Hoofdstuk 5

Transformaties van Inproductruimten

5.1 Inleiding

In de komende secties beschouwen we lineaire transformaties van reële en complexe inproductruimten die aan extra eigenschappen voldoen die betrekking hebben op het verband tussen transformatie en inproduct. Het zal blijken dat we daarmee ook eigenschappen kunnen afleiden voor zulke transformaties die met diagonaliseerbaarheid samenhangen. Steeds zullen we een begrip voor reële inproductruimten en een corresponderend begrip voor complexe inproductruimten invoeren, en bovendien begrippen die op de bijbehorende matrices slaan. We moeten ook sterker dan voorheen onderscheid maken tussen eindig- en oneindig-dimensionale vectorruimten.

5.2 Orthogonale en Unitaire Transformaties

Het eerste paar begrippen zal blijken die transformaties te karakteriseren die zowel lengten als hoeken behouden.

5.2.1 Definitie

Een lineaire afbeelding $T : V \to W$ tussen reële inproductruimten heet een *isometrie* als geldt dat

$$< Tv_1, Tv_2 >=< v_1, v_2 > \quad \text{voor alle } v_1, v_2 \in V.$$

Als T bovendien inverteerbaar is, dan heet T *orthogonaal.*

5.2.2 Stelling

Zij $T : V \to W$ een lineaire afbeelding tussen reële inproductruimten met $\dim V = \dim W$ eindig; dan geldt:

$$T \textit{ is een isometrie} \iff T \textit{ is orthogonaal.}$$

Bewijs. De ene implicatie is duidelijk; voor de andere moeten we bewijzen dat een isometrie T inverteerbaar is. Omdat $\dim V = \dim W = n < \infty$ volstaat het injectiviteit van T te bewijzen, dat wil zeggen, te laten zien dat $\mathrm{Ker}T = \{0\}$. Veronderstel maar dat $Tv = 0$; omdat $< v, v >=< Tv, Tv >= 0$ moet $v = 0$.

5.2.3 Definities

We zeggen dat een lineaire afbeelding $T : V \to W$ tussen reële inproductruimten *lengten behoudt* als geldt $||Tv|| = ||v||$ voor alle $v \in V$; we zeggen dat T *hoeken behoudt* als voor elk tweetal v_1, v_2 geldt dat de hoek tussen Tv_1 en Tv_2 gelijk is aan de hoek tussen v_1 en v_2.

5.2.4 Stelling

Een lineaire afbeelding $T : V \to W$ tussen reële inproductruimten behoudt lengten en hoeken dan en slechts dan als T een isometrie is.

Bewijs. Dit volgt direkt uit de definities van lengte, hoek, en isometrie.

5.2.5 Definitie

Een matrix $M \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ heet *orthogonaal* wanneer $M^{\mathsf{T}}M = I_n$.

Deze definitie zegt dus dat van een orthogonale M de kolommen een orthonormaal stelsel vormen. De volgende stelling laat zien dat het dubbele gebruik van dezelfde term 'orthogonaal' geen misverstand is.

Opgave 131. *Geldt voor een orthogonale matrix M dat $MM^{\mathsf{T}} = I_n$?*

5.2.6 Stelling

Zij T een lineaire transformatie van de n-dimensionale reële inproductruimte V. Dan zijn equivalent:

(i) *de transformatie T is orthogonaal;*
(ii) *er is een orthonormale basis $\mathcal{E}$ voor V zodat $M_T^{\mathcal{E}}$ een orthogonale matrix is;*
(iii) *de matrix $M_T^{\mathcal{B}}$ is orthogonaal voor elke orthonormale basis $\mathcal{B}$ van V;*
(iv) *T voert orthonormale bases voor V over in orthonormale bases.*

Bewijs. Voor een orthonormale basis $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ van V is $< Tb_i, Tb_j >$ het inproduct van twee kolommen van $M_T^{\mathcal{B}}$. Als T orthogonaal is, dan is het stelsel $\{Tb_1, \ldots, Tb_n\}$ ook weer orthonormaal, dat wil zeggen, $M_T^{\mathcal{B}}$ is een orthogonale matrix. Dus (i) impliceert (iii).

De kolommen van $M_T^{\mathcal{B}}$ vormen de beelden van $\{b_1, \ldots, b_n\}$ onder T; als deze kolommen een orthonormaal stelsel vormen wanneer $\mathcal{B}$ dat is, voert T kennelijk elke orthonormale basis $\mathcal{B}$ over in een orthonormale basis $T\mathcal{B}$. Dat is (iv).

Als $\mathcal{B}$ een orthonormale basis voor V is, dan is

$$< v, w > = < \sum_{i=1}^{n} v_i b_i, \sum_{j=1}^{n} w_j b_j > = \sum_{i,j=1}^{n} v_i w_j < b_i, b_j > = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i.$$

Als (iv) geldt, dan is ook $T\mathcal{B} = \{Tb_1, \ldots, Tb_n\}$ een orthonormaal stelsel, en

$$< Tv, Tw > = < \sum_{i=1}^{n} v_i T b_i, \sum_{j=1}^{n} w_j T b_j > = \sum_{i,j=1}^{n} v_i w_j < Tb_i, Tb_j > = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i,$$

dat wil zeggen: (i) geldt.

Omdat het duidelijk is dat (iii) ook (ii) impliceert, hoeven we tenslotte nog slechts te laten zien dat uit (ii) ook weer (i) volgt. Als $M_T^{\mathcal{E}}$ orthogonaal is, dan is $T\mathcal{E}$ een orthonormaal stelsel, en volgt voor elk tweetal $v, w \in V$ door ze op basis $\mathcal{E}$ te schrijven dat:

$$< Tv, Tw >=< T\sum_{i=1}^{n} v_i e_i, T\sum_{j=1}^{n} w_j e_j >= \sum_{i,j=1}^{n} v_i w_j < Te_i, Te_j >= \sum_{i=1}^{n} v_i w_i,$$

net als

$$< v, w >=< \sum_{i=1}^{n} v_i e_i, \sum_{j=1}^{n} w_j e_j >= \sum_{i=1}^{n} v_i w_i.$$

Opgave 132. *Laat zien dat de orthogonale $n \times n$ matrices over $\mathbb{R}$ een ondergroep vormen van de groep $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.*

Het complexe analogon van de orthogonale afbeelding is de unitaire afbeelding; de naam wordt duidelijk uit de eerstvolgende stelling.

5.2.7 Definitie

Een lineaire afbeelding $T : V \to W$ tussen complexe inproductruimten heet een *unitaire* afbeelding als geldt dat

$$< Tv_1, Tv_2 >=< v_1, v_2 > \quad \text{voor alle } v_1, v_2 \in V,$$

en bovendien dat T inverteerbaar is.

5.2.8 Stelling

Voor een eigenwaarde λ van een unitaire transformatie geldt: $|\lambda| = 1$.

Bewijs. Laat λ eigenwaarde zijn van de unitaire T, bij eigenvector v. Dan is

$$< v, v >=< Tv, Tv >=< \lambda v, \lambda v >= \lambda\overline{\lambda} < v, v >,$$

dus $(1 - \lambda\overline{\lambda}) < v, v >= 0$. Omdat $v \neq 0$ is $< v, v >\neq 0$ en dus $|\lambda| = 1$.

Opgave 133. *Bewijs dat de eigenwaarden van een orthogonale afbeelding slechts ± 1 kunnen zijn.*

5.2.9 Definitie

Een matrix $M \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ heet *unitair* wanneer $\overline{M}^{\mathsf{T}} M = I_n$.

5.2.10 Stelling

Zij T een lineaire transformatie van de n-dimensionale complexe inproductruimte V. Dan zijn equivalent:

(i) *de transformatie T is unitair;*
(ii) *er is een orthonormale basis $\mathcal{E}$ voor V zodat $M_T^{\mathcal{E}}$ een unitaire matrix is;*
(iii) *de matrix $M_T^{\mathcal{B}}$ is unitair voor elke orthonormale basis $\mathcal{B}$ van V;*
(iv) *T voert orthonormale bases voor V over in orthonormale bases.*

Bewijs. Geheel analoog aan 5.2.6.

De volgende stelling laat zien dat unitaire afbeeldingen altijd diagonaliseerbaar zijn.

5.2.11 Stelling

Zij T een unitaire lineaire transformatie van een eindig-dimensionale complexe inproductruimte V. Dan heeft V een orthonormale basis bestaande uit eigenvectoren voor T.

Bewijs. Met inductie naar de dimensie n van V.

Als $n = 1$ is er niets te bewijzen.

Veronderstel dat $n \geq 2$; kies een eigenvector w voor T (dat kan altijd omdat we over de complexe getallen werken!). Die kunnen we eventueel normaliseren (tot lengte 1) door door de lengte te delen. Laat W nu de 1-dimensionale deelruimte van V opgespannen door w zijn. Omdat w eigenvector is en T inverteerbaar, is $T[W] = W$. Beschouw ook $W^\perp$; dan is $T[W^\perp] \subset T[W]^\perp$, want als $u \in W^\perp$ dan $Tu \in T[W]^\perp$ daar $< Tu, Tw >=< u, w >$. Maar $V = W \oplus W^\perp$ (dit volgt bijvoorbeeld uit Gram-Schmidt orthogonalisatie), zodat $V = T[V] = T[W] \oplus T[W]^\perp = W \oplus T[W]^\perp$ zodat T beperkt tot $W^\perp$ een transformatie van een $n-1$-dimensionale deelruimte is, waarvoor de unitaire eigenschap natuurlijk nog steeds geldt. De orthonormale basis van $W^\perp$ bestaande uit eigenvectoren voor (de beperking van) T, die op grond van de inductiehypothese dan bestaat, kan met de genormaliseerde van w aangevuld worden tot zo'n basis voor heel V.

5.3 Symmetrische en Hermitese Transformaties

De volgende begrippen hebben bepaalde symmetrie-eigenschappen ten aanzien van beide argumenten in een inproduct.

5.3.1 Definitie

Een lineaire transformatie $T : V \to V$ van een reële inproductruimte heet een *symmetrische* transformatie als geldt dat

$$< Tv_1, v_2 >=< v_1, Tv_2 > \quad \text{voor alle } v_1, v_2 \in V.$$

5.3.2 Stelling

Zij T een lineaire transformatie van de n-dimensionale reële inproductruimte V. Dan zijn equivalent:

(i) *de afbeelding T is symmetrisch;*

(ii) *er is een orthonormale basis $\mathcal{E}$ voor V zodat $M_T^{\mathcal{E}}$ symmetrisch is;*

(iii) *de matrix $M_T^{\mathcal{B}}$ is symmetrisch voor elke orthonormale basis $\mathcal{B}$ van V.*

Bewijs. Ten opzichte van een orthonormale basis $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ van V is $< Tb_i, b_j >= M_{ji}$ en $< b_i, Tb_j >= M_{ij}$, als M_{kl} de k-de coëfficiënt van de l-de kolom van $M = M_T^{\mathcal{B}}$ is, en die kolom is Tb_l. Als T symmetrisch is, geldt

$$M_{ij} =< b_i, Tb_j >=< Tb_i, b_j >= M_{ji},$$

dus M is een symmetrische matrix. Daarom volgt (iii) uit (i).

Het is duidelijk dat (ii) uit (iii) volgt.

Als (ii) geldt voor de orthonormale basis $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ van V, dan is

$$< Tv, w >=< \sum_{i=1}^{n} v_i Te_i, \sum_{j=1}^{n} w_j e_j >= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_i w_j M_{ji},$$

voor elke v, w, en

$$< v, Tw >=< \sum_{i=1}^{n} v_i e_i, \sum_{j=1}^{n} w_j T e_j >= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_i w_j M_{ij}.$$

Beide inproducten zijn gelijk als $M = M_T^{\mathcal{E}}$ een symmetrische matrix is, en dan is T een symmetrische transformatie. Dus (i) volgt uit (ii).

Het complexe analogon van de symmetrische afbeelding is de Hermitese afbeelding.

5.3.3 Definitie

Een lineaire transformatie $T : V \to V$ tussen van een complexe inproductruimte heet een *Hermitese* transformatie als geldt dat

$$< Tv_1, v_2 >=< v_1, Tv_2 > \quad \text{voor alle } v_1, v_2 \in V.$$

5.3.4 Stelling

Voor een complexe eigenwaarde λ van een Hermitese afbeelding geldt: $\lambda \in \mathbb{R}$.

Bewijs. Laat λ eigenwaarde zijn van de Hermitese T, bij eigenvector v. Dan is

$$\lambda < v, v >=< \lambda v, v >=< Tv, v >=< v, Tv >=< v, \lambda v >= \overline{\lambda} < v, v >,$$

dus $(\lambda - \overline{\lambda}) < v, v >= 0$. Omdat $v \neq 0$ is is $\lambda = \overline{\lambda}$.

5.3.5 Definitie

Een matrix $M \in \mathrm{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ heet *Hermites* wanneer $(M^* =)\overline{M}^{\mathsf{T}} = M$.

5.3.6 Stelling

Zij T een lineaire transformatie van de n-dimensionale complexe inproductruimte V. Dan zijn equivalent:

(i) *de afbeelding T is Hermites;*
(ii) *er is een orthonormale basis $\mathcal{E}$ zodat $M_T^{\mathcal{E}}$ Hermites is;*
(iii) *de matrix $M_T^{\mathcal{B}}$ is Hermites voor elke orthonormale basis $\mathcal{B}$ van V;*

Bewijs. Geheel analoog aan 5.3.2.

Ook Hermitese afbeeldingen blijken weer diagonaliseerbaar te zijn.

5.3.7 Stelling

Zij T een Hermitese lineaire transformatie van een eindig-dimensionale complexe inproductruimte V. Dan heeft V een orthonormale basis bestaande uit eigenvectoren voor T.

Bewijs. Het bewijs is vrijwel gelijk aan dat van 5.2.11, en gaat met inductie naar $n = \dim V$.

Als $n = 1$ is er niets te bewijzen.

Voor $n \geq 2$ kiest men weer een eigenvector w voor T, en laat W de 1-dimensionale deelruimte van V opgespannen door w zijn. Wederom is $T[W] \subset W$ en $T[W^{\perp}] \subset W^{\perp}$; dat laatste omdat voor $u \in W^{\perp}$ en voor alle $y \in W$ nu geldt dat $0 =< u, Ty >=< Tu, y >$, dus $Tu \in W^{\perp}$. Vanwege $V = W \oplus W^{\perp}$ en de inductiehypothese volgt de bewering.

In dit geval geldt een zelfde conclusie voor het reële geval.

5.3.8 Gevolg

Zij T een symmetrische lineaire transformatie van een eindig-dimensionale reële inproductruimte V. Dan heeft V een orthonormale basis bestaande uit eigenvectoren voor T.

Bewijs. Kies een orthonormale basis $\mathcal{B}$ voor V, dan is $M_T^{\mathcal{B}}$ een reëel symmetrische matrix, die ook een transformatie $\hat{T}$ op $\mathbb{C}^n$ (met $n = \dim V$) definieert. Bovendien is $\hat{T}$ Hermites, zodat $\hat{T}$ een eigenvector w heeft met eigenwaarde $\lambda \in \mathbb{R}$ volgens 5.3.4. Het reële (of het imaginaire) deel van w is dan een reële eigenvector van $\hat{T}$, en dus van T. Maar dat betekent dat bij elke symmetrische T een *reële* eigenvector gevonden kan worden, en dus kan het bewijs met inductie net zo uitgevoerd worden als van stelling 5.3.7.

Opgave 134. *Laat zien dat als A, B Hermitese matrices zijn, ook $AB + BA$ en $\mathrm{i}(AB - BA)$ Hermites zijn. Geldt hetzelfde met symmetrisch in plaats van Hermites?*

Opgave 135. *Laat zien dat AB niet noodzakelijk Hermites is als de matrices A en B het zijn.*

Opgave 136. *Laat $A \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ de matrix*

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

zijn. Bepaal een orthonormale basis van eigenvectoren van A en bepaal ook een $B \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ met $B^2 = A$.

Opgave 137. *Bewijs dat voor een symmetrische reële $n \times n$ matrix A geldt:*

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i,$$

waar $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de eigenwaarden van A zijn. Geldt dit ook als A complex is?

5.4 Geadjungeerde en Normaliteit

In 5.2 en 5.3 werd bewezen dat voor het bestaan van een orthonormale basis bestaande uit eigenvectoren van een lineaire transformatie T in een eindig-dimensionale complexe inproductruimte V het voldoende is dat T Hermites is (volgens 5.3.7) of dat T unitair is (volgens 5.2.11). In deze paragraaf onderzoeken we *noodzakelijke* voorwaarden voor T voor het bestaan van zo'n basis. Eerst een Lemma dat we al eens gebruikten.

5.4.1 Lemma

Zij V een eindig-dimensionale inproductruimte met orthonormale basis $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Dan geldt:

(i) $x = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > \cdot e_i$ *voor elke $x \in V$;*
(ii) *als $T\colon V \to V$ een lineaire transformatie is, dan geldt $M_T^{\mathcal{E}} = (< Te_j, e_i >)_{i,j=1}^{n}$.*

Bewijs. (i) Volgt direct uit:

$$< x, e_i > = < \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot e_j, e_i > = \sum_{j=1}^{n} x_j < e_j, e_i > = x_i,$$

omdat $\mathcal{E}$ een orthonormale basis is.