

college 3: differentiaalvergelijkingen

Notatie Voor een functie $y = y(t)$ schrijven we

- $y' = y'(t)$ of $y^{(1)} = y^{(1)}(t)$ voor de **afgeleide** $\frac{dy}{dt}$, en
- $y'' = y''(t)$ of $y^{(2)} = y^{(2)}(t)$ voor de **tweede afgeleide** $\frac{d^2y}{dt^2}$,

enzovoorts.

Definitie Een **differentiaalvergelijking** is een vergelijking van de vorm

$$F(t, y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0.$$

Hier heet n de **orde** van de differentiaalvergelijking. Als duidelijk is wat de variabele is laten we die vaak weg:

$$F(t, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Voorbeelden

$$y''' + 7y' + t^5 \cdot y = 3$$

is een differentiaalvergelijking van orde 3;

$$x \cdot y \cdot y'' + y \cdot y' - x \cdot (y')^4 = 0$$

is van orde 2.

Differentiaalvergelijkingen oplossen vormt een vak op zichzelf. Het doel is om oplossingsmethoden voor verschillende soorten differentiaalvergelijkingen te geven.

Eén algemene techniek bestaat uit het **scheiden van variabelen**:

Los y op uit $y' = a(x) \cdot b(y)$.

Oplossing

Schrijf $y' = \frac{dy}{dx}$ en **scheid de variabelen**:

$$\frac{dy}{dx} = a(x) \cdot b(y),$$

dus

$$\frac{1}{b(y)} dy = a(x) dx.$$

Integreer nu links en rechts:

$$\int \frac{1}{b(y)} dy = \int a(x) dx.$$

Opgave

Los y op uit: $y' = -3xy$, met $y(0) = 1$.

Oplossing

$$\int \frac{1}{y} dy = \int -3x dx,$$

dus

$$\log |y| = \int \frac{1}{y} dy = \int -3x dx = -\frac{3}{2}x^2 + C,$$

oftewel

$$|y| = e^C \cdot e^{-\frac{3}{2}x^2},$$

waar we de $|\cdot|$ kunnen weglaten want rechts is altijd positief; en $y(0) = e^C \cdot e^0$ moet gelijk 1 zijn, dus $C = 0$ en $y = e^{-\frac{3}{2}x^2}$.

Opgave

Los y op uit: $y' = x^2 y^2 + x^2 - y^2 - 1$, met $y(0) = 1$.

Oplossing

$$x^2 y^2 + x^2 - y^2 - 1 = (x^2 - 1)(y^2 - 1),$$

en we kunnen de variabelen schieden:

$$\frac{1}{y^2 + 1} dy = (x^2 - 1) dx.$$

Los y op uit: $y' = x^2 y^2 + x^2 - y^2 - 1$, met $y(0) = 1$.

Na integreren links en rechts van:

$$\frac{1}{y^2 + 1} dy = (x^2 - 1) dx.$$

krijgen we

$$\tan^{-1} y = \frac{1}{3} x^3 - x + C,$$

oftewel

$$y = \tan\left(\frac{1}{3} x^3 - x + C\right).$$

Maar uit $1 = y(0) = \tan C$ volgt $C = \frac{\pi}{4}$, dus

$$y = \tan\left(\frac{1}{3} x^3 - x + \frac{\pi}{4}\right).$$

De methode van het scheiden van variabelen is te gebruiken als de differentiaalvergelijking is te schrijven als

$$y' = f(x, y) = a(x) \cdot b(y),$$

waar in $a(x)$ geen y voorkomt en in $b(y)$ geen x . Het is niet altijd makkelijk om de variabelen te scheiden. Hier is een methode die kan helpen.

Voorbeeld $y' = f(x, y) = 2x^2 + y - x^2y + xy - 2x - 2$

Veronderstel dat $f(x, y) = a(x) \cdot b(y)$.

Vul $x = 0$ in, dan

$$a(0) \cdot b(y) = f(0, y) = y - 2,$$

dus

$$f(x, y) = \frac{a(x)}{a(0)} \cdot (a(0) \cdot b(y)) = \frac{a(x)}{a(0)} \cdot (y - 2).$$

Vullen we hierin $y = 0$ in, dan

$$\frac{a(x)}{a(0)} \cdot (-2) = f(x, 0) = 2x^2 - 2x - 2.$$

Dus

$$\frac{a(x)}{a(0)} = (-x^2 + x + 1),$$

en daarom

$$f(x, y) = (-x^2 + x + 1) \cdot (y - 2),$$

een uitdrukking van de gevraagde vorm.

De volgende klasse van differentiaalvergelijkingen waarvoor we algemene oplossingsmethoden bespreken, is die van de **lineaire differentiaalvergelijkingen van orde n** :

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x) \cdot y^{(1)}(x) + a_0(x) \cdot y(x) = f(x).$$

De functie y en de afgeleiden $y^{(1)}, \dots, y^{(n)}$ komen hier (op zijn hoogst) als lineaire term in voor.

De vergelijking heet **homogeen** als $f(x) = 0$, en anders inhomogeen.

Het belang van homogeen en lineair zijn ligt hem er in dat

- als $y_1(x)$ en $y_2(x)$ oplossingen zijn, dan ook $y_1(x) + y_2(x)$;
- als $y_1(x)$ een oplossing is, dan ook $\lambda \cdot y_1(x)$ voor elke reële λ .

De verzameling van alle oplossingen vormt een **vectorruimte!**

Stelling Als de $a_0(x), \dots, a_{n-1}(x)$ in

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x) \cdot y^{(1)}(x) + a_0(x) \cdot y(x) = 0$$

continu zijn op een interval, dan is er een basis $z_1(x), \dots, z_n(x)$ voor de vectorruimte van alle oplossingen voor deze vergelijking op dat interval, dus iedere oplossing is te schrijven als

$$y(x) = \lambda_1 z_1(x) + \lambda_2 z_2(x) + \dots + \lambda_n z_n(x),$$

voor zekere reële getallen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Bekijk het speciale geval $y' = p(x) \cdot y + q(x)$.

- Vind $\int p(x) dx = P(x)$.
- Schrijf $y' - p(x) \cdot y = q(x)$, en
- vermenigvuldig met $e^{-P(x)}$, dus
$$(y' - p(x) \cdot y)e^{-P(x)} = q(x)e^{-P(x)}.$$
- Herken links de afgeleide van $ye^{-P(x)}$
- Integreer tot $y = e^{P(x)} \int q(x) \cdot e^{-P(x)} dx + C$.

$$y = e^{P(x)} \int q(x) \cdot e^{-P(x)} dx + C$$

Voorbeeld $y' = xy + x$.

Hier $p(x) = x$ en $q(x) = x$, dus $P(x) = \frac{x^2}{2}$, en we vinden

$$e^{-\frac{x^2}{2}} (y' - xy) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x.$$

Links staat de afgeleide van $y \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, dus

$$y = e^{x^2/2} \int e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x dx = e^{x^2/2} \left(-e^{-\frac{x^2}{2}} + C \right),$$

oftewel $y = C \cdot e^{\frac{x^2}{2}} - 1$.

De fysica levert veel voorbeelden van differentiaalvergelijkingen. Vaak is het **opstellen** van een goede differentiaalvergelijking net zo moeilijk als het oplossen ervan. Wij houden ons hier voornamelijk bezig met het **oplossen**.

Voorbeeld Versnelling onder een constante kracht:

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = F.$$

Dan wordt

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F}{m} \cdot t + C_1,$$

en de plaats als functie van de tijd

$$x = \frac{1}{2} = \frac{F}{m} \cdot t^2 + C_1 \cdot t + C_2,$$

een kwadratische vergelijking (of lineair als $F = 0$).

Voorbeeld Veer: hier is de kracht een functie van de plaats, en $F = -k \cdot x$ (wet van Hooke) en weer

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = F.$$

Dus

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} \cdot x = -\omega^2 \cdot x,$$

met de veerconstante $\omega = \sqrt{k/m}$. We kennen twee oplossingen van deze vergelijking: $x = \cos(\omega t)$ en $x = \sin(\omega t)$.

Dit is een homogene lineaire vergelijking van orde 2 (let op: hier is x een functie van t), en volgens de Stelling is dus *elke* oplossing van de vorm $\lambda_1 \sin(\omega t) + \lambda_2 \cos(\omega t)$.

Merk op: alle oplossingen zijn **periodiek** met periode $\frac{2\pi}{\omega}$. Dit zijn de **harmonische trillingen**.

Voorbeeld Ongeremde groei: wanneer *verandering* evenredig is met de omvang op elk tijdstip, krijgen we het verband

$$\frac{df}{dt} = \gamma \cdot f.$$

Bijvoorbeeld: ongeremde populatiegroei, rente, radioactief verval.

Deze vergelijking is eenvoudig op te lossen:

$$f(t) = \lambda \cdot e^{\gamma t}$$

geeft een (de!) oplossingen.

Merk op dat de functie (want λ) vastligt als we één enkele waarde kennen, bijvoorbeeld voor $t = 0$: dan $f(0) = \lambda \cdot e^0 = \lambda$, dus $f(t) = f(0) \cdot e^{\gamma t}$.

Voorbeeld **Electrisch circuit** met weerstand en spoel:

$$L \cdot \frac{dI}{dt} + R \cdot I = E$$

(zie p. 400). Hier zijn R en L constant als functie van t .

Als voor de stroomsterkte $I(0) = I_0$ geldt, vinden we een unieke oplossing door scheiden van variabelen

$$\frac{L}{E - R \cdot I} dI = dt,$$

oftewel

$$E - R \cdot I = A \cdot e^{-\frac{Rt}{L}} \quad \text{met} \quad A = \pm e^{-\frac{R}{L}C},$$

met $A = E - RI_0$, dus

$$I = \frac{E}{R} + \left(I_0 - \frac{E}{R} \right) e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Voorbeeld Hangende kabel: een homogene kabel met soortelijke massa m , doorhangend onder zijn eigen gewicht:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{mg}{T_0} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Met $w = dy/dx$ leidt dit tot

$$\int \frac{dw}{\sqrt{1 + w^2}} = \frac{mg}{T_0} \int dx,$$

dus

$$\sinh^{-1} w = \frac{mg}{T_0} (x + C).$$

Met $w = dy/dx$ vonden we

$$\sinh^{-1} w = \frac{mg}{T_0}(x + C),$$

en omdat $w = 0$ als $x = 0$ moet $C = 0$.

Maar dan is

$$y = \int w \, dx = \int \sinh\left(\frac{mg}{T_0}x\right) \, dx = \frac{T_0}{mg} \cosh\left(\frac{mg}{T_0}x\right) + C_1,$$

waar C_1 bepaald kan worden uit de gegevens.

De vergelijking van de hangende kabel wordt dus gegeven door een hyperbolische cosinus functie! (Dat verandert als de kabel belast wordt.)

Voorbeeld Val met weerstand: de weerstand op een vallend object is evenredig met de snelheid. Dat geeft

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = mg - \gamma v.$$

(zie p. 412).

Het oplossen geeft

$$v = e^{-\frac{\gamma}{m}t} \int g e^{\frac{\gamma}{m}t} = e^{-\frac{\gamma}{m}t} \left(\frac{mg}{\gamma} g e^{\frac{\gamma}{m}t} + C \right),$$

en als het object uit stilstand begint ($v(0) = 0$), dan is $C = -mg/\gamma$, dus

$$v = \frac{mg}{\gamma} \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t} \right).$$

In het begin lijkt dit op vrije val, uiteindelijk nader v een limietsnelheid mg/γ .