee keer achter elkaar een zes werp?

Opgave 15. Hoeveel getallen van duizend cijfers bestaan er, waarin nergens drie gelijke cijfers achter elkaar voorkomen? (We bedoelen natuurlijk natuurlijke getallen in hun ‘gewone’ tientallige notatie)

Opgave 16. We willen een (vaste) rechthoek (afmeting $2 \times n$) betegelen met tegels van afmeting 2×1 . Op hoeveel manieren kan dat?

Opgave 17. Een geluksgetal is een natuurlijk getal, dat in zijn gewone tientallige schrijfwijze niet het patroon 13 bevat. Hoeveel geluksgetallen $\leq 10^{23}$ bestaan er?

Opgave 18. Alpje en Bopo gooien telkens een muntstuk op. Bopo heeft met zijn sterke tandjes dit muntstuk stiekem enigszins verbogen, zó dat de kans op ‘kop’ 51% is, en de kans op ‘munt’ slechts 49%. Zij spelen het volgende leuke spelletje: bij ‘kop’ moet Alpje aan Bopo 1 euro betalen, bij ‘munt’ moet Bopo aan Alpje 1 euro betalen. Alpje begint met 25 euro, Bopo met 10 euro. Ze spelen totdat een van hen geen geld meer heeft. Hoe groot is de kans dat Alpje wint?

Opgave 19. Bereken het aantal natuurlijke getallen $< 10^{100}$ met een oneven aantal zevens in hun normale (tientallige) notatie

Opgave 20. Zij a_n het aantal eindige rijtjes van eentjes en tweetjes met som n . Bijvoorbeeld: $a_5 = 8$, want er zijn acht zulke rijtjes met som 5:

1, 1, 1, 1, 1 1, 1, 1, 2 1, 1, 2, 1 1, 2, 1, 1 2, 1, 1, 1 1, 2, 2 2, 1, 2 2, 2, 1

Bereken a_n

Opgave 21. Een rij $a_1, a_2, a_3, \dots$ voldoet aan $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n$ voor alle n . Verder is $a_1 = 0$ en $a_2 = 1$. Bepaal een algemene formule voor a_n

Opgave 22. Beschrijf het gedrag van de satelliet uit Probleem 7 als we het besturingssysteem zodanig wijzigen dat

a) de correctie $-\frac{1}{2}s_n$ bedraagt b) de correctie $-\frac{1}{4}s_n$ bedraagt

Opgave 23. Bereken a_n uit
$$\begin{cases} a_0 = 1, & a_1 = 2, & a_2 = 8 \\ a_n + 6a_{n-1} + 12a_{n-2} + 8a_{n-3} = 0 & \text{voor alle } n \geq 3 \end{cases}$$

Opgave 24. Op hoeveel manieren kan ik een 1×100 -pad betegelen als ik de beschikking heb over onbeperkte voorraden van:

- 1×1 -tegels in 2 verschillende kleuren
- 1×2 -tegels in 15 verschillende kleuren

Opgave 25. Ik sta op de rand van een zwembad met ijskoud water, en zie een schoteltje heerlijk warme melk vijf meter van mij verwijderd. Het baasje gooit telkens een eerlijk muntstuk op. Bij ‘kop’ mag ik een meter vooruit (richting melk), bij ‘munt’ moet ik een meter achteruit. Bereken de kans dat ik de melk bereik zonder in het water te vallen

Opgave 26. Dezelfde vraag met een kleine spelregelwijziging: bij ‘kop’ mag ik twee meter vooruit. (het rekenwerk bij deze opgave is niet mals; probeer maar eens hoe ver je komt)

Opgave 27. Zij $a_0, a_1, a_2, \dots$ de rij waarvoor geldt:

$$\begin{cases} a_0 = 3 \\ a_{n+1} = n + 3 - 2a_n \end{cases} \text{ voor alle } n$$

Bepaal een gesloten formule voor a_n

Opgave 28.

- Hoeveel rijtjes uit $\{0, 1\}^n$ hebben een even aantal nullen?
- Hoeveel rijtjes uit $\{0, 1, 2, 3\}^n$ hebben een even aantal nullen?

Opgave 29. Ik sta op de rand van een ravijn, en zie een heerlijk glas rode wijn vijf meter van mij verwijderd. Ik gooi telkens met een dobbelsteen. Gooi ik 6, dan moet ik een meter achteruit (richting afgrond). Gooi ik een ander getal, dan mag ik een meter vooruit (richting wijn). Bereken de kans dat ik de wijn bereik zonder in het ravijn te storten

Opgave 30. (zie Probleem 11)

In de spinnenvergadering wordt met een krappe meerderheid besloten, voortaan nog slechts een kwart zoveel vliegen te consumeren, in de hoop zodoende een stabielere diersoort te worden. Is deze hoop ijdel?

$$\text{Bereken } s_n \text{ en } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \text{ uit de gegevens } \begin{cases} s_0 = 50 \\ s_{n+1} = s_n + \frac{1}{10}v_n - 50 \\ v_0 = 1000 \\ v_n = 1000 - \frac{5}{2}s_{n-1} \end{cases}$$

Zelfstudiepakketje bij hoofdstuk 7

Opgave 1. Bepaal een recursieve betrekking voor de rij $s_0, s_1, s_2, s_3, \dots$ die gedefinieerd wordt door

$s_n \stackrel{\text{def}}{=} \text{het aantal oplossingen } (a, b, c) \text{ van } a + b + 3c = n, \text{ waarbij } a, b \text{ en } c \text{ gehele getallen } \geq 0 \text{ zijn}$

Opgave 2. Zij s_n het aantal begrensde gebieden dat je maximaal kunt krijgen als je in het vlak n cirkels tekent

- a) Bepaal een recursieve betrekking voor s_n
- b) Bepaal een gesloten formule voor s_n

Opgave 3. Bereken het aantal rijen $x_1, \dots, x_{100}$ van getallen uit $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ waarin nergens twee drietjes naast elkaar staan

Opgave 4. Zij s_n het aantal deelverzamelingen van $\{0, 1, \dots, n-1\}$ waar geen twee opeenvolgende getallen inzitten

- a) Bereken s_3
- b) Bereken s_{100}

Opgave 5. Ik ben puissant rijk. Laten we zeggen: ik heb de beschikking over zoveel geld als ik maar wil. Jij daarentegen bezit slechts drie euro. We doen het volgende spelletje: ik gooi telkens een dobbelsteen; komt deze op ‘zes’ dan moet jij mij een euro betalen; zo niet dan betaal ik jou een euro. Hoe groot is de kans dat jij hierbij ooit failliet raakt?

Opgave 6. We maken dierenrijtjes van lengte 10. Hierin mogen voorkomen: Aapjes, Beertjes, Hondjes, Poesjes. Zoals je ongetwijfeld zult vermoeden, bestaan er 4^{10} van dergelijke rijtjes

- a) In hoeveel van deze rijtjes staan nergens twee gelijke dieren naast elkaar?
- b) In hoeveel van deze rijtjes staan nergens drie gelijke dieren naast elkaar?

Opgave 7. Zij $s_0, s_1, s_2, \dots$ de rij van natuurlijke getallen die vastgelegd wordt door

$$\begin{cases} s_0 = s_1 = 1 \\ s_{n+2} = 4s_n + 1 \quad \text{voor alle } n \end{cases}$$

Bepaal een gesloten formule voor s_n

Opgave 8. Zij n een natuurlijk getal. Hoeveel rijtjes uit $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}^n$ hebben een even aantal nullen?

Opgave 9. Zij s_n het aantal niet-congruente driehoeken met gehele zijden en met langste zijde n . Bijvoorbeeld: $s_5 = 9$, want de driehoeken met langste zijde 5 zijn:

$$\begin{array}{lll} (5, 5, 5) & (3, 4, 5) & (2, 5, 5) \\ (2, 4, 5) & (4, 5, 5) & (3, 3, 5) \\ (3, 5, 5) & (4, 4, 5) & (1, 5, 5) \end{array}$$

(we noteren hierbij een driehoek door de lengten van de zijden in opklimmende volgorde te zetten)

- a) Bepaal een recursieve betrekking voor s_n
- b) Bewijs dat s_n het natuurlijke getal is dat het dichtst ligt bij $\frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n$

Oplossingen

Opgave 1. We kunnen de oplossingen van $a + b + 3c = n$ onderscheiden in oplossingen waarbij $c = 0$ en oplossingen waarbij $c \neq 0$.

Het aantal oplossingen met $c = 0$ is $n + 1$, want de oplossingen met $c = 0$ zijn:

$$(0, n, 0), (1, n - 1, 0), (2, n - 2, 0), \dots, (n, 0, 0)$$

Het aantal oplossingen met $c \neq 0$ is s_{n-3} , want iedere oplossing (a, b, c) van $a + b + 3c = n$ met $c \neq 0$ correspondeert met een oplossing $(a, b, c - 1)$ van $\dots = n - 3$

$$\text{Dus } s_n = (n + 1) + s_{n-3}$$

Opgave 2.

a) Het maximale aantal begrensde gebieden krijg je, als elk tweetal cirkels twee snijpunten heeft en er geen samenvallende snijpunten zijn. Op de rand van de $n + 1$ -ste cirkel liggen dan $2n$ snijpunten, en dus is $s_{n+1} = s_n + 2n$

b) $s_n = 1 + 2 + 4 + 6 + \dots + 2(n - 1) = n^2 - n + 1$

Opgave 3. Zij s_n het aantal rijtjes $x_1, \dots, x_{100}$ zonder opeenvolgende drietjes, en zij

$$\begin{cases} a_n & \stackrel{\text{def}}{=} & \text{het aantal van deze rijtjes waarvoor } x_{100} = 3 \\ b_n & \stackrel{\text{def}}{=} & \text{het aantal van deze rijtjes waarvoor } x_{100} \neq 3 \end{cases}$$

$$\text{Dan } \begin{cases} a_n + b_n = s_n \\ a_{n+1} = b_n \\ b_{n+1} = 4s_n \end{cases} \text{ en dus } s_{n+1} = 4s_n + 4s_{n-1}$$

We gaan nu met behulp van de theorie van dit hoofdstuk een gesloten formule voor s_n bepalen.

De karakteristieke veelterm $x^2 - 4x - 4$ heeft als nulpunten $2 + 2\sqrt{2}$ en $2 - 2\sqrt{2}$, en dus

$s_n = \lambda(2 + 2\sqrt{2})^n + \mu(2 - 2\sqrt{2})^n$. Door $s_0 = 1$ en $s_1 = 5$ in te vullen, vinden we nu:

$$\begin{aligned} s_n &= \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\sqrt{2}\right)(2 + 2\sqrt{2})^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8}\sqrt{2}\right)(2 - 2\sqrt{2})^n \\ \text{en dus } s_{100} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\sqrt{2}\right)(2 + 2\sqrt{2})^{100} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8}\sqrt{2}\right)(2 - 2\sqrt{2})^{100} \\ &= 247482492709874927052478319207005852920730761005049694925160678686720 \end{aligned}$$

Opgave 4.

a) $s_3 = 5$, want er zijn vijf deelverzamelingen van $\{0, 1, 2\}$ zonder opvolgers:

$$\emptyset \quad \{0\} \quad \{1\} \quad \{2\} \quad \{0, 2\}$$

b) Na enig puzzelwerk heb je hopelijk ingezien dat $s_{n+1} = s_n + s_{n-1}$. De rij $1, s_0, s_1, s_2, \dots$ is dus de rij van Fibonacci, en dus

$$s_{100} = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{10}\sqrt{5}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^{100} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{10}\sqrt{5}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^{100} = 927372692193078999176$$

Opgave 5. Zij s_n de kans dat jij ooit failliet raakt als je met n euro begint. Dan is $s_n = \frac{1}{6}s_{n-1} + \frac{5}{6}s_{n+1}$.

De bij deze recursie behorende karakteristieke vergelijking is $\frac{5}{6}x^2 - x + \frac{1}{6} = 0$, en heeft als oplossingen:

1 en $\frac{1}{5}$. Dus $s_n = \lambda + \mu\left(\frac{1}{5}\right)^n$. Uit $s_0 = 1$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$ volgt: $\lambda = 0$ en $\mu = 1$. Dus $s_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$, en dus

$$s_3 = \frac{1}{125}$$

Opgave 6. a) Een eenvoudig probleempje. Het maken van een dierenrijtje zonder gelijke dieren achter elkaar komt neer op:

- (1) Kies een dier en zet het op de eerste plaats (dit kan op 4 manieren)
- (2) kies een dier $\neq$ het eerste dier, en zet het op de tweede plaats (kan op 3 manieren)
- $\vdots$
- (10) kies een dier $\neq$ het negende dier, en zet het op de tiende plaats (kan op 3 manieren)

De uitkomst is dus $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 4 \cdot 3^9$

b) We definiëren:

$$\begin{aligned} s_n &\stackrel{\text{def}}{=} \text{het aantal } n\text{-rijtjes waarin nergens drie gelijke dieren naast elkaar staan} \\ a_n &\stackrel{\text{def}}{=} \text{het aantal } n\text{-rijtjes} \begin{cases} \text{zonder drie gelijke dieren naast elkaar} \\ \text{eindigend op twee gelijke dieren} \end{cases} \\ b_n &\stackrel{\text{def}}{=} \text{het aantal } n\text{-rijtjes} \begin{cases} \text{zonder drie gelijke dieren naast elkaar} \\ \text{niet-eindigend op twee gelijke dieren} \end{cases} \end{aligned}$$

Je kunt nu eenvoudig inzien:

$$\begin{aligned} s_n &= a_n + b_n && \text{(dat spreekt vanzelf)} \\ a_{n+1} &= b_n && \text{(want als je uit zo'n } n+1\text{-rijtje het laatste dier schrapt,} \\ &&& \text{is het restant een } n\text{-rijtje dat niet eindigt op twee gelijke dieren)} \\ b_{n+1} &= 3s_n && \text{(want ieder toegestaan } n\text{-rijtje is op drie manieren uit te} \\ &&& \text{breiden tot een } n+1\text{-rijtje dat niet op twee gelijke dieren eindigt)} \end{aligned}$$

Na enige sluwe manipulaties met deze drie betrekkingen ontdek je weldra: $s_{n+1} = 3s_n + 3s_{n-1}$

Via de in dit hoofdstuk behandelde methode kun je hieruit de volgende gesloten formule destilleren:

$$\begin{aligned} s_n &= \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{21}\sqrt{21}\right) \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{21}\right)^n + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{21}\sqrt{21}\right) \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{21}\right)^n \\ \text{en dus } s_{10} &= \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{21}\sqrt{21}\right) \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{21}\right)^{10} + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{21}\sqrt{21}\right) \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{21}\right)^{10} = 676836 \end{aligned}$$

Opgave 7.

- (1) De bijbehorende homogene vergelijking luidt $s_{n+2} - 4s_n = 0$. De oplossingen hiervan kun je vinden via de karakteristieke vergelijking $x^2 - 4 = 0$. Resultaat: $\lambda \cdot 2^n + \mu \cdot (-2)^n$
- (2) Een speciale oplossing van $s_{n+2} - 4s_n = 1$ vind je door een constante rij te proberen. Dit lukt: substitutie van $s_n = C$ leidt tot $C = -\frac{1}{3}$
- (3) De algemene oplossing van $s_{n+2} - 4s_n = 1$ vind je, door de resultaten van (1) en (2) op te tellen: $s_n = -\frac{1}{3} + \lambda \cdot 2^n + \mu \cdot (-2)^n$. Tenslotte kun je λ en μ uitrekenen door $s_0 = s_1 = 1$ in te vullen. Dit resulteert in de volgende gesloten formule:

$$s_n = -\frac{1}{3} + 2^n + \frac{1}{3}(-2)^n$$

Opgave 8. Zij s_n het aantal rijtjes uit $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}^n$ met een even aantal nullen. Van deze s_n rijtjes eindigen er $6^{n-1} - s_{n-1}$ op een nul (omdat er $6^{n-1} - s_{n-1}$ rijtjes van lengte $n-1$ zijn die een oneven aantal nullen bevatten), en $5s_{n-1}$ op een ander getal. Dus $s_n = 6^{n-1} - s_{n-1} + 5s_{n-1}$, en dus $s_n - 4s_{n-1} = 6^{n-1}$. We passen nu het recept voor inhomogene recursieve betrekkingen toe:

- (1) We vinden één speciale oplossing door $s_n = c \cdot 6^n$ te proberen. Dit blijkt te lukken voor $c = \frac{1}{2}$
- (2) De algemene oplossing van de bijbehorende homogene vergelijking $s_n - 4s_{n-1} = 0$ is: $s_n = \lambda \cdot 4^n$
- (3) De algemene oplossing van $s_n - 4s_{n-1} = 6^{n-1}$ is dus: $s_n = \frac{1}{2} \cdot 6^n + \lambda \cdot 4^n$
- (4) Tenslotte kunnen we λ uitrekenen door bijvoorbeeld $s_0 = 1$ in te vullen. Dit levert: $\lambda = \frac{1}{2}$
- (5) Dus $s_n = \frac{1}{2} \cdot 6^n + \frac{1}{2} \cdot 4^n$

Opgave 9.

- a) (het idee achter mijn oplossing is: de meeste driehoeken met langste zijde $n + 1$ ontstaan uit een driehoek met langste zijde n door de langste twee zijden allebei eentje langer te maken)
 Zij V_n de verzameling van alle driehoeken met gehele zijden en langste zijde n . Formeel gedefinieerd:

$$V_n \stackrel{\text{def}}{=} \text{de verzameling van alle } (a, b, n) \in \mathbb{N}^3 \text{ die voldoen aan } \begin{cases} 1 \leq a \leq b \leq n \\ a + b > n \end{cases}$$

We definiëren nu een functie $F : V_n \rightarrow V_{n+1}$ door $F(a, b, n) = (a, b+1, n+1)$. Deze F is injectief (dat wil zeggen: verschillende driehoeken uit V_n hebben verschillende F -beelden) maar niet surjectief (dat wil zeggen: niet alle driehoeken uit V_{n+1} zijn F -beelden), dus $s_{n+1} = s_n + t_n$ waarbij t_n het aantal driehoeken uit V_{n+1} is die geen F -beeld zijn. Dat zijn precies de driehoeken van het type $(x, x, n+1)$, en dus is t_n het aantal natuurlijke getallen x waarvoor $x > \frac{n+1}{2}$ en $x \leq n+1$. De rest is simpel telwerk:

$$t_n = \begin{cases} \frac{n}{2} + 1 & \text{als } n \text{ even is} \\ \frac{n}{2} + \frac{1}{2} & \text{als } n \text{ oneven is} \end{cases} \implies s_{n+1} = \begin{cases} s_n + \frac{n}{2} + 1 & \text{als } n \text{ even is} \\ s_n + \frac{n}{2} + \frac{1}{2} & \text{als } n \text{ oneven is} \end{cases}$$

Als je wilt mag je deze recursieve betrekking als one-liner presenteren: $s_{n+1} = s_n + \frac{n}{2} + \frac{3}{4} + \frac{(-1)^n}{4}$

- b) Als je onze theorie toepast op de in (a) gevonden recursieve betrekking, vind je

$$s_n = \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}(-1)^n$$

en deze uitkomst verschilt hoogstens $\frac{1}{4}$ van $\frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n$