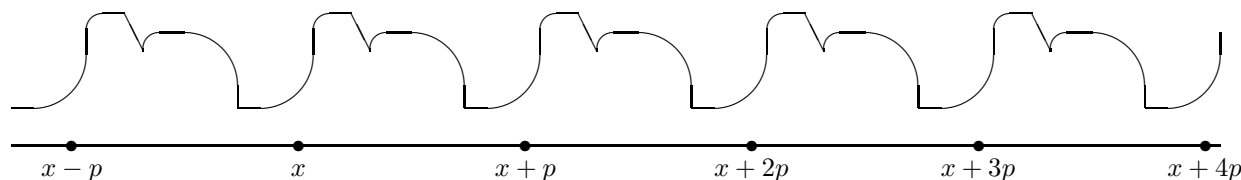


8. Fouriertheorie

Periodieke functies. Veel verschijnselen en processen hebben een periodiek karakter. Na een zekere tijd, de periode, komt hetzelfde patroon terug. Denk maar aan draaiende of heen en weer bewegende delen van machines, moleculen, atomen. Golven en vibraties, eb en vloed, cardiogram, ... We definiëren:

Een functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is periodiek met periode p als geldt: $f(x+p) = f(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$



Twee flauwe opmerkingen:

- Iedere functie f , gedefinieerd op $(a, a+p]$, kan voortgezet worden tot een periodieke functie op $\mathbb{R}$ (met periode p). Omgekeerd: een periodieke functie met periode p hoeven we maar op één interval van lengte p te bekijken om alles over die functie te weten.
- Een periodieke functie f met periode p heeft over ieder interval van lengte p dezelfde integraal:

$$\int_a^{a+p} f(x) dx = \int_b^{b+p} f(x) dx = \int_0^p f(x) dx = \int_{-\frac{1}{2}p}^{+\frac{1}{2}p} f(x) dx$$

Voorbeeld 1. $f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$. Deze functie f is periodiek met periode $p = \frac{2\pi}{\omega}$. Maak zelf een ruwe schets van f met $A = 2$, $\omega = 6\pi$ en $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Men noemt A de amplitude en ω de hoekfrequentie. Onder de frequentie (ν) verstaat men het aantal perioden per tijdseenheid: $\nu = \frac{1}{p} = \frac{\omega}{2\pi}$

Je kunt f ook schrijven als $f(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$ met $\begin{cases} a = A \sin \varphi \\ b = A \cos \varphi \end{cases}$

en omgekeerd is $a \cos \omega t + b \sin \omega t$ altijd weer in de vorm $A \sin(\omega t + \varphi)$ te brengen (hoe?)

Trigonometrische polynomen. Een trigonometrisch polynoom is een functie van het type

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (n \text{ is de } \underline{\text{orde}} \text{ van } T, \text{ althans als } a_n \neq 0 \text{ en/of } b_n \neq 0)$$

Voorbeeld 2. De functie T , gedefinieerd door $T(x) = 7 + \frac{3}{4} \cos 5x - 2 \sin 3x$, is een trigonometrisch polynoom van orde 5

Opmerkingen.

- De som van twee trigonometrische polynomen is weer een trigonometrisch polynoom
- Ook het product van twee trigonometrische polynomen is een trigonometrisch polynoom. Bewijs dit zelf, bijvoorbeeld door gebruik te maken van de volgende gelijkheden:

$$\begin{aligned} \sin p \sin q &= \frac{1}{2} (\cos(p-q) - \cos(p+q)) \\ \cos p \cos q &= \frac{1}{2} (\cos(p-q) + \cos(p+q)) \\ \sin p \cos q &= \frac{1}{2} (\sin(p-q) + \sin(p+q)) \end{aligned}$$

- Trigonometrische polynomen zijn periodiek met periode 2π

- De verzameling van alle trigonometrische polynomen van orde $\leq n$ is een lineaire ruimte, die we $\mathbb{TP}_n$ zullen noemen. Een basis van $\mathbb{TP}_n$ wordt gevormd door de functies $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_n$ die gedefinieerd worden door
$$\begin{cases} \mathbf{c}_k(x) = \cos kx \\ \mathbf{s}_k(x) = \sin kx \end{cases} \quad (\text{dus } \mathbf{c}_0 \text{ is de functie } t \mapsto 1)$$
- De verzameling van alle trigonometrische polynomen is een ∞ -dimensionale lineaire ruimte, die we $\mathbb{TP}$ zullen noemen
- Het is je misschien opgevallen, dat trigonometrische polynomen overeenkomsten vertonen met gewone veeltermen. Je hebt vorig jaar geleerd hoe je met gewone veeltermen allerlei ingewikkelde functies lokaal kunt benaderen (zie: Taylorreeksen). Deze ‘ingewikkelde functies’ moesten dan wel aan zekere ‘netheidseisen’ (zoals: differentieerbaarheid) voldoen.
Iets dergelijks gaan we nu wéér doen: we zullen allerlei ingewikkelde periodieke functies (met periode 2π) globaal gaan benaderen met trigonometrische polynomen. Aan de te benaderen functies f zullen we de volgende ‘netheidseisen’ stellen:

- 1) f is periodiek met periode 2π
- 2) f is continu in alle punten van $[-\pi, \pi]$, eventueel met uitzondering van eindig veel ‘breekpunten’
- 3) In zo’n breekpunt u is $f(u)$ gelijk aan het gemiddelde van de linker- en rechterlimiet:
$$f(u) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \uparrow u} f(x) + \lim_{x \downarrow u} f(x) \right)$$
- 4) Met uitzondering van de eventuele breekpunten en misschien nog enkele (eindig veel) andere punten waar f een ‘knik’ heeft (d.w.z.: de rechter- en linkerafgeleide bestaan maar zijn ongelijk) is f differentieerbaar in ieder punt van $[-\pi, \pi]$, en de afgeleide is continu en begrensd (tussen de uitzonderingspunten)

De functies die aan deze ‘netheidseisen’ voldoen, vormen een lineaire ruimte die we $\mathbb{B}$ zullen noemen. $\mathbb{TP}$ is een lineaire deelruimte van $\mathbb{B}$

Inproduct in $\mathbb{B}$. In de lineaire ruimte $\mathbb{B}$ (van alle ‘nette’ functies met periode 2π) definiëren we een inproduct door $\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx \quad \left(= \int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx \right)$

De bij dit inproduct behorende norm is: $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx}$

We hebben nu dus ook een ‘afstandsmaat’: $\|f - g\| =$ de afstand tussen f en g . Dit is natuurlijk een abstract soort ‘afstand’, en niet de afstand (in millimeters of lichtjaren) tussen de grafieken van f en g . We zullen de ‘afstand’ $\|f - T\|$ tussen een functie $f \in \mathbb{B}$ en een trigonometrisch polynoom T gebruiken als maat voor: hoe goed (of slecht) benadert T de functie f . Deze afstand $\|f - T\|$ is een soort ‘gemiddelde’ van alle afwijkingen $|f(x) - T(x)|$

Voorbeeld 3. Bereken de afstand tussen $\sin$ en $\cos$

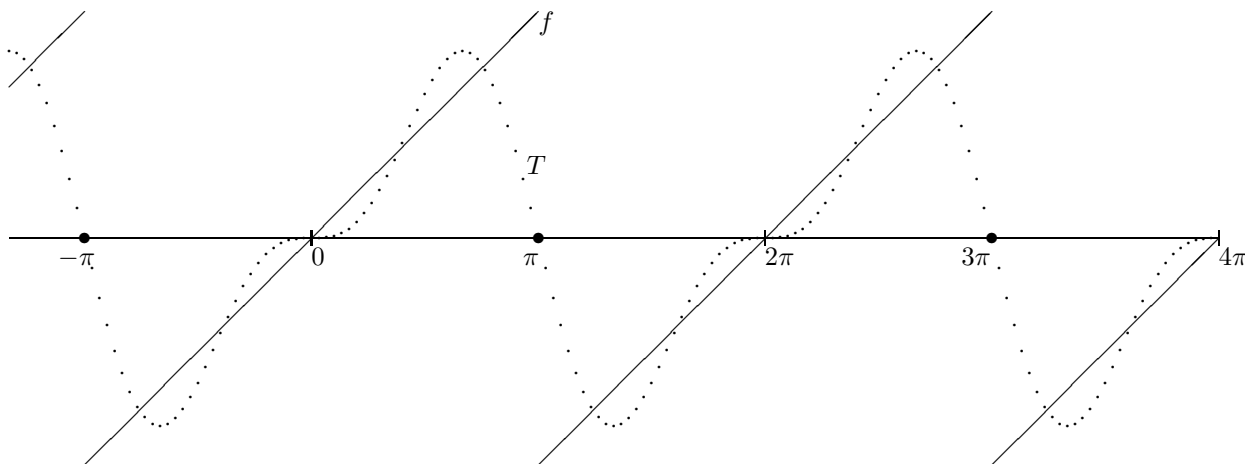
Oplossing. $\|\sin - \cos\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (\sin t - \cos t)^2 dt} = \sqrt{2\pi}$

Voorbeeld 4. Zij f de ‘zaagtand’-functie gedefinieerd door $\begin{cases} f \in \mathbb{B} \\ f(x) = x \quad \text{voor } x \in (-\pi, \pi) \end{cases}$

en zij T het trigonometrische polynoom met $T(x) = 2 \sin x - \sin 2x$. We gaan eens kijken of T een goede benadering van f is:

$$\|f - T\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T(x))^2 dx} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (x - 2 \sin x + \sin 2x)^2 dx} = \sqrt{\frac{2}{3}\pi^3 - 5\pi} \approx 2,23$$

T is dus een redelijke benadering van f . Maar het kan een stuk beter. We zullen verderop nog wel technieken ontwikkelen om véél betere benaderingen te vinden

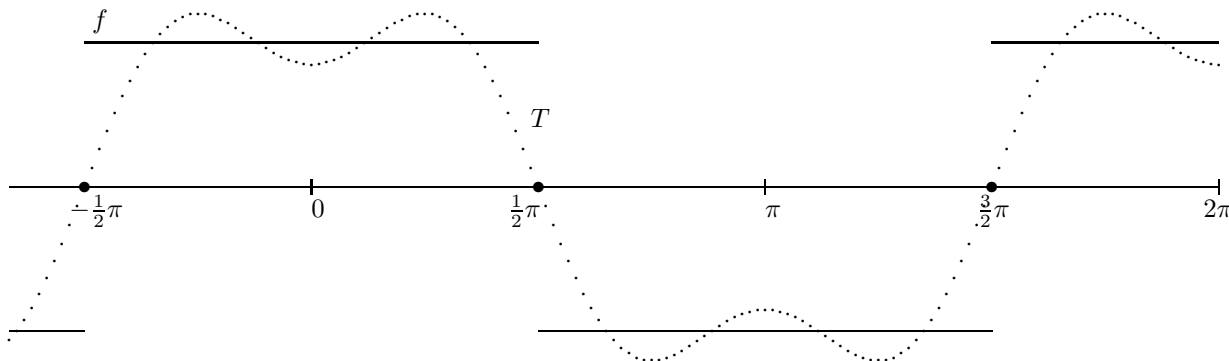


Voorbeeld 5. Zij f de ‘blokgolf’-functie gedefinieerd door $\begin{cases} f \in \mathbb{B} \\ f(x) = 1 \quad \text{voor } x \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi) \\ f(x) = -1 \quad \text{voor } x \in (\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi) \end{cases}$

en zij T het trigonometrische polynoom met $T(x) = \frac{4}{\pi} \cos x - \frac{4}{3\pi} \cos 3x$. We gaan eens kijken of T een goede benadering van f is:

$$\|f - T\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T(x))^2 dx} = 2\sqrt{\frac{\pi}{2} - \frac{40}{9\pi}} \approx 0,79$$

T is dus een zeer acceptabele benadering van f . Maar het kan nóg beter, zoals we straks zullen zien



Voorbeeld 6. Zij $f \in \mathbb{B}$. Welk trigonometrisch polynoom van orde $\leq n$ is de beste benadering van f ? Anders gezegd: voor welke $T \in \mathbb{TP}_n$ is $\|f - T\|$ minimaal?

Oplossing. De gezochte T is de projectie van f op $\mathbb{TP}_n$. Deze projectie berekenen we met de methode die we hiervoor in hoofdstuk 6 bedacht hebben. We maken daarbij handig gebruik van het feit, dat $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \dots, \mathbf{c}_n, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3, \dots, \mathbf{s}_n$ een orthogonale basis van $\mathbb{TP}_n$ is (zie opgave 8)

- 1) De projectie van f op $\mathbf{c}_0$ is $\frac{\langle f, \mathbf{c}_0 \rangle}{\|\mathbf{c}_0\|^2} \cdot \mathbf{c}_0 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right) \cdot \mathbf{c}_0$
- 2) De projectie van f op $\mathbf{c}_k$ (met $k \in \{1, 2, \dots, n\}$) is $\frac{\langle f, \mathbf{c}_k \rangle}{\|\mathbf{c}_k\|^2} \cdot \mathbf{c}_k = \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \right) \cdot \mathbf{c}_k$
- 3) De projectie van f op $\mathbf{s}_k$ (met $k \in \{1, 2, \dots, n\}$) is $\frac{\langle f, \mathbf{s}_k \rangle}{\|\mathbf{s}_k\|^2} \cdot \mathbf{s}_k = \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \right) \cdot \mathbf{s}_k$
- 4) De gezochte T is de som van deze $2n+1$ projecties: $T(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots + b_n \sin nx$ waarbij $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$, $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx$ (voor $k = 1, 2, \dots, n$) en $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx$

Fouriersom en Fourierreeks. Zij $f \in \mathbb{B}$. We gaan een paar namen en afkortingen invoeren voor de ingewikkelde rekentechnische uitdrukkingen uit voorbeeld 6:

- Onder de Fouriercoëfficiënten van f verstaan we de volgende getallen $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$:

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad (\text{voor } k = 1, 2, 3, \dots) \\ b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad (\text{voor } k = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

- Onder de n -de Fouriersom van f verstaan we het trigonometrische polynoom

$$T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

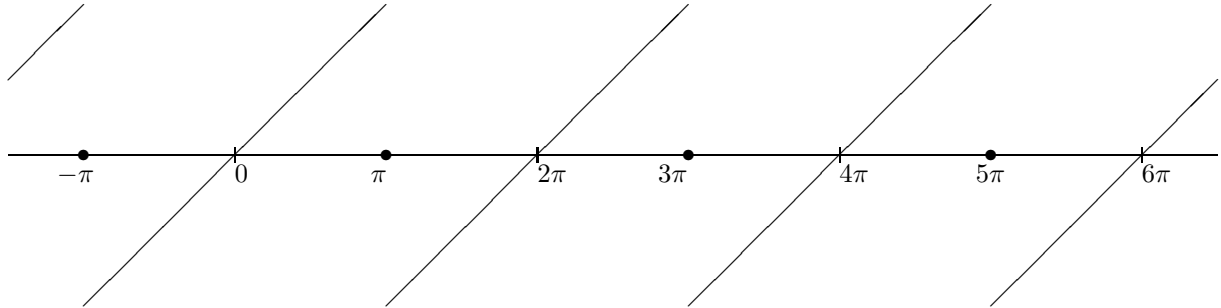
waarbij $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ de bovengenoemde Fouriercoëfficiënten zijn

- Onder de Fourierreeks van f verstaan we

$$T_{\infty}(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

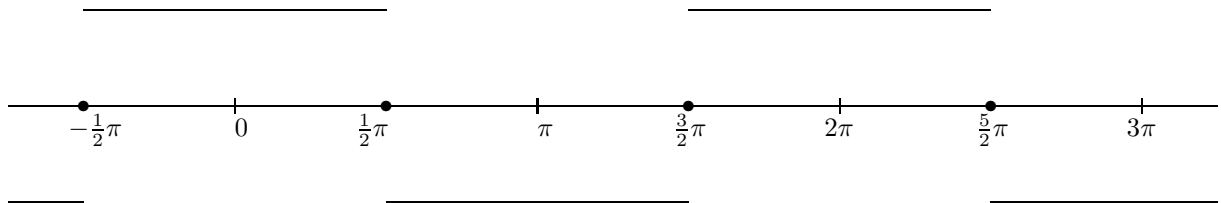
- T_n is het trigonometrisch polynoom van orde $\leq n$, dat f het best benadert (dat hebben we in voorbeeld 6 bewezen)
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - T_n\| = 0$ (door n voldoende groot te kiezen, kunnen we elke gewenste nauwkeurigheid bij deze benadering bereiken)
- $f(x) = T_{\infty}(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ (de Fourierreeks convergeert naar f)
- Als f een even functie is ($f(-x) = f(x)$ voor alle x), dan is $b_k = 0$ voor alle k (zie opgave 11)
- Als f een oneven functie is ($f(-x) = -f(x)$ voor alle x), dan is $a_k = 0$ voor alle k (zie opgave 12)

Voorbeeld 7. Zij f de zaagtandfunctie $f(x) = \begin{cases} x - 2k\pi & \text{als } (2k-1)\pi < x < (2k+1)\pi \\ 0 & \text{als } x = k\pi \end{cases}$



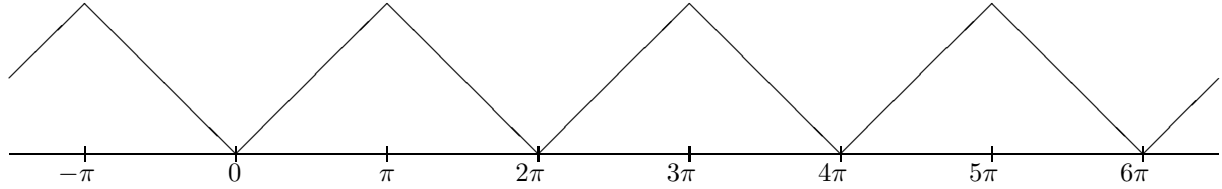
- $a_k = 0$ (want f is oneven) en $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx \, dx = \frac{2}{k} (-1)^{k+1}$
- Het trigonometrisch polynoom van orde n dat f het best benadert, is dus
$$T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = 2 \left(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \dots \dots \frac{1}{n} \sin nx \right)$$
- Uit $f = T_{\infty}$ volgt: $f(x) = 2 \left(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \dots \right)$ voor alle x
Een leuke formule. Wat krijg je als je $x = \frac{\pi}{2}$ invult?

Voorbeeld 8. Zij f de blokgolffunctie $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } (2k - \frac{1}{2})\pi < x < (2k + \frac{1}{2})\pi \\ -1 & \text{als } (2k + \frac{1}{2})\pi < x < (2k + \frac{3}{2})\pi \\ 0 & \text{als } x = (k + \frac{1}{2})\pi \end{cases}$



- $b_k = 0$ (want f is een even functie), $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = 0$ en voor $k \geq 1$ is
$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{als } k \text{ even is} \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cdot \frac{4}{k\pi} & \text{als } k \text{ oneven is} \end{cases}$$
- De Fourierreeks van f is dus $f(x) = T_{\infty}(x) = \frac{4}{\pi} \left(\cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x - \frac{1}{7} \cos 7x + \dots \right)$
Dit geldt voor alle $x \in \mathbb{R}$. Door voor x allerlei getallen in te vullen kun je leuke resultaten krijgen. Zo staat er voor $x = 0$ de grappige formule $1 = \frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right)$, en invulling van $x = \frac{\pi}{4}$ leidt tot $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \dots = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$

Voorbeeld 9. Zij f de ‘driehoeksgolf’-functie, gedefinieerd door $\begin{cases} f \in \mathbb{B} \\ f(x) = |x| \quad \text{voor } x \in [-\pi, \pi] \end{cases}$



- Berekening van de Fouriercoëfficiënten: $b_k = 0$ (want f is even), $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{\pi}{2}$, en voor $k \geq 1$ is $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos kx dx = \frac{2}{k^2\pi}((-1)^k - 1) = \begin{cases} 0 & \text{als } k \text{ even is} \\ -\frac{4}{k^2\pi} & \text{als } k \text{ oneven is} \end{cases}$
- Het trigonometrisch polynoom van orde $2n + 1$, dat f het best benadert, is dus

$$T_{2n+1}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\sum_{k=0}^n \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} \right)$$

- De Fourierreeksontwikkeling van f is

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \frac{\cos 7x}{49} + \frac{\cos 9x}{81} + \dots \right)$$

Functionies met een andere periode. We hebben tot nu toe allerlei fraais gezegd over functies met periode 2π . De periodieke functies, die we in het dagelijkse leven tegen het lijf lopen, hebben echter gewoonlijk een heel andere periode. Maar gelukkig kunnen we het algemene geval (periode p) terugbrengen tot de situatie met periode 2π , door de volgende truc toe te passen:

Stelling. Zij f een periodieke functie met periode p , en zij $g(t) = f\left(\frac{p}{2\pi}t\right)$. Dan is g periodiek met periode 2π .

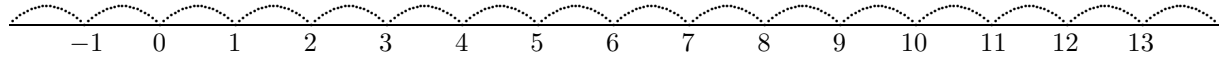
Bewijs. $g(t + 2\pi) = f\left(\frac{p}{2\pi}(t + 2\pi)\right) = f\left(\frac{p}{2\pi}t + p\right) = f\left(\frac{p}{2\pi}t\right) = g(t)$

Gevolg. Als f een ‘nette’ functie met periode p is (zodat de ‘bijbehorende’ g in $\mathbb{B}$ zit), kunnen we onze theorie op g loslaten en de resultaten terugvertalen. Dat leidt tot de volgende Fourierreeksontwikkeling:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos k \frac{2\pi}{p} x + b_k \sin k \frac{2\pi}{p} x \right) \quad \text{met} \quad \begin{cases} a_0 = \frac{1}{p} \int_0^p f(x) dx \\ a_k = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos k \frac{2\pi}{p} x dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \\ b_k = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin k \frac{2\pi}{p} x dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

Voorbeeld 10. Hoeveel is $\frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{11^3} + \dots$?

Oplossing. We definiëren een functie f op $\mathbb{R}$ door
$$\begin{cases} f(x) = x(1-x) & \text{als } 0 \leq x \leq 1 \\ f(x+1) = f(x) & \text{voor alle } x \end{cases}$$



Deze functie f is periodiek met periode 1. Omdat f even is, is $b_k = 0$ voor alle k . De berekening van de andere Fouriercoëfficiënten gaat als volgt:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{p} \int_0^p f(x) dx = \int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{1}{6} \\ k \geq 1 &\implies a_k = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos k \frac{2\pi}{p} x dx = 2 \int_0^1 (x - x^2) \cos 2k\pi x dx = \frac{-1}{k^2 \pi^2} \end{aligned}$$

De Fourierreeksontwikkeling van f is dus:

$$f(x) = \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{\cos 2\pi x}{1} + \frac{\cos 4\pi x}{4} + \frac{\cos 6\pi x}{9} + \frac{\cos 8\pi x}{16} + \frac{\cos 10\pi x}{25} + \dots \right)$$

In deze formule gaan we nu het linker- en rechterlid primitiveren:

$$\int f(x) dx = \frac{1}{6}x - \frac{1}{2\pi^3} \left(\frac{\sin 2\pi x}{1} + \frac{\sin 4\pi x}{8} + \frac{\sin 6\pi x}{27} + \frac{\sin 8\pi x}{64} + \frac{\sin 10\pi x}{125} + \dots \right)$$

Op $[0, 1]$ zijn de primitieven van f de functies $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + C$. Door $x = 0$ in te vullen zie je, dat je $C = 0$ moet kiezen. Conclusie:

$$0 \leq x \leq 1 \implies \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{6}x - \frac{1}{2\pi^3} \left(\frac{\sin 2\pi x}{1} + \frac{\sin 4\pi x}{8} + \frac{\sin 6\pi x}{27} + \frac{\sin 8\pi x}{64} + \frac{\sin 10\pi x}{125} + \dots \right)$$

Als je hierin $x = \frac{1}{4}$ invult, rolt eruit: $\frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{11^3} + \dots = \frac{\pi^3}{32}$

Opgaven hoofdstuk 8

Opgave 1. Bepaal de (kleinste positieve) periode van $x \mapsto \sin \frac{x}{3} + \cos \frac{x}{5}$

Opgave 2. Breng $\cos 7t + 3 \sin 7t$ in de vorm $A \sin(\omega t + \varphi)$

Opgave 3. Bepaal de orde van het trigonometrisch polynoom $(1 + 3 \sin 5x + \cos 7x)^{100}$

Opgave 4. Wat is de dimensie van $\mathbb{TP}_7$?

Opgave 5. Zij $A : \mathbb{TP}_2 \rightarrow \mathbb{TP}_2$ de lineaire afbeelding, gedefinieerd door $A(f) = f' + 3f$. Bereken $\det(A)$

Opgave 6. Bepaal een eigenwaarde en een bijbehorende eigenfunctie van de lineaire transformatie A van $\mathbb{TP}_{23}$ die gedefinieerd wordt door $A(f) = f'' + 37f$

Opgave 7. Zij V de lineaire ruimte van alle functies f van het type $f(t) = a \cos 3t + b \sin 3t$, en zij DIFF de lineaire transformatie van V , gedefinieerd door $\text{DIFF}(f) = f'$

a) Bepaal de matrix van DIFF ten opzichte van de basis $\mathbf{c}_3, \mathbf{s}_3$ van V

b) Verzin een andere basis van V , zó dat de matrix van DIFF ten opzichte van deze basis de volgende gedaante heeft:

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots \end{pmatrix}$$

of bewijs dat dit onmogelijk is

Opgave 8.

a) Bewijs dat $\mathbf{c}_3 \perp \mathbf{s}_5$

b) Bewijs dat $\mathbf{s}_7 \perp \mathbf{s}_2$

c) Bewijs dat $\mathbf{c}_6 \perp \mathbf{c}_4$

d) Bewijs dat de functies $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \dots, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3, \dots$ allemaal loodrecht op elkaar staan

Opgave 9. Bereken $\langle \mathbf{c}_0, \mathbf{c}_0 \rangle$ en $\langle \mathbf{s}_5, \mathbf{s}_5 \rangle$

Opgave 10. Maak een orthonormale basis van $\mathbb{TP}_3$

Opgave 11. Onder een even functie verstaan we een functie f waarvan de grafiek symmetrisch is om de y -as. In formule: $f(-t) = f(t)$ voor alle t .

Zij f een even functie uit $\mathbb{B}$. Bewijs dat $b_k = 0$ voor alle k

Opgave 12. Onder een oneven functie verstaan we een functie f waarvan de grafiek symmetrisch is om de oorsprong. In formule: $f(-t) = -f(t)$ voor alle t .

Zij f een oneven functie uit $\mathbb{B}$. Bewijs dat $a_k = 0$ voor alle k

Opgave 13. Bereken $\sin 1 - \frac{\sin 2}{2} + \frac{\sin 3}{3} - \frac{\sin 4}{4} + \frac{\sin 5}{5} - \frac{\sin 6}{6} + \dots$

Opgave 14. Bereken de Fouriercoëfficiënten van de functie $x \mapsto |\cos x|$

Opgave 15. Bewijs dat $|\sin x| = \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} - \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} - \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} - \frac{\cos 8x}{7 \cdot 9} - \dots \right)$

Opgave 16. Ontwikkel de functie $x \mapsto \left| \cos \frac{x}{2} \right|$ in een Fourierreeks

Opgave 17. Zij f de functie die voor ieder geheel getal k voldoet aan

$$f(x) = \begin{cases} 2 \sin x & \text{als } x \in [2k\pi, (2k+1)\pi] \\ 0 & \text{als } x \in [(2k-1)\pi, 2k\pi] \end{cases}$$

Schets de grafiek van f , en ontwikkel f in een Fourierreeks

Opgave 18. Bepaal de Fourierreeks van de functie f met periode 2π die voor $x \in [-\pi, \pi]$ wordt gegeven door $f(x) = x(\pi - |x|)$

Opgave 19. Zoek getallen $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ zó dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx = (\sin x)^2$

Opgave 20. Zoek getallen $b_1, b_2, b_3, \dots$ zó dat voor alle $x \in (0, \pi)$ geldt: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = (\sin x)^2$

Opgave 21. Zij $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{als } x \text{ een geheel getal is} \\ x - [x] & \text{als } x \text{ niet geheel is} \end{cases}$

(hierin is $[x]$ het grootste gehele getal dat $\leq x$ is)

Maak een schets van de grafiek van f , en ontwikkel f in een Fourierreeks

Opgave 22. Zij $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ gedefinieerd door $\begin{cases} f(x) = x^2 & \text{als } x \in [-\pi, \pi] \\ f(x+2\pi) = f(x) & \text{voor alle } x \in \mathbb{R} \end{cases}$

Teken de grafiek van f en bewijs dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt: $f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (-1)^n \cdot \cos nx}{n^2}$

Opgave 23. Bepaal reële getallen a_n waarvoor geldt: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx = x$ voor alle $x \in [0, \pi]$

Zelfstudiepakketje bij hoofdstuk 8

Opgave 1. Voor welk trigonometrisch polynoom T van orde 3 is $\int_{-\pi}^{\pi} (x^2 - T(x))^2 dx$ minimaal?

Opgave 2. Van een rij $c_1, c_2, c_3, \dots$ van reële getallen is gegeven: $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx = 1$ voor alle $x \in (0, \pi)$
Bereken c_5

Opgave 3. Zij f de functie met periode 2π waarvoor $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{als } -\pi < x < 0 \\ 3 & \text{als } 0 < x < \pi \\ \frac{5}{2} & \text{als } x = 0 \text{ of } x = \pi \end{cases}$

a) Ontwikkel f in een Fourierreeks

b) Bereken $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} - \frac{1}{21} - \frac{1}{23} + \frac{1}{25} + \dots$

Opgave 4. Bepaal het trigonometrische polynoom T van orde 10, waarvoor $\int_{-\pi}^{\pi} \left(T(x) - \frac{x}{2}\right)^2 dx$ minimaal is

Opgave 5. Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de periodieke functie met periode 3, die op $[-1, 2)$ gegeven wordt door

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \in (-1, 1) \\ 1 & \text{als } x \in (1, 2) \\ \frac{1}{2} & \text{als } x = \pm 1 \end{cases}$$

a) Bepaal reële getallen α_n zó dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos \frac{2n\pi x}{3}$

b) Bereken $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \dots$

Opgave 6. Zij f de functie met periode 2π , die voor $x \in [-\pi, \pi]$ gegeven wordt door $f(x) = |x| \sin x$

a) Bereken de Fouriercoëfficiënten a_7 en b_1 van f

b) Ontwikkel f in een Fourierreeks

Opgave 7. Bereken de Fouriercoëfficiënten van de functie $x \mapsto (\cos x)^4$

Opgave 8. Zij f de functie met periode 2, die voor $x \in [-1, 1]$ gegeven wordt door $f(x) = x^2$. Bepaal reële getallen a_n zó dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt:

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos \pi x + a_2 \cos 2\pi x + a_3 \cos 3\pi x + a_4 \cos 4\pi x + \dots$$

Opgave 9. We definiëren de functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ door $f(x) = |\sin x|$. Omdat f een even functie met periode π is, kan f ontwikkeld worden in een Fourierreeks van het type

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos 2x + a_2 \cos 4x + a_3 \cos 6x + a_4 \cos 8x + \dots$$

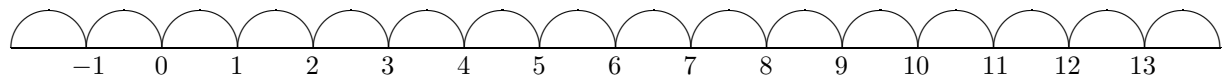
Bereken a_0 en a_{10}

Opgave 10. Zij V de lineaire ruimte die bestaat uit alle functies $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ van het type $f(x) = \alpha + \beta \cos 2\pi x + \gamma \sin 2\pi x$. Voor welke functie $f \in V$ is $\int_0^1 (x - f(x))^2 dx$ minimaal?

Opgave 11. Zij V de lineaire deelruimte van $\mathbb{B}$ die bestaat uit alle even trigonometrische polynomen van orde ≤ 2

- a) Bepaal de dimensie van V
- b) Bepaal de projectie van de functie $t \mapsto \sin |t|$ op V

Opgave 12.



Zij f de functie met periode 1, die voor $t \in [0, 1]$ gegeven wordt door $f(t) = \sqrt{t(1-t)}$. Omdat f een even functie is, ziet de Fourierontwikkeling van f er als volgt uit:

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos 2\pi t + a_2 \cos 4\pi t + a_3 \cos 6\pi t + a_4 \cos 8\pi t + \dots$$

- a) Bereken a_0
- b) Bereken $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 + \dots$

Oplossingen

Opgave 1. Zij f de functie met periode 2π , die op $[-\pi, \pi]$ gegeven wordt door $f(x) = x^2$. De vraag kan dan geformuleerd worden als: voor welke $T \in \mathbb{TP}_3$ is $\|f - T\|$ minimaal?

Antwoord: $T(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x$

$$\text{waarbij } \begin{cases} b_1 = b_2 = b_3 = 0 & (\text{want } f \text{ is even}) \\ a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{3}\pi^2 \\ n \in \{1, 2, 3\} \Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = (\text{via partiële integratie}) (-1)^n \cdot \frac{4}{n^2} \end{cases}$$

$$\text{Dus } T(x) = \frac{1}{3}\pi^2 - 4 \cos x + \cos 2x - \frac{4}{9} \cos 3x$$

Opgave 2. $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx$ is een oneven functie, en is dus blijkbaar de Fourierreeks van de functie

$$g \in \mathbb{B} \text{ die op } (-\pi, \pi] \text{ gegeven wordt door } g(x) = \begin{cases} -1 & \text{als } x \in (-\pi, 0) \\ 1 & \text{als } x \in (0, \pi) \\ 0 & \text{als } x \in \{0, \pi\} \end{cases}$$

$$\text{Dus } c_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n) \text{ en dus } c_5 = \frac{4}{5\pi}$$

Opgave 3.

a) $f(x) = \frac{5 + g(x)}{2}$, waarbij g de functie uit de vorige opgave is.

$$\text{Dus } f(x) = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx = \frac{5}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \dots \right)$$

b) Invulling van $x = \frac{\pi}{4}$ in bovenstaande formule leidt tot $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \dots = \frac{\pi}{4} \sqrt{2}$

Opgave 4. Zij $f \in \mathbf{B}$ zó dat $f(x) = \frac{x}{2}$ voor $x \in (-\pi, \pi)$. De Fouriercoëfficiënten van f zijn dan:

$a_k = 0$ en $b_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Het gezochte trigonometrische polynoom is dus:

$$T(x) = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5} - \frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 7x}{7} - \frac{\sin 8x}{8} + \frac{\sin 9x}{9} - \frac{\sin 10x}{10}$$

Opgave 5.

- a) Omdat f een even functie is, zijn de Fouriercoëfficiënten b_n allemaal 0. De gezochte α_n zijn dus de Fouriercoëfficiënten a_n , en worden als volgt berekend: $\alpha_0 = \frac{1}{3} \int_{-1}^2 f(x) dx = \frac{1}{3}$, en voor $n \geq 1$ is

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{2}{3} \int_{-1}^2 f(x) \cos \frac{2n\pi x}{3} dx = \frac{2}{3} \int_1^2 \cos \frac{2n\pi x}{3} dx \\ &= \frac{1}{n\pi} \left(\sin \frac{4n\pi}{3} - \sin \frac{2n\pi}{3} \right) = \begin{cases} 0 & \text{als } n \text{ een drievoud is} \\ -\frac{\sqrt{3}}{n\pi} & \text{als } n \text{ een drievoud} + 1 \text{ is} \\ \frac{\sqrt{3}}{n\pi} & \text{als } n \text{ een drievoud} + 2 \text{ is} \end{cases} \end{aligned}$$

- b) De Fourierontwikkeling van f is

$$f(x) = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left(\frac{\cos \frac{2\pi x}{3}}{1} - \frac{\cos \frac{4\pi x}{3}}{2} + \frac{\cos \frac{8\pi x}{3}}{4} - \frac{\cos \frac{10\pi x}{3}}{5} + \frac{\cos \frac{14\pi x}{3}}{7} - \frac{\cos \frac{16\pi x}{3}}{8} + \dots \right)$$

Als je hierin $x = 0$ invult, staat er tot je stomme verbazing:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \dots = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$$

Opgave 6. f is oneven, dus $a_k = 0$. De berekening van b_k vergt enige partiële integratietechniek:

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin x \sin kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin x \sin kx dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{voor } k = 1 \\ 0 & \text{voor } k = 3, 5, 7, 9, \dots \\ \frac{-8k}{\pi(k^2 - 1)^2} & \text{voor } k = 2, 4, 6, 8, \dots \end{cases}$$

$$\text{Dus } f(x) = \frac{\pi}{2} \sin x - \frac{8}{\pi} \left(\frac{2 \sin 2x}{(2^2 - 1)^2} + \frac{4 \sin 4x}{(4^2 - 1)^2} + \frac{6 \sin 6x}{(6^2 - 1)^2} + \frac{8 \sin 8x}{(8^2 - 1)^2} + \dots \right)$$

Opgave 7. $(\cos x)^4 = ((\cos x)^2)^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} (\cos 2x)^2$
 $= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x$. Dus $a_0 = \frac{3}{8}$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_4 = \frac{1}{8}$, en de overige Fouriercoëfficiënten zijn 0

Opgave 8. $a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$, en voor $n \neq 0$ is $a_n = \int_{-1}^1 x^2 \cos n\pi x dx = \frac{4 \cdot (-1)^n}{n^2 \pi^2}$

Opgave 9. $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{2}{\pi}$
 en $a_{10} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos 20x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\sin 21x - \sin 19x) dx = -\frac{4}{399\pi}$

Opgave 10. De gezochte functie is de Fourierbenadering van orde 1 van de functie g met periode 1, die op $(0, 1)$ gegeven wordt door $g(x) = x$. De berekening van de Fouriercoëfficiënten gaat als volgt:

$$\alpha = \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2} \quad \beta = 2 \int_0^1 x \cos 2\pi x \, dx = 0 \quad \gamma = 2 \int_0^1 x \sin 2\pi x \, dx = -\frac{1}{\pi}$$

De gezochte functie is dus $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sin 2\pi x$

Opgave 11.

a) $V = \llbracket \mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \rrbracket$, dus $\dim(V) = 3$

b) Deze projectie is $a_0 \mathbf{c}_0 + a_1 \mathbf{c}_1 + a_2 \mathbf{c}_2$ waarbij a_i de Fouriercoëfficiënten van $t \mapsto \sin |t|$ zijn. Deze bereken je als volgt:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin |t| \, dt = \frac{2}{\pi} & a_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin |t| \cos t \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \cos t \, dt = 0 \\ a_2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin |t| \cos 2t \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \cos 2t \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\sin 3t - \sin t) \, dt = -\frac{4}{3\pi} \end{aligned}$$

De gevraagde projectie is dus de functie $t \mapsto \frac{2}{\pi} - \frac{4}{3\pi} \cos 2t$

Opgave 12.

a) $a_0 = \int_0^1 f(t) \, dt = \frac{\pi}{8}$ (dat kun je berekenen via de substitutie $t = (\sin \varphi)^2$, of simpel via het inzicht dat de grafiek van f uit halve cirkeltjes met straal $\frac{1}{2}$ bestaat)

b) Als je in de reeksontwikkeling $t = \frac{1}{2}$ invult, staat er opeens: $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \dots = \frac{1}{2}$