Zoals *oppervlakte* de integraal van *lengten* over een interval is, zo wordt *inhoud* de integraal van *oppervlakten* over een interval: de limiet van de som van steeds dunnere 'plakjes' van het lichaam.

Voorbeeld

De inhoud van een bal met straal R (zie p. 421)

Dit wordt de integraal, voor x lopend van $-R$ tot R, van het volume van cirkelschijfjes met straal die afhangt van x. Dat volume is $O(x)\ dx$, waar $O(x)$ de oppervlakte van de cirkel is. De inhoud wordt dan

$$\int_{-R}^{R} O(x)\ dx.$$

Eerst de oppervlakte van een cirkel met straal r:

$$O(r) = \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - x^2}\, dx.$$

Gebruik de substitutie $x = r\cos\theta$, dus $dx = -r\sin\theta\ d\theta$:

$$
\begin{aligned}
O(r) &= -\int_{\pi}^{2\pi} 2\sqrt{r^2 - r^2\cos^2\theta}\; dr\cos\theta \\
&= -\int_{\pi}^{2\pi} 2r\sqrt{1-\cos^2\theta}\; r\sin\theta\; d\theta \\
&= -\int_{\pi}^{2\pi} 2r^2\sin^2\theta\; d\theta \\
&= \int_{\pi}^{2\pi} 2r^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\theta)\right)\; d\theta \\
&= \int_{\pi}^{2\pi} r^2 - r^2\cos(2\theta)\; d\theta \\
&= \left(r^2\theta - \frac{r^2}{2}\sin(2\theta)\right)\Big|_{\pi}^{2\pi} = \pi r^2.
\end{aligned}
$$

Ter plekke van x wordt van de bal een cirkelvormig plakje afgesneden met straal $\sqrt{R^2 - x^2}$. De oppervlakte van die cirkel is π maal het kwadraat van die straal, en dus is de inhoud van de bal met straal R gelijk aan

$$\int_{-R}^{R} \pi \sqrt{R^2 - x^2}^2 \, dx = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-R}^{R} = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Voorbeeld

De inhoud van een (scheve) kegel met cirkelvormige basis (straal r) en hoogte h (zie p. 421)

Natuurlijk is weer $I = \int_0^h O(x)\, dx$, waar $O(x)$ de oppervlakte van de cirkel op hoogte x is. Enige probleem is om $O(x)$ te bepalen. Gegeven is dat $O(0) = \pi r^2$ en $O(h) = 0$. Op hoogte x verhoudt de straal van de cirkel zich tot r als $h - x$ tot h, en daarom is

$$O(x) = \pi \left(r \frac{h - x}{h} \right)^2 .$$

Dus de inhoud van de scheve kegel

$$\begin{aligned} I &= \int_0^h \pi r^2 \frac{(h-x)^2}{h^2}\ dx \\ &= \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h h^2 - 2hx + x^2\ dx \\ &= \frac{\pi r^2}{h^2} \left(h^2 x - hx^2 + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^h \\ &= \frac{1}{3} \pi r^2 h. \end{aligned}$$

Wanneer een lichaam ontstaat door wenteling om een as (die we als x-as kiezen), wordt het volume $\int \pi f(x)^2 \, dx$ als de 'dikte', die we ter plekke x wentelen om de x-as, door $f(x)$ gegeven wordt. Immers, het 'plakje' ter hoogte x is dan een cirkel met straal $f(x)$.

Voor zo verkregen 'holle' omwentelingslichamen wordt de formule $\pi \int g(x)^2 - f(x)^2 \, dx$, als het lichaam wordt begrensd door $f(x)$ en $g(x)$.

Verkrijgen we een lichaam door wenteling om de y-as, dan sommeren we de 'schillen' met een hoogte van $f(x)$ op afstand x van de y-as. Die geven een bijdrage $2\pi x$ maal $f(x)$ maal Δx, en in de limiet geeft dat een integraal

$$2\pi \int x f(x)\ dx.$$

Voor een 'hol' lichaam ingeklemd tussen $f(x)$ en $g(x)$ krijgen we:

$$2\pi \int x(g(x) - f(x))\ dx.$$

Voorbeeld

De inhoud van cilindervormige uitsparing (van straal r) in een bol (straal R). (zie p. 430)

Op afstand x van de oorsprong wentelt een schil van hoogte $2\sqrt{R^2 - x^2}$, hetgeen een volume

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^r x \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2}\, dx \\ &= 2\pi \int_0^{r^2} \sqrt{R^2 - u}\, du \end{aligned}$$

geeft, waar $u = x^2$, dus $du = 2x\ dx$. Dan:

$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_0^{r^2} \sqrt{R^2 - u}\; du \\
&= 2\pi \left[-\frac{2}{3} \left(R^2 - u \right)^{3/2} \right] \Big|_0^{r^2} \\
&= \frac{4}{3}\pi \left(R^3 - (R^2 - r^2)^{3/2} \right) \\
&= \frac{4}{3}\pi R^3 \left(1 - \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^{3/2} \right).
\end{aligned}
$$

Het zwaartepunt van een homogene plaat begrensd door $f(x)$ en de x-as op het interval $[a, b]$ wordt gegeven door de coördinaten $(\bar{x}, \bar{y})$:

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x f(x)\ dx}{\int_a^b f(x)\ dx},$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b f(x)^2\ dx}{\int_a^b f(x)\ dx}.$$

De booglengte L van een kromme gegeven door $y = f(x)$ over een interval $[a, b]$ is de integraal over de stukjes ter lengte $\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$. Omdat $dy = f'(x)\ dx$, vinden we

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\ dx.$$

De functie f moet wel ‘netjes’ zijn: continu op $[a, b]$ met continue afgeleide $f'(x)$ (bijna overal).

Voorbeeld

De lengte van een cirkelboog (van straal 1). (zie p. 478)

Hier wordt $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, dus voor x tussen 0 en b

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^b \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\, dx \\
&= \int_0^b \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\, dx \\
&= \sin^{-1} b.
\end{aligned}
$$

Wanneer we de kromme $y = f(x)$ wentelen om de x-as, krijgen als oppervlakte van het wentelingsoppervlak de integraal

$$O = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\; dx,$$

immers, het is de integraal over de 'ringetjes' ter dikte $\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ met straal $f(x)$, dus lengte $2\pi f(x)$.

Voorbeeld

De oppervlakte van een bol (van straal r). (zie p. 483)

Hier is weer $y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, zodat

$$\sqrt{1 + f'(x)^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

en dan wordt de oppervlakte

$$\int_{-r}^{r} 2\pi r \, dx = 4\pi r^2.$$