Eindopdracht: Lineaire Recursie

Het doel van deze opdracht is om met Magma enkele methoden te vergelijken om recursief gedefinieerde rijen te berekenen.

Een *lineaire recurrente betrekking van de tweede orde* definieert een rij (bij ons steeds gehele) getallen $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ door u_0 en u_1 vast te leggen en voor $n \geq 2$ te definiëren dat $u_n = a \cdot u_{n-1} + b \cdot u_{n-2}$; hierbij zullen (voor ons) a, b vaste gehele getallen zijn. Het eenvoudigste voorbeeld met $a = b = 1$ en $u_0 = 0, u_1 = 1$ geeft de bekende rij van Fibonaccigetallen F_n, die begint met $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13$ (en steeds is de volgende term som van de twee eraan vooraf gaande).

De rij

Natuurlijk is het eenvoudig om uit a, b en de randvoorwaarden u_0, u_1 de rij zover te berekenen als je maar wilt. De eerste twee opdrachten vragen je dat te implementeren, met als verschil het geheugengebruik.

Het is echter ook mogelijk om een element verderop in de rij te berekenen *zonder* eerst alle tussenliggende waarden uit te rekenen. Daartoe bepaal je eerst de twee nulpunten α en β van de met de recursie geassocieerde vergelijking $x^2 - a \cdot x - b = 0$, en gebruikt dat

- $u_n = r \cdot \alpha^n + s \cdot \beta^n$, voor alle $n \geq 0$ en voor *vaste* r en s.

De waarden van r, s kun je dan bepalen omdat je u_0 en u_1 al kent.

Voor de rij van Fibonacci vind je de nulpunten $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ en $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, en bepaal je r en s uit $u_0 = 0 = r + s$ en $u_1 = 1 = r \cdot \alpha + s \cdot \beta$. Je vindt dan $-s = r = 1/\sqrt{5}$ zodat

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n.$$

Aanpassing

De boven beschreven methode is niet correct wanneer de vergelijking $x^2 - a \cdot x - b = 0$ twee dezelfde nulpunten $\alpha = \beta$ heeft. In dat geval zijn die twee nulpunten hetzelfde rationale getal, en geldt dat de oplossing wordt gegeven door:

•• $u_n = r \cdot \alpha^n + s \cdot n \cdot \alpha^n$, voor alle $n \geq 0$ en voor *vaste* r en s.

De opdrachten

(1) Schrijf een functie in Magma die voor gegeven a, b en u_0, u_1 en voor een gegeven natuurlijk getal n de rij $u_0, u_1, \ldots, u_n$ levert.

(2) Schrijf een functie in Magma die bij dezelfde input alleen een functie `waarde` teruggeeft die als `waarde(n)` uitgerekend het getal u_n geeft (en die steeds maar twee elementen van de rij in geheugen houdt).

(3) Schrijf een hulpfunctie `wortels` die bij gegeven rationale getallen a, b de nulpunten van het polynoom $x^2 - ax - b$ geeft als elementen van het lichaam $\mathbf{Q}(\sqrt{a^2 + 4b})$. Houd er rekening mee dat dit ook gewoon rationale getallen kunnen zijn!

(4) Schrijf een functie die van formule • gebruik maakt om bij gegeven a, b, u_0, u_1 de waarde van u_n uit te rekenen wanneer het polynoom $x^2 - a \cdot x - b$ twee verschillende nulpunten heeft.

(5) Schrijf een verbeterde functie die hetzelfde doet, maar ook correct is wanneer $\alpha = \beta$.

Het verslag

Wanneer de programmeeropdracht is voltooid leg je je bevindingen in een paar bladzijden LaTeX uit; in het bijzonder zeg je iets over het verschil in *performance* tussen de functies uit (1) en (4).

Inleveren

Magma-programma en LaTeX-bestand vóór 1 maart 2008 per e-mail inleveren bij Wieb Bosma: `bosma@math.ru.nl`.